7

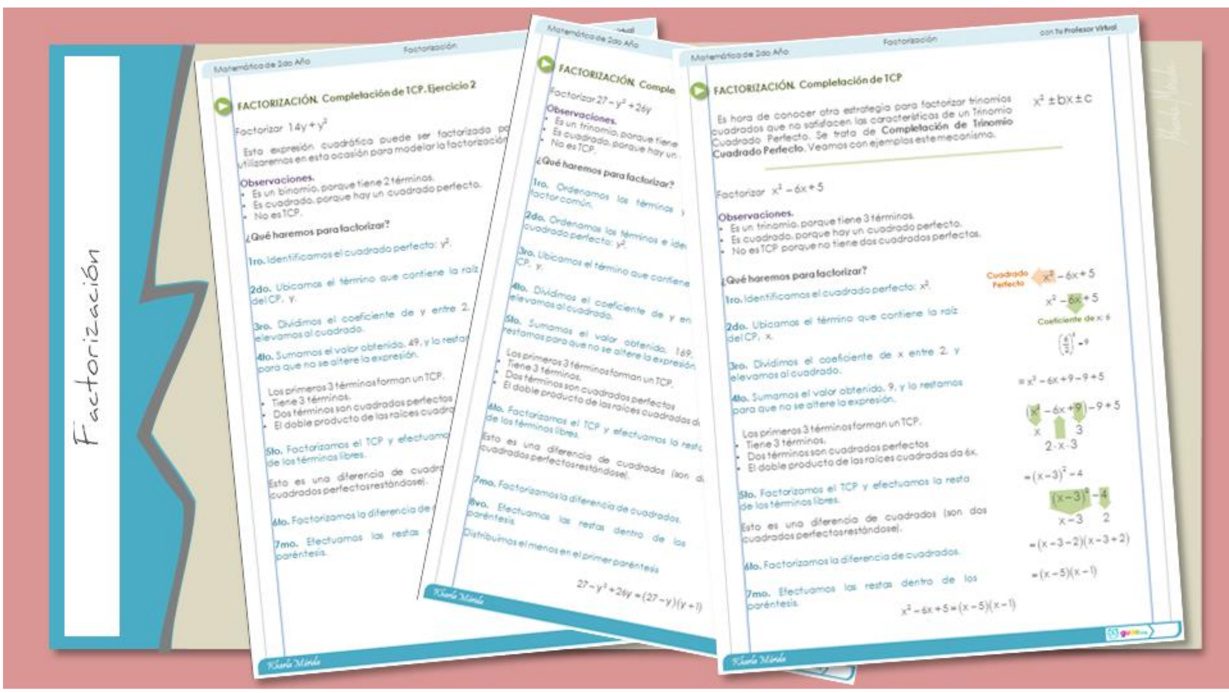
7ma Unidad

Factorización

7.5 Trinomios Cuadrados. Parte III

En ocasiones es necesario transformar nuestro entorno de para lograr mejores estados. El éxito ocurre cuando esas transformaciones producen bienestar general. El éxito basado en bienestar individual es una ilusión.

Descripción



Con este objetivo cerramos el ciclo de artificios matemáticos para transformar trinomios cuadrados a formas que permitan factorizar de con simpleza. Completar trinomios cuadrados perfectos será una herramienta común en procedimientos y cálculos de niveles más avanzados de matemática y geometría analítica. Agreguemos este conocimiento a nuestra caja de herramientas matemáticas.

Conocimientos Previos Requeridos

Descomposición de Números en Factores Primos, Potenciación, Reglas de los Signos.

Contenido

Aplicar Productos Notables, Ejercicios.

Videos Disponibles

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. De Factorizaciones Enteras

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 1

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 2

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 3

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 4

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 5

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 6

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. De Factorizaciones Enteras

Es hora de conocer otra estrategia para factorizar trinomios cuadrados que no satisfacen las características de un Trinomio Cuadrado Perfecto. Se trata de **Completación de Trinomio Cuadrado Perfecto**. Veamos con ejemplos este mecanismo.

$$x^2 \pm bx \pm c$$

Factorizar $x^2 - 6x + 5$

Observaciones.

- Es un trinomio, porque tiene 3 términos.
- Es cuadrado, porque hay un cuadrado perfecto.
- No es TCP porque no tiene dos cuadrados perfectos.

¿Qué haremos para factorizar?

1ro. Identificamos el cuadrado perfecto: x^2.

Cuadrado Perfecto $x^2 - 6x + 5$

2do. Ubicamos el término que contiene la raíz del CP, x.

$x^2 - 6x + 5$

Coeficiente de x: 6

3ro. Dividimos el coeficiente de x entre 2, y elevamos al cuadrado.

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

4to. Sumamos el valor obtenido, 9, y lo restamos para que no se altere la expresión.

$$= x^2 - 6x + 9 - 9 + 5$$

Los primeros 3 términos forman un TCP.

- Tiene 3 términos,
- Dos términos son cuadrados perfectos
- El doble producto de las raíces cuadradas da $6x$.

$$\left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 5$$

x 3

$2 \cdot x \cdot 3$

5to. Factorizamos el TCP y efectuamos la resta de los términos libres.

$$= (x-3)^2 - 4$$

Esto es una diferencia de cuadrados (son dos cuadrados perfectos restándose).

$$(x-3)^2 - 4$$

$x - 3$ 2

6to. Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$$= (x-3-2)(x-3+2)$$

7mo. Efectuamos las restas dentro de los paréntesis.

$$= (x-5)(x-1)$$

$$x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$$

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 1

Factorizar $x^2 - 12x - 13$

Observaciones.

- Es un trinomio, porque tiene 3 términos.
- Es cuadrado, porque hay un cuadrado perfecto.
- No es TCP porque no tiene dos cuadrados perfectos.

¿Qué haremos para factorizar?

1ro. Identificamos el cuadrado perfecto: x^2.

Cuadrado Perfecto $x^2 - 12x - 13$

2do. Ubicamos el término que contiene la raíz del CP, x.

$$x^2 - \underbrace{12x}_{} - 13$$

Coeficiente de x: 12

3ro. Dividimos el coeficiente de x entre 2, y elevamos al cuadrado.

$$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 36$$

4to. Sumamos el valor obtenido, 36, y lo restamos para que no se altere la expresión.

$$= x^2 - 12x + 36 - 36 - 13$$

Los primeros 3 términos forman un TCP.

- Tiene 3 términos,
- Dos términos son cuadrados perfectos
- El doble producto de las raíces cuadradas da $6x$.

$$= (\underbrace{x^2}_{x} - \underbrace{12x}_{2\cdot x\cdot 6} + \underbrace{36}_{6}) - 49$$

5to. Factorizamos el TCP y efectuamos la resta de los términos libres.

$$= (x-6)^2 - 49$$

Esto es una diferencia de cuadrados (son dos cuadrados perfectos restándose).

$$\underbrace{(x-6)^2}_{x-6} - \underbrace{49}_{7}$$

6to. Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$$= (x-6-7)(x-6+7)$$

7mo. Efectuamos las restas dentro de los paréntesis.

$$= (x-13)(x+1)$$

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 2

Factorizar $14y + y^2$

Esta expresión cuadrática puede ser factorizada por factor común, pero la utilizaremos en esta ocasión para modelar la factorización completando TPC

Observaciones.

- Es un binomio, porque tiene 2 términos.
- Es cuadrado, porque hay un cuadrado perfecto.
- No es TCP.

¿Qué haremos para factorizar?

1ro. Identificamos el cuadrado perfecto: y^2.

$14y + y^2$ **Cuadrado Perfecto**

2do. Ubicamos el término que contiene la raíz del CP, y.

$14y + y^2$

Coeficiente de y**:** 14

3ro. Dividimos el coeficiente de y entre 2, y elevamos al cuadrado.

$$\left(\frac{14}{2}\right)^2 = 49$$

4to. Sumamos el valor obtenido, 49, y lo restamos para que no se altere la expresión.

$$= 14y + y^2 + 49 - 49$$

Los primeros 3 términos forman un TCP.

- Tiene 3 términos,
- Dos términos son cuadrados perfectos
- El doble producto de las raíces cuadradas da 6x.

$$= \left(y^2 - 14y + 49\right) - 49$$

y   7

$2 \cdot y \cdot 7$

5to. Factorizamos el TCP y efectuamos la resta de los términos libres.

$$= (y-7)^2 - 49$$

Esto es una diferencia de cuadrados (son dos cuadrados perfectos restándose).

$$(y-7)^2 - 49$$

$y - 7$ 7

6to. Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$$= (y-7-7)(y-7+7)$$

7mo. Efectuamos las restas dentro de los paréntesis.

$$= (y-14)(y)$$

$$14y + y^2 = y(y-14)$$

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 3

Factorizar $9-m^2-8m$

Observaciones.

- Es un trinomio, porque tiene 3 términos.
- Es cuadrado, porque hay un cuadrado perfecto.
- No es TCP.

¿Qué haremos para factorizar?

1ro. Ordenamos los términos y sacamos factor común.

$$=-m^2-8m+9$$

$$=-\left(m^2+8m-9\right)$$

2do. Ordenamos los términos e identificamos el cuadrado perfecto: m^2.

Cuadrado Perfecto

3ro. Ubicamos el término que contiene la raíz del CP, y.

$$-\left(m^2+8m-9\right)$$

Coeficiente de m: 8

4to. Dividimos el coeficiente de m entre 2, y elevamos al cuadrado.

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2=16$$

5to. Sumamos el valor obtenido, 16, y lo restamos para que no se altere la expresión.

$$=-\left(m^2+8m+16-16-9\right)$$

Los primeros 3 términos forman un TCP.

- Tiene 3 términos,
- Dos términos son cuadrados perfectos
- El doble producto de las raíces cuadradas da 6x.

$$=-\left(\left(m^2+8m+16\right)-25\right)$$

$$m \qquad 4$$

$$2\cdot m\cdot 4$$

6to. Factorizamos el TCP y efectuamos la resta de los términos libres.

$$=-\left(\left(m+4\right)^2-25\right)$$

Esto es una diferencia de cuadrados (son dos cuadrados perfectos restándose).

$$=-\left(\left(m+4\right)^2-25\right)$$

$$m+4 \qquad 5$$

7mo. Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$$=-\left(m+4-5\right)\left(m+4+5\right)$$

8vo. Efectuamos las restas dentro de los paréntesis.

$$=-\left(m-1\right)\left(m+9\right)$$

Distribuimos el menos en el primer paréntesis

$$=\left(1-m\right)\left(m+9\right)$$

$$9-m^2-8m=\left(1-m\right)\left(m+9\right)$$

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 4

Factorizar $27 - y^2 + 26y$

Observaciones.

- Es un trinomio, porque tiene 3 términos.
- Es cuadrado, porque hay un cuadrado perfecto.
- No es TCP.

¿Qué haremos para factorizar?

$$= 27 - y^2 + 26y$$

1ro. Ordenamos los términos y sacamos factor común.

$$= -\left(y^2 - 26m - 27\right)$$

2do. Ordenamos los términos e identificamos el cuadrado perfecto: y^2.

Cuadrado Perfecto

3ro. Ubicamos el término que contiene la raíz del CP, y.

$$= -\left(y^2 - 26m - 27\right)$$

Coeficiente de y: 26

4to. Dividimos el coeficiente de y entre 2, y elevamos al cuadrado.

$$\left(\frac{26}{2}\right)^2 = 169$$

5to. Sumamos el valor obtenido, 169, y lo restamos para que no se altere la expresión.

$$= -\left(y^2 - 26m + 169 - 169 - 27\right)$$

Los primeros 3 términos forman un TCP.

- Tiene 3 términos,
- Dos términos son cuadrados perfectos
- El doble producto de las raíces cuadradas da 26y.

$$= -\left(\left(y^2 - 26y + 169\right) - 196\right)$$

y 13

$2 \cdot y \cdot 13$

6to. Factorizamos el TCP y efectuamos la resta de los términos libres.

$$= -\left(\left(y - 13\right)^2 - 196\right)$$

Esto es una diferencia de cuadrados (son dos cuadrados perfectos restándose).

$$= -\left(\left(y - 13\right)^2 - 196\right)$$

$y - 13$ 14

7mo. Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$$= -\left(y - 13 - 14\right)\left(y - 13 + 14\right)$$

8vo. Efectuamos las restas dentro de los paréntesis.

$$= -\left(y - 27\right)\left(y + 1\right)$$

Distribuimos el menos en el primer paréntesis

$$= \left(27 - y\right)\left(y + 1\right)$$

$$27 - y^2 + 26y = \left(27 - y\right)\left(y + 1\right)$$

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 5

Factorizar $y^4 + 4$

Observaciones.

- Es un binomio, porque tiene 2 términos.
- Hay dos cuadrados perfectos.
- No es TCP.

¿Qué hacemos para factorizar?.

1ro. Identificamos el cuadrado perfecto: y^4.

Cuadrado Perfecto $y^4 + 4$

Nota: No hay término central en este polinomio (término que contiene y^2)

2do. Hallamos las raíces de los dos cuadrados perfectos, y^2.

$$\underbrace{\left(y^2\right)^2}_{y^2} + \underbrace{4}_{2}$$

3ro. Hallamos el doble de las raíces cuadradas.

$$2 \cdot y^2 \cdot 2 = 4y^2$$

4to. Sumamos el producto obtenido, $4y^2$, y lo restamos para que no se altere la expresión.

$$= \left(y^2\right)^2 + 4y^2 - 4y^2 + 4$$

5to. Ordenamos la expresión reuniendo los tres términos positivos.

$$= \left(\left(y^2\right)^2 + 4y^2 + 4\right) - 4y^2$$

6to. Factorizamos el TCP

$$= \left(\left(\underbrace{y^2}_{y^2}\right)^2 + \underbrace{4y^2}_{2 \cdot y^2 \cdot 2} + \underbrace{4}_{2}\right) - 4y^2$$

Tenemos una diferencia de cuadrados.

$$= \left(y^2 + 2\right)^2 - 4y^2$$

7mo. Factorizamos la diferencia de cuadrados

$$\underbrace{\left(y^2 + 2\right)^2}_{y^2 + 2} - \underbrace{4y^2}_{2y^2}$$

$$= \left(y^2 + 2 - 2y^2\right)\left(y^2 + 2 + 2y^2\right)$$

Ordenamos los términos dentro de los paréntesis

$$= \left(y^2 - 2y^2 + 2\right)\left(y^2 + 2y^2 + 2\right)$$

$$y^4 + 4 = \left(y^2 - 2y^2 + 2\right)\left(y^2 + 2y^2 + 2\right)$$

FACTORIZACIÓN. Completación de TCP. Ejercicio 6

Factorizar $m^8 + 4n^4$

Observaciones.
- Es un binomio, porque tiene 2 términos.
- Hay dos cuadrados perfectos.
- No es TCP.

¿Qué hacemos para factorizar?.

1ro. Establecemos el cuadrado perfecto principal : m^8.

Cuadrado Perfecto $\leftarrow$ $m^8 + 4n^4$

Nota: No hay término central en este polinomio (término que contiene m^4)

2do. Hallamos las raíces de los dos cuadrados perfectos, m^4 y $4n^2$.

$$\underbrace{(m^4)^2}_{m^4} + \underbrace{(2n^2)^2}_{2n^2}$$

3ro. Hallamos el doble de las raíces cuadradas.

$$2 \cdot m^4 \cdot 2n^2 = 4m^4n^2$$

4to. Sumamos el producto obtenido, $4m^4n^2$, y lo restamos para que no se altere la expresión.

$$= (m^4)^2 + 4m^4n^2 - 4m^4n^2 + (2n^2)^2$$

5to. Ordenamos la expresión reuniendo los tres términos positivos.

$$= (m^4)^2 + 4m^4n^2 + (2n^2)^2 - 4m^4n^2$$

6to. Factorizamos el TCP

$$= \underbrace{(m^4)^2}_{m^4} + \underbrace{4m^4n^2}_{2 \cdot m^4 \cdot 2n^2} + \underbrace{(2n^2)^2}_{2n^2} - 4m^4n^2$$

Tenemos una diferencia de cuadrados.

$$= (m^4 + 2n^2)^2 - 4m^4n^2$$

7mo. Factorizamos la diferencia de cuadrados

$$= \underbrace{(m^4 + 2n^2)^2}_{m^4 + 2n^2} - \underbrace{4m^4n^2}_{4m^4n^2}$$

$$= (m^4 + 2n^2 - 2m^4n^2)(m^4 + 2n^2 + 2m^4n^2)$$

Ordenamos los términos dentro de los paréntesis

$$= (m^4 - 2m^4n^2 + 2n^2)(m^4 + 2m^4n^2 + 2n^2)$$

$$m^8 + 4n^4 = (m^4 - 2m^4n^2 + 2n^2)(m^4 + 2m^4n^2 + 2n^2)$$

A Practicar

Factorizar los siguientes trinomios aplicando Completación de cuadrados

1. $a^4 + 2a^2$
2. $m^4 + 6m^2n^2 + 5n^4$
3. $x^8 + 8x^4 + 7$
4. $a^4 - a^2$
5. $a^4 - 8a^2b^2$
6. $x^4 - 6x^2 + 8$
7. $4a^4 + 12a^2b^2$
8. $4z^4 - 29z^2 + 25$
9. $x^8 - 4x^4y^4 + 3y^8$
10. $m^4 - 5m^2n^2$
11. $81a^8 + 2a^4 - 1$
12. $c^4 - 45c^2 - 100$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $a^2(a^2 + 2)$
2. $(m^2 - 2n + 3n^2)(m^2 + 2n + 3n^2)$
3. $(x^4 + 1)(x^4 + 7)$
4. $a^2(a^2 - 1)$
5. $a^2(a^2 - 8b^2)$
6. $(x^2 - 4)(x^2 - 2)$
7. $4a^2(a^2 + 3b^2)$
8. $(2z^2 - 3z - 5)(2z^2 + 3z - 5)$
9. $(x^4 - y^4 - 2y^4)(x^4 + y^4 - 2y^4)$
10. $m^2(m^2 - 5n^2)$
11. $(9a^4 - 4a^2 + 1)(9a^4 + 4a^2 + 1)$
12. $(c^2 - 5c - 10)(c^2 + 5c - 10)$