

6

6ta Unidad

Cónicas

6.4 Hipérbola

Establecer un orden sistemático de las cosas que hacemos cada día nos ayuda a programar nuestra mente y usar el tiempo de forma más eficiente.

Descripción

La Hipérbola, es la tercera de las cónicas que estudiamos en esta secuencia. En este objetivo cuentas con la presentación de la ecuación de la hipérbola como lugar geométrico, así como sus elementos y relación con otros elementos geométricos.

Conocimientos Previos Requeridos

Plano Cartesiano, Punto Medio, Distancia entre Puntos del Plano, Pendiente de un Recta, Rectas en el Plano, Lugares Geométricos, Álgebra Básica, Simplificación de Expresiones Algebraicas, Despeje.

Contenido

Definición y Elementos de Hipérbola, Casos de Hipérbola , Graficar e identificar elementos de una Hipérbola, Ejercicios.

Videos Disponibles

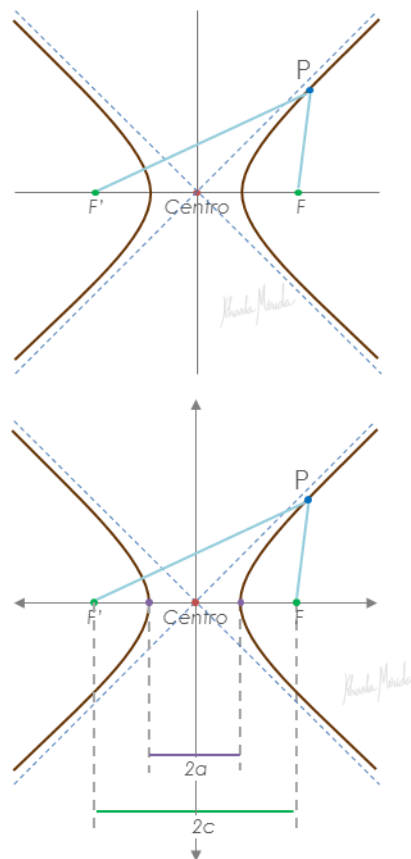
Los guiones didácticos que aparecen en este objetivo corresponden a videos en desarrollo.

Guiones Didácticos

▶ HIPÉRBOLA. Definición y Elementos

Hipérbola. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, la diferencia entre las distancias a los Focos es constante.

$$d_{PF'} - d_{PF} = C$$



Elementos Que Definen La Hipérbola

Focos, F y F': Puntos fijos de la hipérbola, ubicados sobre la misma recta que contiene al centro y a igual distancia de éste.

Recta Focal: Recta que contiene al centro y a los focos.

Distancia Focal: Distancia entre los Focos, su medida es $2c$.

Radio vectores: Segmentos, PF y PF' , que van del punto $P(x, y)$ a los Focos, F y F' .

Para un punto cualquiera de la Hipérbola, $P(x, y)$, se cumple que

$$|d_{PF'} - d_{PF}| = 2a$$

Esto se lee: EL valor absoluto de la diferencia entre las distancias PF y PF' es $2a$. Lo que establece la definición de Hipérbola como lugar geométrico.

Eje Focal: Segmento comprendido entre los vértices de la hipérbola, su longitud es $2a$.

Eje Conjugado: Segmento imaginario ubicado a una distancia b del centro.

Deducción de la Ecuación de la Hipérbola

Partimos de la definición de hipérbola como lugar geométrico:

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, la diferencia entre las distancias a los Focos es constante.

$$|d_{PF'} - d_{PF}| = 2a$$

Consideraremos que el centro se ubica en el origen de coordenadas, $C(0, 0)$.

Entonces, las coordenadas de los focos son:

$$F'(-c, 0) \text{ y } F(c, 0)$$

Aplicamos la fórmula de distancia a las distancias indicadas en la definición.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancias PF' y PF:

$$PF' = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \quad PF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

Sustituimos las distancias en la definición de Elipse

$$|d_{PF'} - d_{PF}| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Pasamos una de las raíces al otro lado de la igualdad, y elevamos ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \\ \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Simplificamos el cuadrado con la raíz en el primer lado de la igualdad, y desarrollamos el cuadrado de la diferencia en el segundo lado de la igualdad.

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Desarrollamos el cuadrado de la suma en el primer lado de la igualdad, Simplificamos el cuadrado con la raíz en el segundo lado de la igualdad.

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = (2a)^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Distribuimos la potencia $(2a)^2$ y desarrollamos el cuadrado de la diferencia $(x-c)^2$ en el segundo lado de la igualdad.

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificamos los términos iguales que se encuentran a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} \\ 2xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc \end{aligned}$$

Dejamos el término que tiene la raíz en el segundo lado de la igualdad, reunimos el resto de los términos en el primer lado de la igualdad, y sumamos los términos semejantes $2xc$.

$$\begin{aligned} 2xc + 2xc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ 4xc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Dividimos todos los términos de la igualdad entre 4.

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevamos ambos lados de la igualdad al cuadrado, para eliminar la raíz.

$$(xc - a^2)^2 = (a\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 \longrightarrow (xc - a^2)^2 = a^2((x - c)^2 + y^2)$$

Aplicamos distributiva de a^2 y desarrollamos producto notable.

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2$$

Desarrollamos productos notables, y aplicamos distributiva de a^2 .

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2) + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - \cancel{2a^2xc} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$

Simplificamos términos iguales $-2a^2xc$ de ambos lados de la igualdad.

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

Reunimos todos los términos con x o y en el primer lado de la igualdad y los demás en el segundo lado de la igualdad.

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Sacamos x^2 factor común en los primeros dos términos del primer lado de la igualdad y c^2 de los términos del segundo lado de la igualdad.

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

En la hipérbola se tiene la relación $b^2 + a^2 = c^2$ de dónde despejamos $b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividimos todos los términos de la igualdad entre a^2b^2

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación Canónica de la Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la Elipse
con Centro (h, k)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

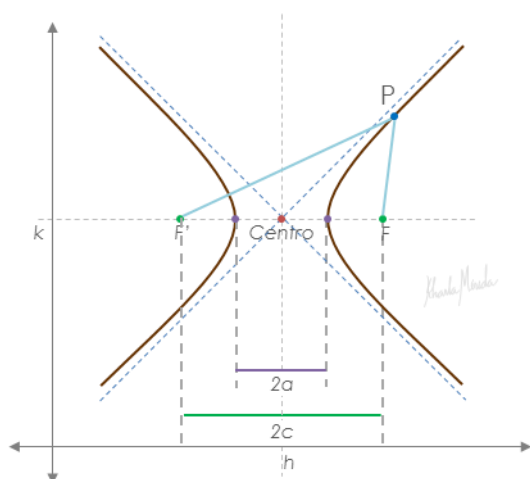
▶ HIPÉRBOLA. Casos

Caso 1. Hipérbola Horizontal

Cuando el mayor denominador es el que corresponde a la variable "x" se trata de una hipérbola con eje focal horizontal.

Esto aplica a las de centro (h, k) o las de centro en el origen de coordenadas.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Centro: $C(h, k)$

Focos: $F'(h - c, k)$; $F(h + c, k)$

Vértices: $A'(h - a, k)$; $A(h + a, k)$

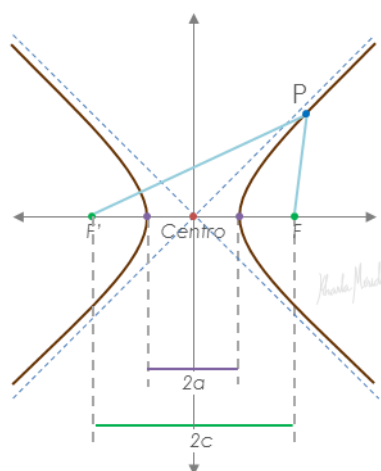
Excentricidad, e : $e = \frac{c}{a}$

Asíntotas:

$$b(x - h) + a(y - k) = 0$$

$$b(x - h) - a(y - k) = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Centro: $C(0, 0)$

Focos: $F'(-c, 0)$; $F(c, 0)$

Vértices: $A'(-a, 0)$; $A(a, 0)$

Excentricidad, e : $e = \frac{c}{a}$

$$bx + ay = 0$$

$$bx - ay = 0$$

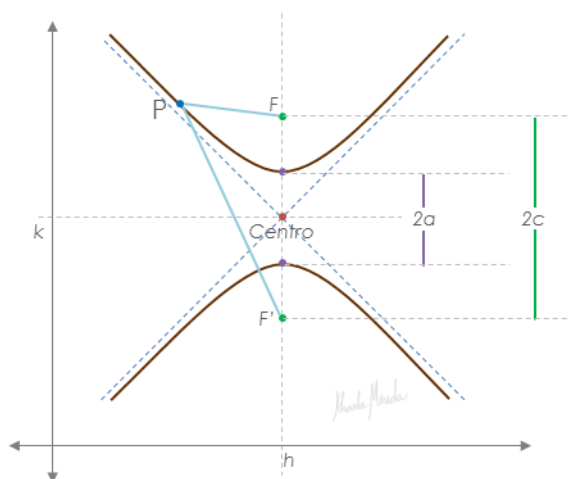
Caso 2. Hipérbola Vertical

Cuando el mayor denominador es el que corresponde a la variable "y" se trata de una hipérbola con eje focal vertical.

Esto aplica a las de centro (h, k) o las de centro en el origen de coordenadas.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Centro: $C(h, k)$

Focos: $F'(h - c, k)$; $F(h + c, k)$

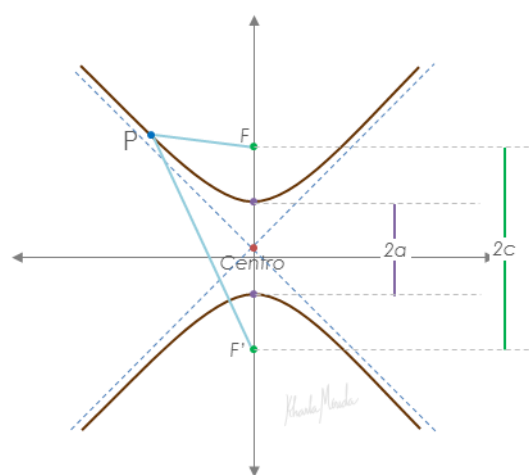
Vértices: $A'(h - a, k)$; $A(h + a, k)$

Excentricidad, e: $e = \frac{c}{a}$

Asíntotas:

$$a(x - h) + b(y - k) = 0$$

$$a(x - h) - b(y - k) = 0$$



Centro: $C(0, 0)$

Focos: $F'(-c, 0)$; $F(c, 0)$

Vértices: $A'(-a, 0)$; $A(a, 0)$

Excentricidad, e: $e = \frac{c}{a}$

$$ax + by = 0$$

$$ax - by = 0$$

HIPÉRBOLA. Graficar e identificar elementos de una hipérbola. Ejercicio 1

Graficar la hipérbola de ecuación $4y^2 - 3x^2 - 8y - 6x - 11 = 0$, indicando sus elementos.

Lo primero que debemos hacer es llevar la ecuación a la forma de ecuación con centro (h, k) .

Agrupamos los términos de "x" y los términos de "y".

$$4y^2 - 3x^2 - 8y - 6x - 11 = 0$$

$$(4y^2 - 8y) - (3x^2 + 6x) - 11 = 0$$

Sacamos factores comunes numéricos de ambas agrupaciones

$$4(y^2 - 2y) - 3(x^2 + 2x) - 11 = 0$$

Completamos TCP en cada agrupación.

$$4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 3(x^2 + 2x + 1 - 1) - 11 = 0$$

Sacamos los términos que restan en cada paréntesis, dejando solo los TCP

$$4(y^2 - 2y + 1) - 4 - 3(x^2 + 2x + 1) + 3 - 11 = 0$$

Efectuamos la suma de términos independientes.

$$4(y - 1)^2 - 3(x + 1)^2 - 12 = 0$$

Factorizamos los TCP

$$4(y - 1)^2 - 3(x + 1)^2 = 12$$

Pasamos el término independiente al otro lado de la igualdad.

Dividimos todos los términos entre 12 para igualar a 1.

$$\frac{(y-1)^2}{3} + \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

De la ecuación sacamos:

Centro: $C(-1, 1)$

$$a^2 = 4 \quad \longrightarrow \quad a = 2$$

$$b^2 = 3 \quad \longrightarrow \quad b = \sqrt{3}$$

Aplicamos la relación para hallar c:

$$b^2 + a^2 = c^2$$

$$c^2 = 7 \quad \longrightarrow \quad c = \sqrt{7}$$

Focos: $F'(-1 - \sqrt{7}, 1)$; $F(-1 + \sqrt{7}, 1)$

Vértices: $A'(-3, 1)$; $A(1, 1)$

Excentricidad, e: $e = \frac{c}{a}$ $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Asíntotas:

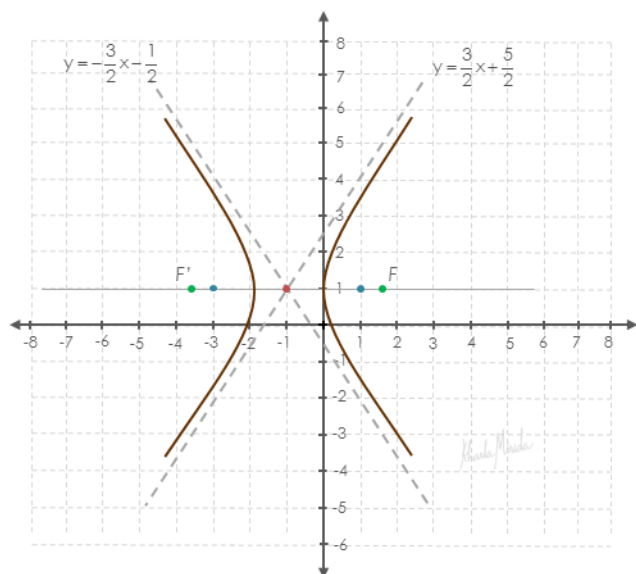
$$3(x + 1) + 2(y - 1) = 0$$

$$3(x + 1) - 2(y - 1) = 0$$

Despejando

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$



Focos: $F'(-1 - \sqrt{7}, 1)$; $F(-1 + \sqrt{7}, 1)$

Vértices: $A'(-3, 1)$; $A(1, 1)$

Asíntotas: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

Nota: trazar las asíntotas ayuda a demarcar el gráfico de la hipérbola. Para trazar las rectas puedes revisar las lecciones de Recta en el Plano.

▶ HIPÉRBOLA. Graficar e identificar elementos de una hipérbola. Ejercicio 2

Graficar la hipérbola de ecuación $5x^2 - 4y^2 - 40x + 24y + 24 = 0$, indicando sus elementos.

Lo primero que debemos hacer es llevar la ecuación a la forma de ecuación con centro (h, k) .

Agrupamos los términos de "x" y los términos de "y".

Sacamos factores comunes numéricos de ambas agrupaciones

Completamos TCP en cada agrupación.

Sacamos los términos que restan en cada paréntesis, dejando solo los TCP

Efectuamos la suma de términos independientes.

Factorizamos los TCP

Pasamos el término independiente al otro lado de la igualdad.

Dividimos todos los términos entre 20 para igualar a 1.

$$5x^2 - 4y^2 - 40x + 24y + 24 = 0$$

$$(5x^2 - 40x) - (4y^2 - 24y) + 24 = 0$$

$$5(x^2 - 8x) - 4(y^2 - 6y) + 24 = 0$$

$$5(x^2 - 8x + 16 - 16) - 4(y^2 - 6y + 9 - 9) + 24 = 0$$

$$5(x^2 - 8x + 16) - 80 - 4(y^2 - 6y + 9) + 36 + 24 = 0$$

$$5(x^2 - 8x + 16) - 4(y^2 - 6y + 9) - 20 = 0$$

$$5(x - 4)^2 - 4(y - 3)^2 - 20 = 0$$

$$5(x - 4)^2 - 4(y - 3)^2 = 20$$

$$\frac{(x - 4)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{5} = 1$$

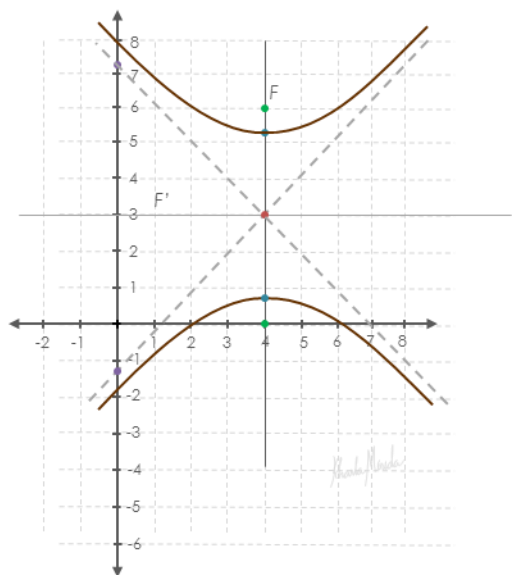
Asíntotas:

Ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$\begin{cases} \sqrt{5}(x-4) - 2(y-3) = 0 \\ \sqrt{5}(x-4) + 2(y-3) = 0 \end{cases}$$

Despejando

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - 2\sqrt{5} + 3 \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + 2\sqrt{5} + 3$$

**Centro:** $C(4, 3)$; $a = \sqrt{5}$; $b = 2$

$$c^2 = b^2 + a^2 \rightarrow c = 3$$

Focos: $F'(4, 6)$; $F(4, 0)$ **Vértices:** $A'(4, 3 - \sqrt{5})$; $A(4, 3 + \sqrt{5})$ **Asíntotas:** $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - 2\sqrt{5} + 3$ $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + 2\sqrt{5} + 3$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + (-1,24) \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + 7,24$$

Nota: trazar las asíntotas ayuda a demarcar el gráfico de la hipérbola. Para trazar las rectas puedes revisar las lecciones de Recta en el Plano.

Emparejando el Lenguaje

Hipérbola. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, la diferencia entre las distancias a los Focos es constante.

$$d_{PF'} - d_{PF} = C$$

A Practicar

Expresar las siguientes curvas en forma reducida

1. $4y^2 - 3x^2 - 8y - 6x - 5 = 0$

2. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 4 = 0$

´ Grafique las siguientes hipérbolas

5. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 9 = 0$

6. $9x^2 - 4y^2 + 18x - 16y - 9 = 0$

7. Hallar la distancia entre los vértices de la hipérbola $-9x^2 + 4y^2 + 18x + 24y = 9$.

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el centro de la hipérbola $4x^2 - y^2 + 32x - 8y + 49 = 0$

Lo Hicimos Bien?

Expresar las siguientes curvas en forma reducida

$$1. \frac{(y-1)^2}{\frac{3}{2}} - \frac{(x+1)^2}{2} = 1$$

$$2. \frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Grafique las siguientes hipérbolas

$$5. 4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 9 = 0$$

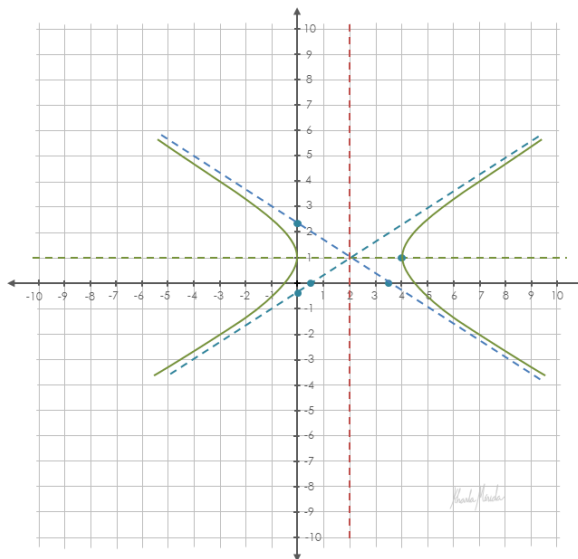
Ecuación Reducida

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{\frac{16}{9}} = 1$$

Hipérbola Horizontal

Centro: (2, 1)

Vértices: (0, 1), (4, 1)



$$6. 9x^2 - 4y^2 + 18x - 16y - 9 = 0$$

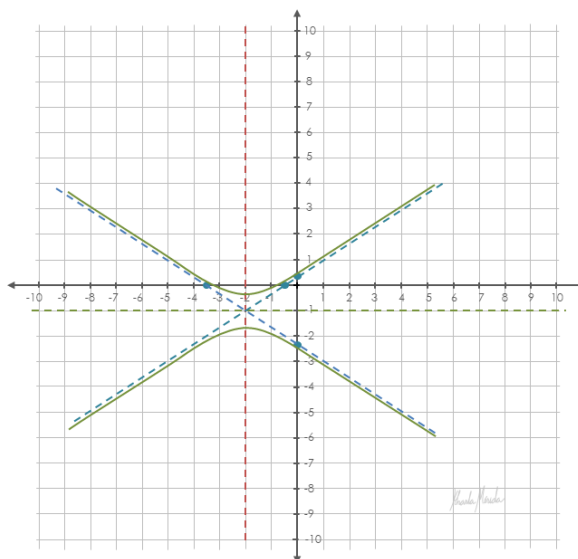
Ecuación Reducida

$$\frac{(y+1)^2}{\frac{2}{9}} - \frac{(x+2)^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

Hipérbola Vertical

Centro: (-2, -1)

Vértices: $(-2, -1 + \sqrt{2}/3)$, $(-2, -1 - \sqrt{2}/3)$



7. 6 unidades

$$8. 4x - y + 20 = 0$$