

## 5

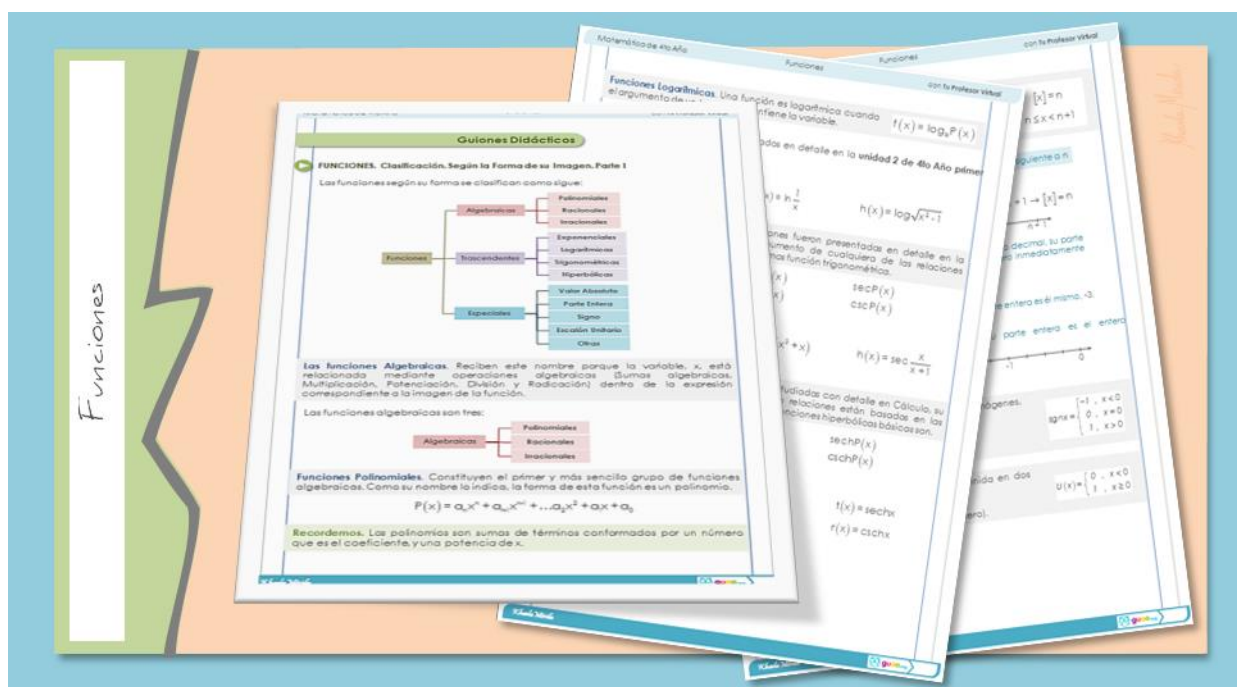
## 5ta Unidad

## Funciones

## 5.1 Clasificación Según la forma de su Imagen

Ser una persona sana no es ver solo paisajes bonitos, lo sano también está en ver que las hojas caen y estar listos para disfrutar el cambio de estación

## Descripción



Esta unidad está dedicada a completar la visión de las funciones. Ahora que hemos recorrido los distintos tipos de igualdades y relaciones, podemos ordenar la gran variedad de relaciones que satisfacen la definición de función, clasificándolas en tres grandes grupos, de acuerdo a la forma que adquiere su imagen. Veamos cuáles son.

## Conocimientos Previos Requeridos

Polinomios, Exponenciales, Logaritmo, Trigonometría.

## Contenido

Clasificación de Funciones, Clasificación de Funciones Según la Forma de su Imagen.

## Videos Disponibles

[FUNCIONES. Clasificación. Según la Forma de su Imagen. Parte I](#)

[FUNCIONES. Clasificación. Según la Forma de su Imagen. Trascendente](#)

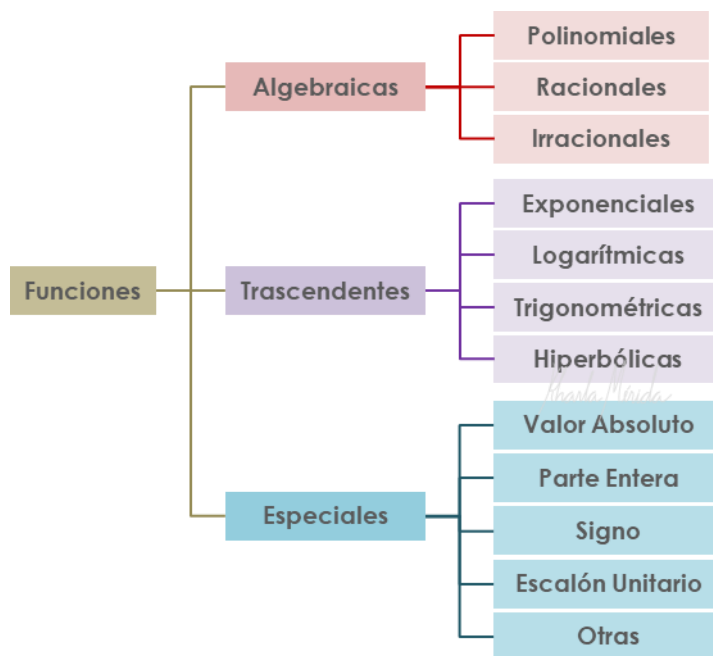
[FUNCIONES. Clasificación. Según la Forma de su Imagen. Especiales](#)

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

## Guiones Didácticos

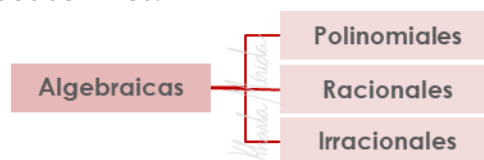
### ▶ FUNCIONES. Clasificación. Según la Forma de su Imagen. Parte I

Las funciones según su forma se clasifican como sigue:



**Las funciones Algebraicas.** Reciben este nombre porque la variable,  $x$ , está relacionada mediante operaciones algebraicas (Sumas algebraicas, Multiplicación, Potenciación, División y Radicación) dentro de la expresión correspondiente a la imagen de la función.

Las funciones algebraicas son tres:



**Funciones Polinomiales.** Constituyen el primer y más sencillo grupo de funciones algebraicas. Como su nombre lo indica, la forma de esta función es un polinomio.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

**Recordemos.** Los polinomios son sumas de términos conformados por un número que es el coeficiente, y una potencia de  $x$ .

**Ejemplos**

$$f(x) = -3x^5 - \frac{2}{\sqrt{5}}x^4 + \pi x^3 - x + 5$$

$$g(x) = x^7(9x - 2)^4$$

$$h(x) = 5x - 1$$

$$p(x) = \frac{1}{2}$$

**Observación.**

Tiene un coeficiente racional, pero no es función racional porque no hay variable,  $x$ , en el denominador de la fracción.

También tiene un coeficiente irracional,  $\pi$ , pero no es función irracional porque la variable no está dentro de una raíz.

**Las funciones racionales.** Son funciones con forma de racional, es decir, una fracción. Para que una función sea racional, debe tener variable en numerador y denominador, o cómo mínimo variable en el denominador.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

**Ejemplos**

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{-x + 5}$$

$$g(x) = \frac{x}{x + 2}$$

$$h(x) = \frac{2}{x^5 + 4x^3 + 1}$$

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

**Observación.** Las funciones  $h(x)$  y  $p(x)$  tienen no tienen variable en el numerador, pero por tener variable en el denominador son funciones racionales.

La función  $p$  es la forma más simple de una función racional.

**Las funciones irracionales.** Son funciones con forma de irracional, es decir, con presencia de raíz. Entonces, para que una función sea irracional, debe tener variable como cantidad sub radical.

$$F(x) = \sqrt[n]{G(x)}$$

**Ejemplos**

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$$

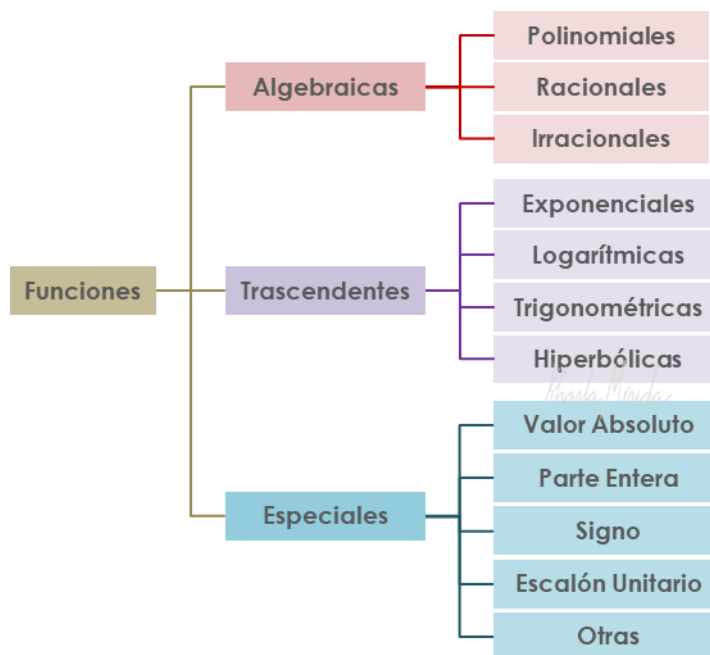
$$g(x) = \sqrt[4]{x + 1}$$

$$h(x) = \sqrt{x}$$

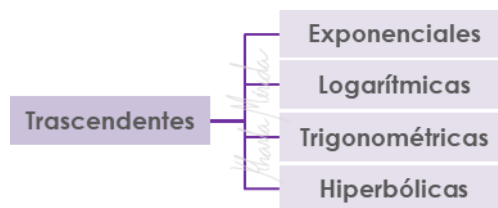
La función  $h$  tiene la forma más simple de una función irracional.

## ▶ FUNCIONES. Clasificación. Según la Forma de su Imagen. Trascendente

### Clasificación de las Funciones según la forma de su imagen



**Las funciones Trascendentes**, reciben este nombre porque la variable  $x$  está dentro de la expresión correspondiente a la imagen de la función relacionada mediante operadores no algebraicos.



**Las funciones Exponenciales.** Constituyen el primer grupo de funciones trascendentes. La forma de la función exponencial fue estudiada en la sección de Logaritmos y Exponenciales, es una potencia donde la base es un número conocido y el exponente es una expresión que contiene la variable, es decir, una función.

$$f(x) = a^{p(x)}$$

### Ejemplos

$$f(x) = 3^{x^2+1}$$

$$g(x) = \pi^{\sqrt{x}}$$

$\pi = 3,141592653589\dots$

$$h(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$e = 2,7182818284\dots$

$$p(x) = 10^{2x}$$

**Funciones Logarítmicas.** Una función es logarítmica cuando el argumento de un logaritmo contiene la variable.

$$f(x) = \log_b P(x)$$

**Nota:** Los logaritmos fueron presentados en detalle en la **unidad 2 de 4to Año primer lapso**.

### Ejemplos

$$f(x) = \log(x+3)$$

$$g(x) = \ln \frac{1}{x}$$

$$h(x) = \log \sqrt{x^2 - 1}$$

**Funciones trigonométricas,** estas funciones fueron presentadas en detalle en la sección Trigonometría, cuando el argumento de cualquiera de las relaciones trigonométricas contiene variable, tenemos función trigonométrica.

$$\text{sen}P(x)$$

$$\text{tg}P(x)$$

$$\text{sec}P(x)$$

$$\text{cos}P(x)$$

$$\text{ctg}P(x)$$

$$\text{csc}P(x)$$

### Ejemplos

$$f(x) = \text{sen} \sqrt{x+1}$$

$$g(x) = \text{cos}(x^3 + x)$$

$$h(x) = \text{sec} \frac{x}{x+1}$$

**Funciones Hiperbólicas,** estas funciones son estudiadas con detalle en Cálculo, su nombre se debe a que son funciones cuyas relaciones están basadas en las coordenadas de una hipérbola equilátera, las funciones hiperbólicas básicas son.

$$\text{senh}P(x)$$

$$\text{tgh}P(x)$$

$$\text{sech}P(x)$$

$$\text{cosh}P(x)$$

$$\text{ctgh}P(x)$$

$$\text{csch}P(x)$$

### Funciones Hiperbólicas Básicas:

$$f(x) = \text{senhx}$$

$$h(x) = \text{tghx}$$

$$t(x) = \text{sechx}$$

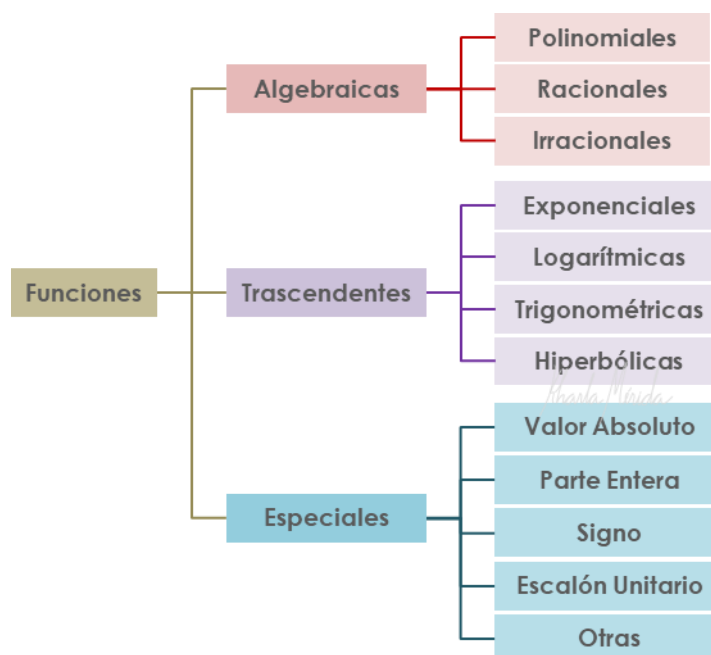
$$g(x) = \text{coshx}$$

$$p(x) = \text{ctghx}$$

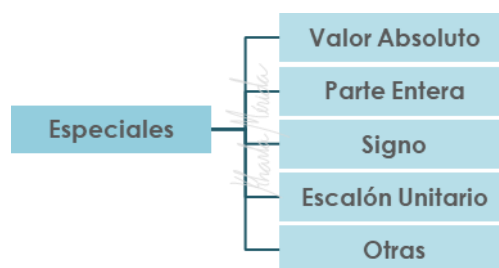
$$r(x) = \text{cschx}$$

## ▶ FUNCIONES. Clasificación. Según la Forma de su Imagen. Especiales

### Clasificación de las Funciones según la forma de su imagen



**Funciones Especiales.** Son funciones a trozos, es decir, funciones definidas de tal manera que cambian la forma de su imagen para intervalos o sectores distintos del Dominio.



**Función Valor Absoluto**, el valor absoluto de  $x$  es el opuesto de  $x$  si  $x$  es menor que cero, y es  $x$  si  $x$  es mayor o igual que cero.

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

También podemos decirlo, **valor absoluto de  $x$  es el opuesto de  $x$  si  $x$  es negativo, y es  $x$  si  $x$  es positivo o igual que cero.**

$$\text{Valor Absoluto de } x \begin{cases} -x, & \text{Si } x \text{ es negativa} \\ x, & \text{Si } x \text{ es positiva o cero} \end{cases}$$

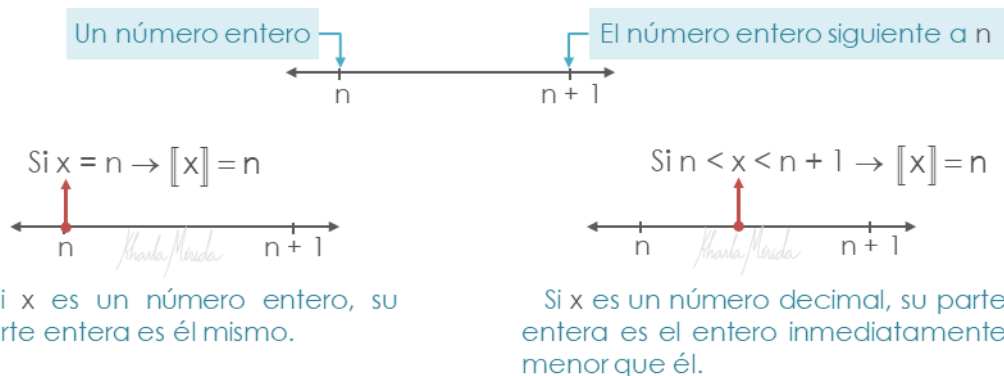
**Función Parte Entera.** Se define como **el mayor entero menor o igual que**.

Simbólicamente:

**Parte entera de  $x$  es igual a  $n$ , siempre que  $x$  sea mayor o igual a  $n$ , menor que  $n+1$ .**

$$x = n$$

$$n \leq x < n+1$$



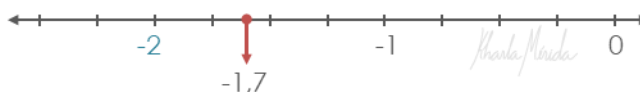
## Ejemplos

$$[-3] = -3$$

Como -3 es un número entero su parte entera es él mismo, -3.

$$[-1,7] = -2$$

-1,7 es un número decimal, su parte entera es el entero inmediatamente menor que él, -2.



**Función Signo.** Es una función definida con tres imágenes, de acuerdo al signo de su argumento:

- -1, si  $x$  es menor que cero (negativa)
- 0, si  $x$  es cero, y
- 1, si  $x$  es mayor que cero (positiva).

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

**Función Escalón Unitario.** Es una función definida en dos intervalos:

- 0, si  $x$  es menor que cero (negativa)
- 1, si  $x$  es mayor o igual que cero (positiva o cero).

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



## Emparejando el Lenguaje

**Funciones Algebraicas**, Reciben este nombre porque la variable  $x$  está dentro de la expresión correspondiente a la imagen de la función relacionada mediante operaciones algebraicas, a saber. Sumas algebraicas: Multiplicación, Potenciación, División y Radicación.

**Funciones Racionales**: Son funciones con forma de racional, es decir, una fracción, entonces, para que una función sea racional, debe tener variable en numerador y denominador, o cómo mínimo variable en el denominador.

**Funciones Irracionales**: Son funciones con forma de irracional, es decir, con presencia de raíz, entonces, para que una función sea irracional, debe tener variable como cantidad sub radical.

**Funciones Trascendentes**, Reciben este nombre porque la variable  $x$  está dentro de la expresión correspondiente a la imagen de la función relacionada mediante operadores no algebraicos.

**Funciones Exponenciales**, Constituyen el primer grupo de funciones trascendentes, la forma de la función exponencial fue estudiada en la sección de Logaritmos y Exponenciales, es una potencia donde la base es un número conocido y el exponente es una expresión que contiene la variable, es decir, una función.

**Funciones Logarítmicas**, Estas funciones fueron presentadas en detalle en la sección Logaritmo y Exponenciales, una función es logarítmica cuando el argumento contiene la variable, Algunos ejemplos de funciones logarítmicas son, logaritmo de  $x + 3$ , neperiano de 1 sobre  $x$ , logaritmo de raíz de  $x$  cuadrado  $- 1$ .

**Funciones trigonométricas**, Estas funciones fueron presentadas en detalle en la sección Trigonometría, cuando el argumento de cualquiera de las relaciones trigonométricas contiene variable, tenemos función trigonométrica. Algunos ejemplos de ellas son, seno de raíz de  $x + 1$ , coseno de  $x^3 + x$ , secante de  $x$  sobre  $x + 1$ .

**Funciones Hiperbólicas**, Estas funciones son estudiadas con detalle en Cálculo, su nombre se debe a que son funciones cuyas relaciones están basadas en las coordenadas de una hipérbola equilátera.

**Funciones Especiales**, Reciben este nombre porque la variable  $x$  está como argumento de funciones a trozos, es decir, funciones definidas de tal manera que cambian la forma de su imagen para intervalos o sectores distintos del Dominio.

**Función Parte Entera** : Se define como el mayor entero menor o igual que, simbólicamente parte entera de  $x$  es igual a  $n$ , siempre que  $x$  sea mayor o igual a  $n$ , menor que  $n+1$ , para ubicarnos un poco en la definición veamos unos ejemplos numéricos.

**Función Signo**: Es una función definida con tres imágenes, la imagen de la función signo de  $x$  es  $-1$ , si  $x$  es menor que cero, es decir, negativa, la imagen es cero si  $x$  es cero, y la imagen de la función signo de  $x$  es  $1$  si  $x$  es mayor que cero.

**Función Escalón Unitario**: Es una función definida en dos intervalos, la imagen de la función escalón unitario de  $x$  es cero, si  $x$  es menor que cero, es decir, negativa, y es  $1$  si  $x$  es mayor o igual que cero.

**Función Seno**: Es una de las funciones trigonométricas o circulares en la sección de trigonometría se estudiaron en detalle todas las relaciones trigonométricas sus definiciones, identidades y valores notables.

**A Practicar**

Describe la función identificando los tipos de funciones que la componen

1.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

2.  $g(x) = \frac{5x}{x^2 + 2x}$

3.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+10}}{x}$

4.  $h(x) = xe^x$

5.  $h(x) = \frac{7^x + 1}{7^x - 1}$

6.  $g(x) = 3^{\sqrt{x+10}} + 4$

7.  $f(x) = \text{sen}x + \text{cos}x$

8.  $g(x) = \sqrt{\text{sen}x}$

9.  $g(x) = 2^{\text{cos}x}$

## ¿Lo Hicimos Bien?

1. Es una fracción con un binomio cuadrado en el numerador y un número en el denominador. Esto es una función polinomial simple.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

2. Es una fracción con un monomio de grado 1 en el numerador y un binomio cuadrado en el denominador. Esto es una función racional.

$$g(x) = \frac{5x}{x^2 + 2x}$$

3. Es una fracción con una raíz en el numerador y un monomio en el denominador. Esto es una función racional compuesta con irracional.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+10}}{x}$$

4. Es el producto de un monomio por una exponencial sencilla. Se considera función exponencial.

$$h(x) = xe^x$$

5. Es una fracción con exponencial en el numerador y en el denominador. Es una función racional compuesta con exponencial.

$$h(x) = \frac{7^x + 1}{7^x - 1}$$

6. Es una exponencial con una raíz en el exponente. Es una función exponencial compuesta con irracional.

$$g(x) = 3^{\sqrt{x+10}} + 4$$

7. Es la suma de funciones seno y coseno. Es una función trigonométrica.

$$f(x) = \text{sen}x + \text{cos}x$$

8. Es la raíz de la función seno. Es una función irracional compuesta con trigonométrica.

$$g(x) = \sqrt{\text{sen}x}$$

9. Es una exponencial con función coseno en el exponente. Es una función exponencial compuesta con trigonométrica.

$$g(x) = 2^{\text{cos}x}$$