7

7ma Unidad

Factorización

7.2 Diferencias de Cuadrados, Diferencias y Sumas de Cubos

Quienes toman del fuego la energía con la capacidad de transformar, desarrollan fuertes alas de libertad.

Descripción

En este objetivo conocemos dos tipos de expresiones algebraicas notables por su sencilla forma de descomponer. Se trata de la diferencia de cuadrados, la suma y diferencia de cubos. Reconocer este tipo de expresiones y saber su descomposición es tener una destreza de gran valor en la transformación y simplificación de expresiones matemática.

Conocimientos Previos Requeridos

Descomposición de Números en Factores Primos, Potenciación.

Contenido

Diferencia de Cuadrados, Suma y Diferencias de Cubos.

Videos Disponibles

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cuadrados. Cómo Reconocerla y Cómo Factorizarla

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cuadrados. Ejercicio 1 y 2

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cuadrados. Ejercicio 3 y 4

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cubos. Cómo Reconocerla y Cómo Factorizarla

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cubos. Ejercicio 1 y 2

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cubos. Ejercicio 3 y 4

FACTORIZACIÓN. Suma de Cubos. Cómo Reconocerla y Cómo Factorizarla

FACTORIZACIÓN. Suma de Cubos. Ejercicio 1 y 2

FACTORIZACIÓN. Suma de Cubos. Ejercicio 3 y 4

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cuadrado. Cómo Reconocerlo y Cómo Factorizarlo.

El tercer caso de factorizaciones es el de **Diferencia de cuadrados.** Veamos cómo reconocerlo y cómo factorizarlo. $a^2 - b^2$

Como su nombre lo indica se trata de una resta de cuadrados perfectos.

¿Cuál de las siguientes expresiones son diferencia de cuadrados?

$9-16$ $\quad -4+1$ $\quad x^2-1-y^2$ $\quad 16t^4+4$

$9-16$ Tenemos una resta en la que cada termino es un cuadrado perfecto, de raíces 3 y 4. Esto es una diferencia de cuadrados.

$9-16$
3 4

$-4+1$
$1-4$ Tenemos una resta de forma desordenada. Ordenando los términos, se observa con claridad la diferencia. 1 y 4 son cuadrados perfectos, sus raíces son 1 y 2.

$1-4$
1 2

x^2-1-y^2 Tenemos tres términos en lugar de dos, con esta condición queda descartada la diferencia de cuadrados.

$x^2-(1+y^2)$ Sin embargo, asociando los últimos dos términos como una suma dejando el signo menos fuera del paréntesis si podríamos observar claramente una diferencia, pero no de cuadrado perfectos.

$16t^4+4$ Tenemos dos cuadrados perfectos cuyas raíces son $4t^2$ y 2 pero se están sumando así que no es una diferencia de cuadrados.

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cuadrado. Ejercicios 1 y 2

Factorizar $4a^2-(1-a)^2$

Observaciones:

- Esta expresión tiene dos términos que se restan, es una diferencia.
- Ambos términos son cuadrados perfectos. Sus raíces son: 2a y (1 – a). Es una diferencia de cuadrados.

$$\underset{2a}{4a^2}-\underset{(1-a)}{(1-a)^2}$$

Para factorizar

Colocamos el producto de dos paréntesis, con ambas raíces en ellos.
En un paréntesis separamos las raíces con más y en el otro con menos.

$$(2a \quad (1-a))(2a \quad (1-a))$$

$$(2a+(1-a))(2a-(1-a))$$

Aplicamos propiedad distributiva de los signos para eliminar los paréntesis internos. Y simplificamos términos semejantes.
Nos queda (a + 1)(3a – 1).

$$(2a+1-a)(2a-1+a)$$

$$(a+1)(3a-1)$$

Factorizar $9(a-b)^2-4(3a-2b)^2$

Observaciones:

- Esta expresión tiene dos términos que se restan. Es una diferencia.
- Ambos términos son cuadrados perfectos. Sus raíces son: 3(a – b) y 2(3a – 2b). Es una diferencia de cuadrados.

$$\underset{3(a-b)}{9(a-b)^2}-\underset{2(3a-2b)}{4(3a-2b)^2}$$

Para factorizar

Colocamos el producto de dos paréntesis, con ambas raíces en ellos.
En un paréntesis separamos las raíces con más y en el otro con menos.

$$=[3(a-b) \quad 2(3a-2b)]\cdot[3(a-b) \quad 2(3a-2b)]$$

$$=[3(a-b)+2(3a-2b)]\cdot[3(a-b)-2(3a-2b)]$$

Aplicamos propiedad distributiva para eliminar los paréntesis internos. Y simplificamos términos semejantes.
Nos queda (3a – 7b)(b – 3a).
Ordenamos los términos del 2do paréntesis

$$=(3a-3b+6a-4b)\cdot(3a-3b-6a+4b)$$

$$=(9a-7b)\cdot(-3a+b)$$

$$=(9a-7b)\cdot(b-3a)$$

Nota: A menos que se diga lo contrario suele entregarse los resultados ordenando los términos de tal forma que el primero de ellos sea positivo.

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cuadrado. Ejercicios 3 y 4

Factorizar $e^{4x} - e^{6x}$

Escribimos ambas potencias como una potencia cuadrada, aplicando la propiedad potencia de potencia de forma inversa.

$$\left(e^{2x}\right)^2 - \left(e^{3x}\right)^2$$

Ahora vemos claramente la diferencia de cuadrados, de raíces e^{2x} y e^{3x}.

Factorizando

Colocamos un producto de paréntesis y dentro de ellos las raíces obtenidas. En uno de los paréntesis separamos con menos y en el otro con mas.

$$\left(e^{2x} - e^{3x}\right)\left(e^{2x} + e^{3x}\right)$$

Factorizar $\left(2e^x + 1\right)^2 - e^{4x}$

Escribimos el 2do término como una potencia cuadrada, aplicando la propiedad potencia de potencia de forma inversa.

$$\left(2e^x + 1\right)^2 - \left(e^{2x}\right)^2$$

Observamos claramente la diferencia de cuadrados, de raíces $2e^{2x} + 1$ y e^{2x}.

Factorizando

Colocamos un producto de paréntesis y dentro de ellos las raíces obtenidas. En uno de los paréntesis separamos con menos y en el otro con mas.

$$= \left(\left(2e^x + 1\right) - e^{2x}\right)\left(\left(2e^x + 1\right) + e^{2x}\right)$$

Aplicamos propiedad distributiva para eliminar los paréntesis internos.

$$= \left(2e^x + 1 - e^{2x}\right)\left(2e^x + 1 + e^{2x}\right)$$

¿Que observas en el segundo factor?

- Es una expresión de tres términos,
- dos de ellos son cuadrados perfectos de raíces: 1 y e^x.
- El doble producto de las raíces, $2e^x$, da el otro término del trinomio.

Es un trinomio cuadrado perfecto

$$2e^x + 1 + e^{2x}$$

$$1 \quad e^x$$

$$2 \cdot 1 \cdot e^x$$

Factorizando

Colocamos un paréntesis y dentro de ellos las raíces obtenidas, separadas con el signo del doble producto.

$$2e^x + 1 + e^{2x} = \left(1 \quad e^{2x}\right)$$

$$2e^x + 1 + e^{2x} = \left(1 + e^{2x}\right)^2$$

$$\left(2e^x + 1\right)^2 - e^{4x} = \left(2e^x + 1 - e^{2x}\right)\left(1 + e^{2x}\right)^2$$

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cubos. Cómo Reconocerlo y Cómo Factorizarlo

El cuarto caso de factorizaciones es el de **Diferencia de cubos**. Veamos cómo reconocerlo y cómo factorizarlo. $a^3 - b^3$

Como su nombre lo indica se trata de una resta de cubos perfectos.

¿Cuál de las siguientes expresiones son diferencia de cubos?

$1-27$ $\quad -8x^3+64$ $\quad 125+8m^3$ $\quad 27x^3-8y^3$ $\quad b^3-125$

$1-27$	Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son 1 y 3. Esto es una diferencia de cubos.	$1-27$ → 1^3 y 3^3
$-8x^3+64$	Tenemos una resta (desordenada) en la que cada término es un cubo perfecto. Ordenando visualizamos la diferencia y las raíces cubicas, 2x y 4. Esto es una diferencia de cubos.	$64-8x^3$ → $(2x)^3$ y 4^3
$125+8m^3$	Tenemos una suma en la que cada término es un cubo perfecto. No es una diferencia de cubos.	$125+8m^3$ → $(2x)^3$ y 4^3
$27x^3-8y^3$	Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son 3x y 2y. Esto es una diferencia de cubos.	$27x^3-8y^3$ → $(3x)^3$ y $(2y)^3$
b^3-125	Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son b^3 y 5^3. Esto es una diferencia de cubos.	b^3-125 → b^3 y 5^3

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cubos. Ejercicios 1 y 2

Factorizar $8 - x^3$

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son 2 y x. Esto es una diferencia de cubos.

$$8 - x^3 \quad \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ 2 & x \end{matrix}$$

Para Factorizar

- Colocamos en un primer paréntesis la resta de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, mas la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

Efectuamos a potencia de 2.

$$= (2 - x)$$

$$= (2 - x)(2^2 + 2x + x^2)$$

$$8 - x^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$$

Factorizar $27m^3 - \frac{1}{64}$

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son 3m y 1/4. Esto es una diferencia de cubos.

$$27m^3 - \frac{1}{64} \quad \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ 3m & 1/4 \end{matrix}$$

Para Factorizar

- Colocamos en un primer paréntesis la resta de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, mas la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

Efectuamos el producto y potencia.

$$= \left(3m - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(3m - \frac{1}{4}\right)\left((3m)^2 + 3m \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$$

$$= \left(3m - \frac{1}{4}\right)\left(9m^2 + \frac{3}{4}m + \frac{1}{16}\right)$$

FACTORIZACIÓN. Diferencia de Cubos. Ejercicios 3 y 4

Factorizar $8b^{6x} - b^{9x}$

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son $2b^{2x}$ y b^{3x}. Esto es una diferencia de cubos.

$$8b^{6x} - b^{9x}$$
$$2b^{2x} \qquad b^{3x}$$

Para Factorizar

- Colocamos en un primer paréntesis la resta de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, mas la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

$$= \left(2b^{2x} - b^{3x}\right)$$

$$= \left(2b^{2x} - b^{3x}\right)\left(\left(2b^{2x}\right)^2 + 2b^{2x} \cdot b^{3x} + \left(b^{3x}\right)^2\right)$$

En el segundo paréntesis aplicamos:
Potencia de un producto en el primer término en el segundo termino aplicamos multiplicación de potencias y el tercer termino aplicamos potencia de una potencia.

$$= \left(2b^{2x} - b^{3x}\right)\left(2^2\left(b^{2x}\right)^2 + 2b^{2x+3x} + b^{6x}\right)$$

$$= \left(2b^{2x} - b^{3x}\right)\left(4b^{4x} + 2b^{5x} + b^{6x}\right)$$

Factorizar $(x-1)^3 - x^3$

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son $(x - 1)$ y x. Esto es una diferencia de cubos.

$$(x-1)^3 - x^3$$
$$(x-1) \qquad x$$

Para Factorizar

- Colocamos en un primer paréntesis la resta de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, mas la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

$$= (x-1-x)$$

$$= (x-1-x)\left((x-1)^2 + (x-1)\cdot x + x^2\right)$$

En el primer paréntesis simplificamos los términos opuestos de x.
En el segundo paréntesis desarrollamos productos notables y propiedad distributiva.

$$= (-1)\left((x-1)^2 + (x-1)\cdot x + x^2\right)$$

$$= (-1)\left(x^2 - 2x + 1^2 + x^2 - x + x^2\right)$$

Simplificamos términos semejantes

$$= (-1)\left(3x^2 - 3x + 1\right)$$

Aplicamos distributiva del signo menos.

$$= -3x^2 + 3x - 1$$

$$(x-1)^3 - x^3 = -3x^2 + 3x - 1$$

FACTORIZACIÓN. Suma de Cubos. Cómo Reconocerlo y Cómo Factorizarlo

El cuarto caso de factorizaciones es el de **Suma de Cubos** a^3+b^3 veamos cómo reconocerlo y cómo factorizarlo.

Como su nombre lo indica se trata de una suma de cubos perfectos.

¿Cuál de las siguientes expresiones son sumas de cubos?

$216+1$ $\quad -x^3+y^3$ $\quad -t^6-64$ $\quad x^3+y^3$ $\quad 27+y^9$

$216+1$	Tenemos una suma en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son 1 y 3. Esto es una suma de cubos.	$216+1$ → 6 y 1
$-x^3+y^3$	Tenemos una resta (desordenada) en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son x y y. No es una suma de cubos.	y^3-x^3 → y y x
$-t^6-64$	Tenemos dos cubos perfectos cuyas raíces son t^2 y 4, pero ambos están negativos. No puede llamarse suma de cubos. Pero sacando el menos factor común queda dentro del paréntesis una suma de cubos.	$-(t^6+64)$ → t^2 y 4
x^3+y^3	Tenemos una suma en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son x y y. Esto es una suma de cubos.	x^3+y^3 → x y y
$27+y^9$	Tenemos una suma en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son 3 y y^3. Esto es una suma de cubos.	$27+y^9$ → 3 y y^3

FACTORIZACIÓN. Suma de Cubos. Ejercicios 1 y 2

Factorizar y^6+125

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto, cuyas raíces cubicas son y^2 y 5. Esto es una diferencia de cubos.

Para Factorizar
- Colocamos en un primer paréntesis la suma de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, menos la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

Efectuamos las potencias

$$y^6+125$$
$$(y^2)^3+5^3$$
$$=(y^2+5)$$
$$=(y^2+5)\left((y^2)^2-(y^2)5+5^2\right)$$
$$=(y^2+5)(y^4-5y^2+25)$$

$$y^6+125=(y^2+5)(y^4-5y^2+25)$$

Factorizar $\frac{8}{27}t^{12}+1$

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto. Esto es una diferencia de cubos.

Para Factorizar
- Colocamos en un primer paréntesis la suma de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, menos la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

Aplicamos propiedades de la potencia

Efectuamos las potencias

$$\frac{8}{27}t^{12}+1$$
$$=\left(\frac{2}{3}t^4\right)^3+1^3$$
$$=\left(\frac{2}{3}t^4+1\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}t^4+1\right)\left(\left(\frac{2}{3}t^4\right)^2-\frac{2}{3}t^4\cdot 1+1^2\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}t^4+1\right)\left(\frac{2^2}{3^2}(t^4)^2-\frac{2}{3}t^4\cdot 1+1^2\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}t^4+1\right)\left(\frac{4}{9}t^8-\frac{2}{3}t^4+1\right)$$

$$\frac{8}{27}t^{12}+1=\left(\frac{2}{3}t^4+1\right)\left(\frac{4}{9}t^8-\frac{2}{3}t^4+1\right)$$

FACTORIZACIÓN. Suma de Cubos. Ejercicios 3 y 4

Factorizar $8y^9+64$

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto. Esto es una diferencia de cubos.

Para Factorizar
- Colocamos en un primer paréntesis la suma de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, menos la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

$$8y^9+64$$
$$=\left(2y^3\right)^3+4^3$$
$$=\left(2y^3+4\right)$$
$$=\left(2y^3+4\right)\left(\left(2y^3\right)^2-2y^3\cdot 4+4^2\right)$$

Efectuamos las potencias

$$=\left(2y^3+4\right)\left(4y^6-8y^3+16\right)$$

$$8y^9+64=\left(2y^3+4\right)\left(4y^6-8y^3+16\right)$$

Factorizar $\frac{1}{216}t^{12}+8$

Observación
Tenemos una resta en la que cada término es un cubo perfecto. Esto es una diferencia de cubos.

Para Factorizar
- Colocamos en un primer paréntesis la suma de las raíces cubicas.
- Multiplicamos por otro paréntesis que contiene: la primera raíz al cuadrado, menos la primera raíz por la segunda raíz, mas la segunda raíz al cuadrado.

$$\frac{1}{216}t^{12}+8$$
$$=\left(\frac{1}{6}t^4\right)^3+2^3$$
$$=\left(\frac{1}{6}t^4+2\right)$$
$$=\left(\frac{1}{6}t^4+2\right)\left(\left(\frac{1}{6}t^4\right)^2-\frac{1}{6}t^4+2^2\right)$$
$$=\left(\frac{1}{6}t^4+2\right)\left(\frac{1}{36}t^8-\frac{1}{6}t^4+4\right)$$

$$\frac{1}{216}t^{12}+8=\left(\frac{1}{6}t^4+2\right)\left(\frac{1}{36}t^8-\frac{1}{6}t^4+4\right)$$

A Practicar

1. $x^2 - y^2$
2. $a^2 - 1$
3. $a^2 - 4$
4. $9 - b^2$
5. $1 - 4m^2$
6. $16 - n^2$
7. $a^2b^8 - c^2$
8. $100 - x^2y^8$
9. $a^{10} - 49b^{12}$
10. $25x^2y^4 - 121$
11. $100m^2n^4 - 169y^6$
12. $a^2m^4n^6 - 144$
13. $196x^2y^4 - 225z^{12}$
14. $256a^{12} - 289b^4m^{10}$
15. $1 - 9a^2b^4c^6d^8$
16. $361x^{14} - 1$
17. $(x - y)^2 - a^2$
18. $4 - (a - 1)^2$
19. $9 - (m + n)^2$
20. $(m - n)^2 - 1$
21. $(x - y)^2 - 4z^2$
22. $(a + 2b)^2 - 1$
23. $1 - (x - 2y)^2$
24. $(x + 2a)^2 - 4x^2$
25. $(m - n)^2 - (c + d)^2$
26. $(x + 1)^2 - 16x^2$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $(x - y)(x + y)$
2. $(a - 1)(a + 1)$
3. $(a - 2)(a + 2)$
4. $(3 - b)(3 + b)$
5. $(1 - 2m)(1 + 2m)$
6. $(4 - n)(4 + n)$
7. $(ab^4 - c)(ab^4 + c)$
8. $(10 - xy^4)(10 + xy^4)$
9. $(a^5 - 7b^6)(a^5 + 7b^6)$
10. $(5xy^2 - 11)(5xy^2 + 11)$
11. $(10mn^2 - 13y^3)(10mn^2 + 13y^3)$
12. $(am^2n^3 - 12)(am^2n^3 + 12)$
13. $(14xy^2 - 15z^6)(14xy^2 + 15z^6)$
14. $16a^6 - 17b^2m^5)(16a^6 + 17b^2m^5)$
15. $(1 - 3ab^2c^3d^4)(1 + 3ab^2c^3d^4)$
16. $(19x^7 - 1)(19x^7 + 1)$
17. $(x - y - a)\ (x - y + a)$
18. $(2 - a + 1)\ (2 + a - 1)$
19. $(3 - m - n)(3 + m + n)$
20. $(m - n - 1)(m - n + 1)$
21. $(x - y - 2z)(x - y + 2z)$
22. $(a + 2b - 1)(a + 2b + 1)$
23. $(1 - x + 2y)(1 + x - 2y)$
24. $(2a - x)(2a + 3x)$
25. $(m - n - c - d)(m - n + c + d)$
26. $(1 - 3x)(1 + 5x)$