1

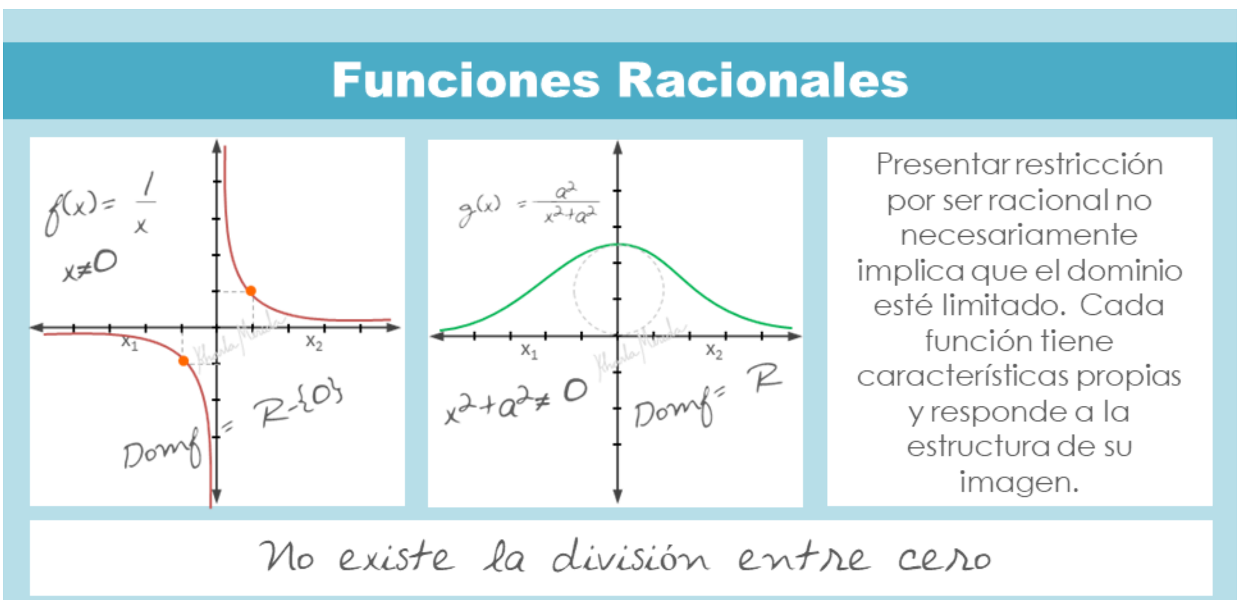
1ra Unidad

Funciones Algebraicas

1.2 Dominio de Polinomiales y Racionales

Cuando los pensamientos abruman nuestra mente es momento de tomar una pausa, respirar, y reformular ideas. Unos minutos para desconectarse resultan de provecho para volver renovados y listos.

Descripción



Cuando leemos «Zona restringida» sabemos que es un sector al que no tiene acceso todo el mundo, usualmente va acompañado de «solo personal autorizado». La primera frase nos indica una Restricción, un límite, una condición que establece lo que no podemos hacer o dónde no podemos entrar. La segunda frase nos indica qué personas pueden entrar, esto en matemática es conocido como Dominio. Conozcamos las restricciones y dominio de funciones Polinomiales y Racionales.

Conocimientos Previos Requeridos

Definición de Funciones, Dominio y Rango, Tabla de Valores, Gráfico de Funciones, Función Afín.

Contenido

Características y Dominio de Funciones Polinomiales y Racionales, Ejercicios Resueltos.

Videos Disponibles

FUNCIONES. Algebraicas. Polinomiales. Características, Dominio

FUNCIONES. Algebraicas. Racionales. Características, Dominio

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 1

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 2

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 3

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones. Poner al día esta información básica amerita por lo menos 2 encuentros, de manera que puedan desarrollarse prácticas guiadas con oportunidad de intercambiar y aclarar dudas.

Guiones Didácticos

FUNCIONES. Algebraica. Polinomiales. Característica, Dominio

Funciones Polinomiales. Son funciones algebraicas cuya estructura se corresponde con la de un polinomio, es decir, una suma algebraica de términos compuestos por un factor numérico, que es el coeficiente, y una potencia de x, donde los exponentes de x son números naturales.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

Características de las Funciones Polinomiales

Cualquiera sea el polinomio, la variable x está como base de potencias de exponente natural.	x^n , $n \in \mathbb{N}$
Y la **variable**, x, toma valores reales	$x \in \mathbb{R}$
Entonces, el resultado de estas potencias son números reales.	$x^n \in \mathbb{R}$
Los **coeficientes** son valores reales.	$a_n \in \mathbb{R}$
Entonces, el producto de los coeficientes y las potencias son números reales. Lo que significa que cada término del polinomio es un valor real.	$a_n x^n \in \mathbb{R}$
Finalmente, la suma de valores reales resulta un valor real, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $\quad P(x) \in \mathbb{R}$ entonces para valores reales de x los polinomios tienen imágenes reales. Si $x \in \mathbb{R}$ $\quad P(x) \in \mathbb{R}$	

De todo lo anterior se deduce que la variable puede tomar cualquier valor real, sin **restricción**.

Restricción. Son condiciones basadas en definiciones o propiedades matemática, y que limitan los valores que puede tomar una variable para que la función exista en los reales..

Dominio de las Funciones Polinomiales

En las primeras lecciones de funciones aprendimos que el **dominio** de una función **es el conjunto de valores reales de x para los que la función tiene imágenes reales**.

Para las **funciones Polinomiales**, todos los valores reales de la variable x tienen imágenes reales.

En las características de esta función vimos que **la variable puede tomar cualquier valor real**, sin restricción, por lo tanto **el dominio de las funciones Polinomiales es todos los reales**.

$$Dom_f = x \in \mathbb{R}$$

Funciones Polinomiales Notables

Las funciones Polinomiales notables son: función constante, se obtiene cuando todos los coeficientes son ceros excepto el término independiente.

Función Constante. Su imagen es la misma para cualquier valor de la variable. $f(x)=C$

Se obtiene cuando todos los coeficientes, excepto el término independiente, a_0, son ceros.

$$P(x)=\overset{0}{a_n}x^n+\overset{0}{a_{n-1}}x^{n-1}+\overset{0}{a_{n-2}}x^{n-1}+\cdots+\overset{0}{a_2}x^2+\overset{0}{a_1}x+a_0 \qquad a_0=C$$

Función Afín. Su imagen es un polinomio de grado 1, de forma $f(x) = mx + b$

Se trata de una función polinomial en la que todos los coeficientes son ceros excepto el del término de grado uno y el término independiente, el gráfico de esta función es una recta.

$$P(x)=\overset{0}{a_n}x^n+\overset{0}{a_{n-1}}x^{n-1}+\overset{0}{a_{n-2}}x^{n-1}+\cdots+\overset{0}{a_2}x^2+a_1x+a_0 \qquad a_1=m\ ,\ a_0=b$$

Te invito a revisar las lecciones de **Función Afín** para recordar. En la sección de videos disponibles, página 2, tienes acceso a ellos a través de los enlaces.

Función Cuadrática. Su imagen es un polinomio de grado 2, de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Se obtiene cuando son cero todos los coeficientes de las potencias de x, excepto los de x^2 , x y el término independiente.

$$P(x)=\overset{0}{a_n}x^n+\overset{0}{a_{n-1}}x^{n-1}+\overset{0}{a_{n-2}}x^{n-1}+\cdots+\overset{a}{a_2}x^2+\overset{b}{a_1}x+\overset{c}{a_0} \qquad a_2=a \quad a_1=b \quad a_0=c$$

Esta función es notable y se estudia de manera particular en la sección de **Función Cuadrática**, Matemática de 3er año, 3er Lapso.

FUNCIONES. Algebraica. Racionales. Característica, Dominio

Funciones Racionales. Son funciones algebraicas cuya estructura (imagen) es una fracción, con numerador función y denominador función, es decir, en el numerador hay una expresión que contiene variable y en el denominador hay expresión que contiene variable.

$$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

Características de las Funciones Polinomiales

Desde estudios básicos aprendimos que las fracciones tienen una **restricción** o limitante natural, y es que **no existe la división entre cero**, por lo que **el denominador de la fracción debe ser distinto de cero**.

$$\frac{a}{b}\ ,\quad b\neq 0$$

Ahora bien,

En la **función racional** el denominador es una expresión variable, representada aquí por q(x). Entonces **q(x) debe ser distinta de cero** para que la fracción pueda resultar valores reales.

$$\frac{p(x)}{q(x)} \rightarrow q(x) \neq 0$$

Dominio de las Funciones Polinomiales

Sabemos que **el dominio de una función es el conjunto de valores reales de x para los que la función tiene imágenes reales**.

Para las **funciones racionales**, **el dominio es el conjunto de todos los valores de la variable x tales que el denominador, q(x), sea distinto de cero**.

$$\mathrm{Dom}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, q(x) \neq 0\}$$

La definición de este conjunto dominio está basada en la restricción que presentamos en las características.

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 1

Hallar el dominio de la función: $f(x) = \dfrac{x+3}{x-7}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es una fracción que tiene como numerador un polinomio de grado 1 y como denominador un polinomio de grado 1.

$$f(x) = \frac{x+3}{x-7}$$

Polinomio de grado 1

Polinomio de grado 1

Toda vez que la imagen de una función sea una fracción que tenga variable en el denominador se trata de una **función racional**.

Funcional Racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

¿La función racional tiene restricción?

En la lección teórica de funciones racionales vimos que **el denominador de la fracción de una función racional debe ser distinto de cero**, porque **no existe la división entre cero**.

Restricción

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \longrightarrow q(x) \neq 0$$

Entonces x – 7 debe ser distinto de cero, por ser el denominador de la fracción de la función racional dada.

$$f(x) = \frac{x+3}{x-7} \longrightarrow x-7 \neq 0$$

Ahora debemos resolver la desigualdad, despejamos x.

$$x \neq 7$$

Sólo hay un número real que no se puede tomar, el 7. El dominio de esta función es:

Todos los valores reales menos el 7.

$$\mathrm{Dom}_f = \mathbb{R} - \{7\}$$

Nota: Para excluir un número real específico lo encerramos entre llaves, esto ocurre igual si se trata de dos o más números siempre que sean valores puntuales y no intervalos.

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 2

Hallar el dominio de la función: $f(x)=\dfrac{\sqrt{7}}{x^2-25}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de *f* es una fracción que tiene como numerador un número irracional, y como denominador un polinomio de grado 2.

$\dfrac{\sqrt{7}}{x^2-25}$ Número Irracional / Polinomio de grado 2

Toda vez que la imagen de una función sea una fracción que tenga variable en el denominador se trata de una **función racional**.

Funcional Racional

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

Para las **funciones racionales el denominador de la fracción debe ser distinto de cero**, porque no existe la división entre cero.

Restricción

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \rightarrow q(x)\neq 0$$

Entonces x^2 – 25 debe ser distinto de cero, por ser el denominador de la fracción de la función racional dada.

$$f(x)=\frac{\sqrt{7}}{x^2-25} \rightarrow x^2-25\neq 0$$

Ahora debemos resolver la desigualdad, pasamos 25, que está restando, sumando al otro lado de la desigualdad.

$$x^2\neq 25$$

Cuando estudiamos **Ecuaciones de segundo grado o cuadrática**, aprendimos que al despejar una incógnita con exponente par, debemos considerar el doble signo en la solución.

Al despejar x de esta desigualdad nos queda, x distinto de más o menos 5.

$$x\neq \pm 5$$

También podemos decir, x distinto de -5 y x distinto de 5.

$$x\neq -5 \qquad x\neq 5$$

¿Qué podemos concluir de la s relaciones obtenidas?.

Vemos que x debe ser distinta de -5 y 5 específicamente, así que puede tomar cualquiera de los demás valores reales.

Como **el dominio son todos los valores que puede tomar la variable x**, entonces el dominio de esta función es todos los valores reales menos más o menos 5.

$$\boxed{Dom_f=\mathbb{R}-\{\pm 5\}}$$

También podemos decir que el dominio es todos los reales menos el -5 y el 5.

$$\boxed{Dom_f=\mathbb{R}-\{-5\ ,\ 5\}}$$

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 3

Hallar el dominio de la función: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{3x+6}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es la suma de dos fracciones:
Una tiene como numerador un monomio de grado 1 y como denominador un binomio de grado 2,
Y la otra tiene como numerador un número y como denominador un polinomio de grado 1.

$\dfrac{x}{x^2+1}$ Monomio de grado 1 / Binomio de grado 2

$\dfrac{1}{3x+6}$ Número Real / Binomio de grado 1

Sabemos que si la imagen de la función contiene fracción con variable en el denominador se trata de una **función racional**.

¿La función racional tiene restricción?

El denominador de una fracción debe ser distinto de cero. En esta función tenemos dos denominadores, entonces:

$x^2+1 \neq 0 \qquad 3x+6 \neq 0$

Resolveremos cada desigualdad para obtener los valores que no se deben tomar:

1ra desigualdad, pasamos 1 restando al otro lado, en este punto obtenemos la solución por análisis de propiedades.

$x^2 \neq -1$

Recordemos. Toda potencia con exponente par resulta, positiva si la base es distinta de cero, y cero si la base es cero.

Es decir,
Si la base de la potencia es un número distinto de cero (negativo o positivo) el resultado da positivo.
Si la base de la potencia es cero, el resultado de la potencia es cero.

$\mathbf{x^2}$
Es positiva o cero

Si x^2 es positivo o cero, entonces es distinto de -1 para cualquier valor de x.

$x^2 \neq -1 \qquad x \in \mathbb{R}$

La desigualdad se cumple para todos los números reales. La solución de la 1ra desigualdad es todos los reales.

$\boxed{S_1 = x \in \mathbb{R}}$

2da desigualdad, pasamos 6 restando al otro lado, y luego el 3 dividiendo.

$3x+6 \neq 0$

$3x \neq -6 \qquad x \neq -\dfrac{6}{3}$

al simplificar esta fracción nos queda

$x \neq -2$

x puede tomar cualquier valor menos el -2.

$\boxed{S_2 = x \in \mathbb{R} - \{-2\}}$

El dominio son todos los valores que puede tomar la variable, x.
De la primera fracción sabemos que no hay restricción, x puede tomar cualquier valor real.

De la segunda fracción sabemos que x puede tomar cualquier valor real menos el -2, el dominio debe satisfacer ambas condiciones, entonces **el dominio es todos los valores reales menos el -2**.

Domf = **R** – {-2}

Emparejando el Lenguaje

Restricción: Son condiciones basadas en definiciones o propiedades matemáticas, que limitan los valores que puede tomar una variable para que la función exista en los reales.
Dominio de una Función: es el conjunto de valores reales de x para los que la función tiene imágenes reales.
Funciones Polinomiales. Son funciones algebraicas cuya estructura se corresponde con la de un polinomio.
Función Constante. Su imagen es la misma para cualquier valor de la variable, $f(x) = C$
Función Afín. Su imagen es un polinomio de grado 1, de forma: $f(x) = mx + b$
Función Cuadrática. Su imagen es un polinomio de grado 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Funciones Racionales. Son funciones algebraicas cuya estructura (imagen) es una fracción, con al menos denominador función.

Emparejando el Lenguaje

Hallar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\dfrac{\pi}{2x-1}$
2. $f(x)=\dfrac{4x+7}{x^4-16}$
3. $f(x)=\dfrac{-1}{x^3-7x+6}$
4. $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{x^3(x^2+5)}$

¿Lo Hicimos Bien?

Dominios

1. $Dom_f=R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$
2. $Dom_f=R-\{\pm 2\}$
3. $Dom_f=R-\{-3,1,2\}$
4. $Dom_f=R-\{0\}$