7

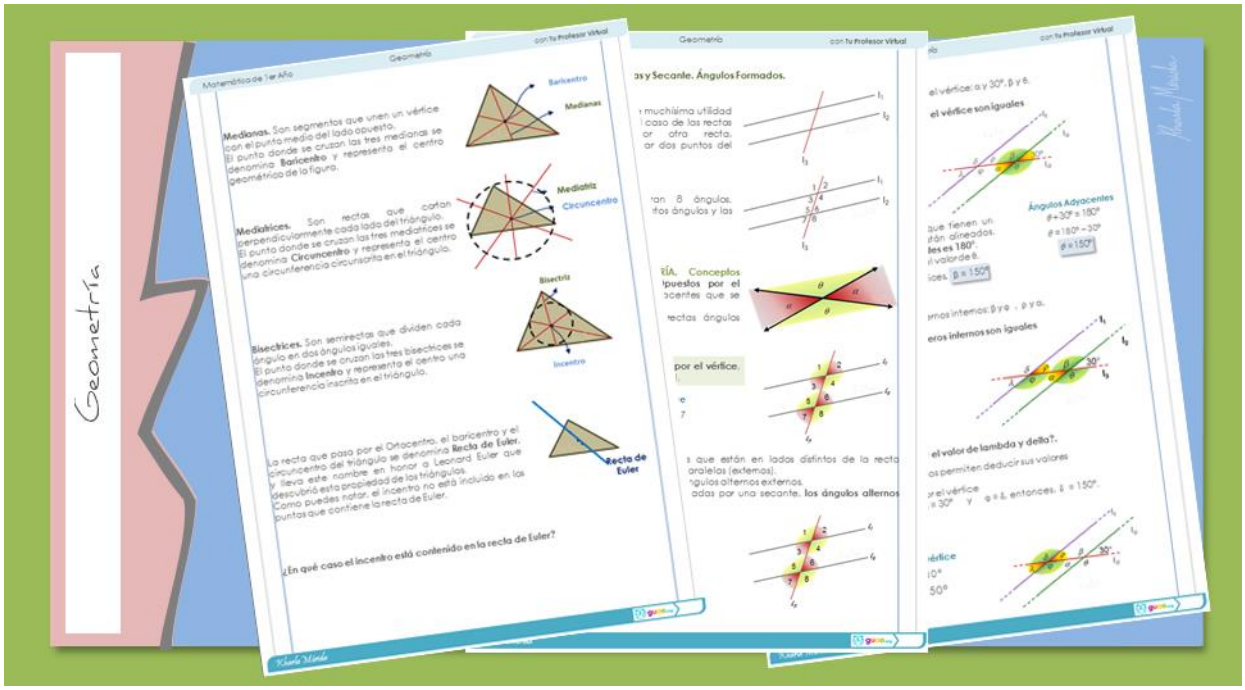
7ma Unidad

Geometría

7.2 Tipos de Rectas y Ángulos Formados por Sistema de Rectas.

Aprender, Accionar, Reflexionar, Mejorar, Accionar, Reflexionar… El proceso evolutivo es vida, es crecimiento, es felicidad.

Descripción



En este objetivo centramos la atención en las rectas y sus derivados, semirrectas y segmentos, los tipos de rectas de acuerdo a su posición relativa a otras rectas o a otras figuras, así como los ángulos generados por grupos notables de rectas. Esto es de gran importancia por su aplicación al estudio de la mecánica clásica en Física, de ahí el valor de manejar con solvencia este conocimiento.

Conocimientos Previos Requeridos

Conceptos Primitivos, Líneas, Rectas, Plano, Ángulos, Medidas y Tipos.

Contenido

Rectas, Tipos, Rectas Paralelas y Secante, Ángulos Formados, Ejercicios.

Videos Disponibles

GEOMETRÍA. Rectas. Tipos

GEOMETRÍA. Rectas Paralelas y Secante. Ángulos Formados

GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicio 1, 2, 3

GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicio 4

GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicio 5

GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicio 6 y 7

GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicio 8

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

GEOMETRÍA. Rectas. Tipos

En esta lección conoceremos grupos de rectas notables, que son de gran valor para el estudio de geometría y para las aplicaciones a la física y otras áreas del conocimiento.

Existe gran variedad de relaciones entre elementos geométricos que involucran rectas, algunas de estas relaciones son:

- Relación entre dos o más rectas.
- Relación entre Recta y circunferencia.
- Relación entre Recta y Triángulo

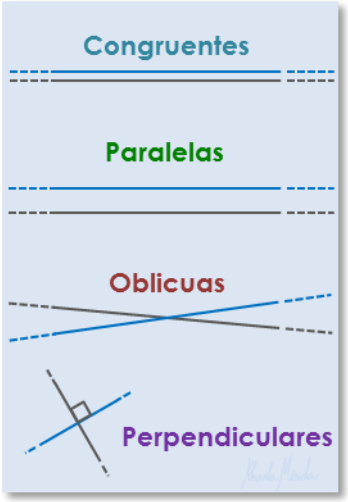
Tipos de rectas según la relación posicional entre dos o más de ellas.

Rectas Congruentes. Son rectas que están superpuestas, es decir, una sobre la otra.

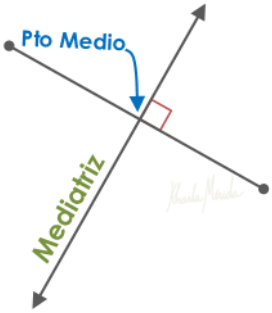
Rectas Paralelas. Son rectas que están una al lado de la otra, de tal forma que nunca se cruzan.

Rectas Oblicuas. Son rectas que se cortan formando ángulos no rectos.

Rectas Perpendiculares. Son rectas que se cortan formando ángulos rectos.



Mediatriz. Recta que corta a un segmento en su punto medio. Esta recta es de gran utilidad en geometría.



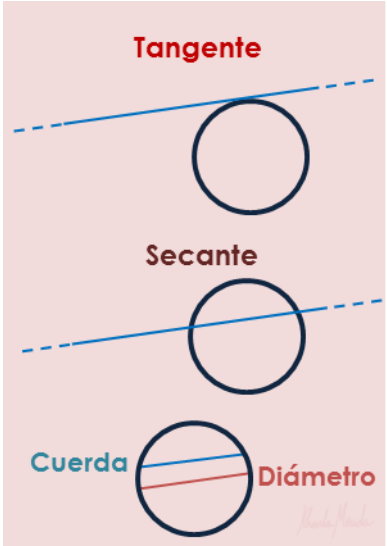
Rectas y segmentos según la relación posicional respecto a una circunferencia.

Recta Tangente. Toda recta que toca un punto de una circunferencia.

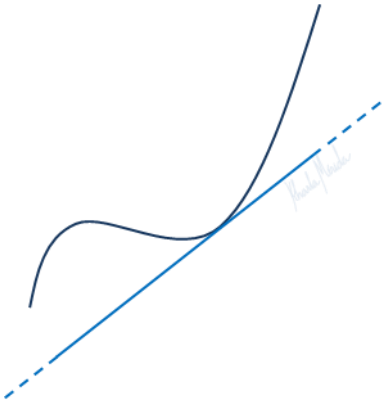
Recta Secante. Toda recta que toca dos puntos de una circunferencia.

Cuerda. Segmento de recta comprendido entre los dos puntos de corte de una secante.

Diámetro. Es la cuerda mayor de una circunferencia.



En general,
Toda recta que toca rasante una curva se denomina recta tangente.



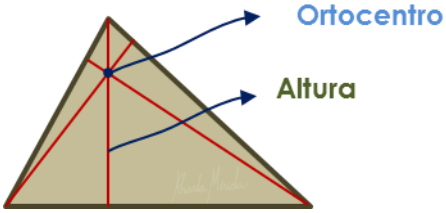
Rectas y segmentos según la relación posicional respecto a un triángulo.

Relacionados con Triángulos tenemos:

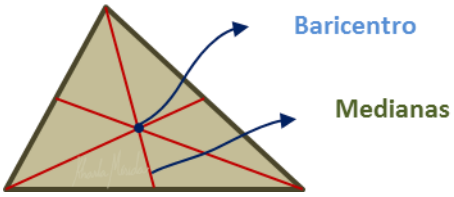
- 2 segmentos,
- 1 semirecta y
- 2 rectas notables.

Consideremos un triangulo escaleno, por ser el más genérico.

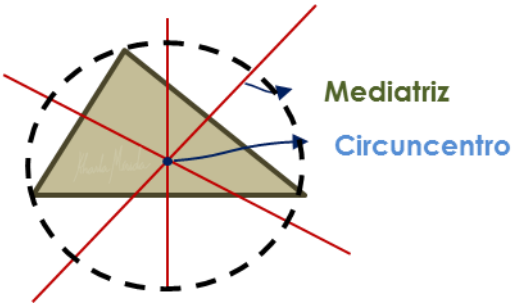
Altura. Son segmentos que van desde un vértice perpendicularmente hasta el lado opuesto, o su extensión. Como son tres lados, son tres alturas.
El punto donde se cruzan las tres alturas se denomina **Ortocentro**.



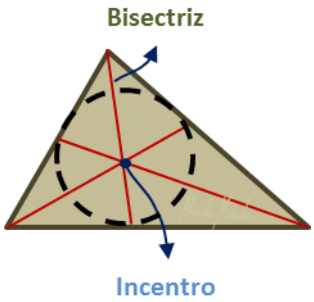
Medianas. Son segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.
El punto donde se cruzan las tres medianas se denomina **Baricentro** y representa el centro geométrico de la figura.



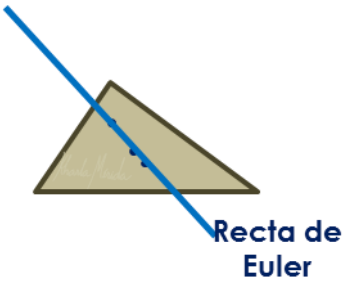
Mediatrices. Son rectas que cortan perpendicularmente cada lado del triángulo.
El punto donde se cruzan las tres mediatrices se denomina **Circuncentro** y representa el centro una circunferencia circunscrita en el triángulo.



Bisectrices. Son semirectas que dividen cada ángulo en dos ángulos iguales.
El punto donde se cruzan las tres bisectrices se denomina **Incentro** y representa el centro una circunferencia inscrita en el triángulo.



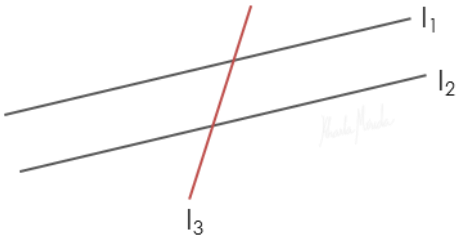
La recta que pasa por el Ortocentro, el baricentro y el circuncentro del triángulo se denomina **Recta de Euler**, y lleva este nombre en honor a Leonard Euler que descubrió esta propiedad de los triángulos.
Como puedes notar, el incentro no está incluido en los puntos que contiene la recta de Euler.



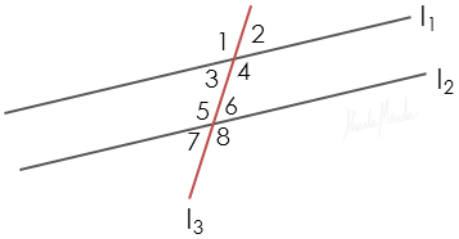
¿En qué caso el incentro está contenido en la recta de Euler?

GEOMETRÍA. Rectas Paralelas y Secante. Ángulos Formados

Una situación geométrica de muchísima utilidad y aplicabilidad a la física es el caso de las rectas paralelas intersectadas por otra recta, denominada secante por tocar dos puntos del sistema.

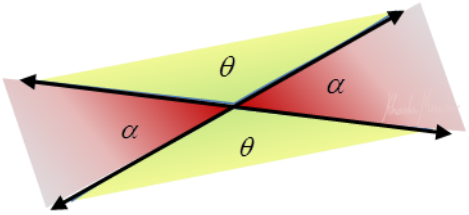


En este sistema se generan 8 ángulos. Conozcamos la relación entre estos ángulos y las propiedades asociadas a ellos.

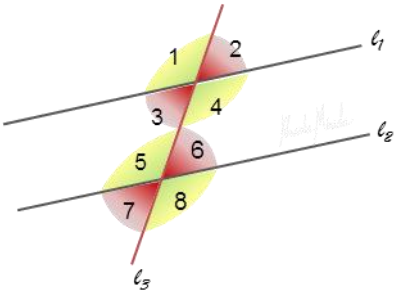


En el objetivo **7.1 GEOMETRÍA. Conceptos Primitivos**, conocimos **Ángulos Opuestos por el vértice**, que son ángulos no adyacentes que se obtienen del corte entre dos rectas.

Observas en este sistema de rectas ángulos opuestos por el vértice.



Recordemos. Los **Ángulos Opuestos por el vértice**, tienen la misma medida (son iguales).



Ángulos Opuestos por el Vértice

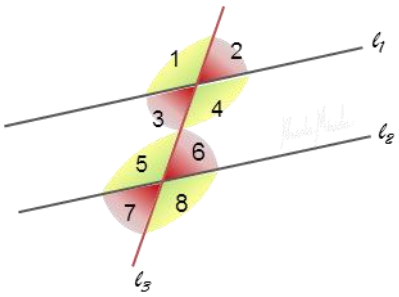
1 y 4 2 y 3 5 y 8 6 y 7

Son pares de ángulos iguales

Ángulos Alternos Externos. Son ángulos que están en lados distintos de la recta secante (alternos) y fuera de las rectas paralelas (externos).

Los pares de ángulos 1 y 8, y 2 y 7 son ángulos alternos externos.

En un sistema de rectas paralelas cortadas por una secante, **los ángulos alternos externos son iguales**.



Ángulos Alternos Externos

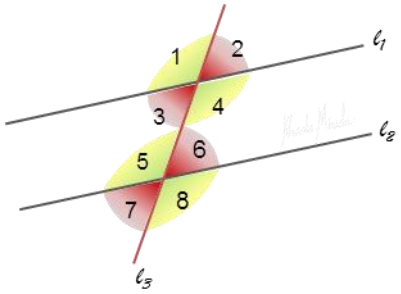
1 y 8 2 y 7

Son pares de ángulos iguales

Ángulos Alternos Internos. Son ángulos que están en lados distintos de la recta secante (alternos) y entre las rectas paralelas (externos).

Los pares de ángulos 1 y 8, y 2 y 7 son ángulos alternos externos.

En un sistema de rectas paralelas cortadas por una secante, **los ángulos alternos externos son iguales**.



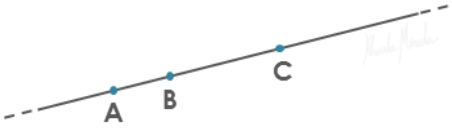
Ángulos Alternos Internos

3 y 6 4 y 5

Son pares de ángulos iguales

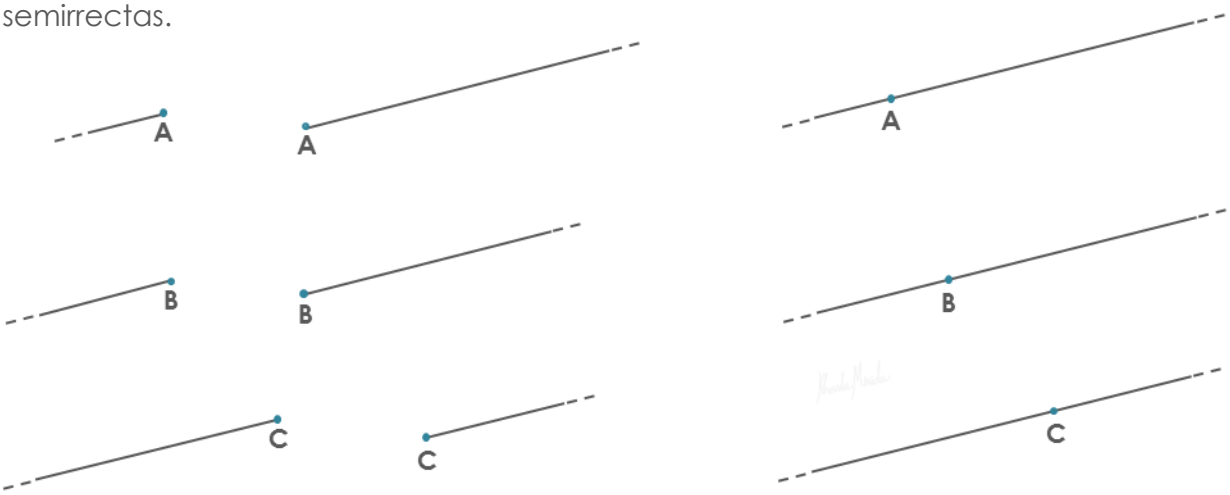
GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicios 1, 2, 3.

En la siguiente figura, indica cuantas Rectas, Semirrectas y Segmentos se tienen



Observación. Tenemos una recta, con tres puntos indicados.

Cada punto divide la recta en dos y se generan dos semirrectas.

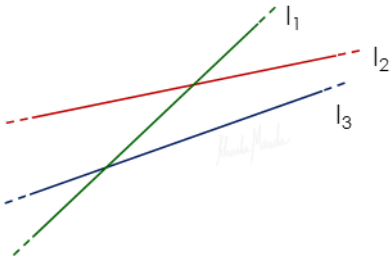


Como son tres puntos, se generan 6 semirrectas.

Por lo que toca a segmentos tenemos los segmentos AB, BC, y AC tres segmentos entonces tenemos en la figura una recta, 6 semirrectas y tres segmentos.

En la siguiente figura, indica:

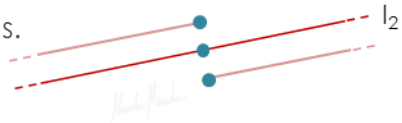
- ¿Qué tipo de rectas son?
- ¿Cuántas semirrectas se han formado?
- ¿Cuántos segmentos se han formado?
- ¿cuántos ángulos se han formado?



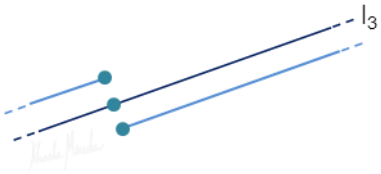
Tenemos

- 3 rectas oblicuas.

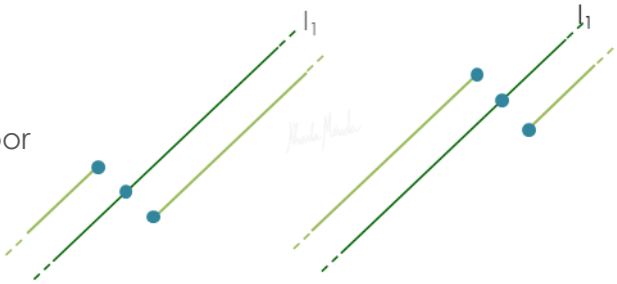
Cada punto de corte divide cada recta en dos semirrectas.



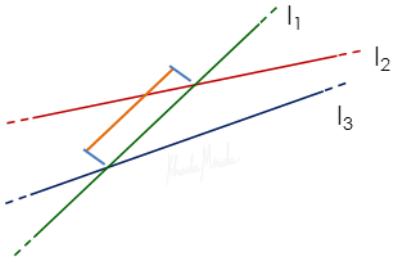
- De la recta 2 salen 2 semirrectas.



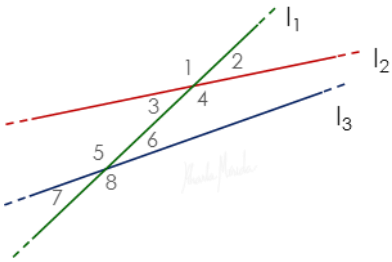
- De la 3 también salen dos semirrectas.



- De la recta 1 salen 4 semirrectas, dos por cada corte.



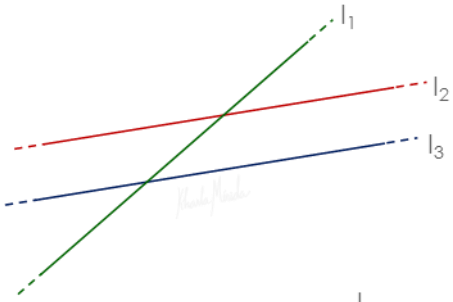
- 1 segmento. Se genera por los cortes de las rectas 2 y 3 en la recta 1.



- 8 ángulos.

En la siguiente figura, indica:

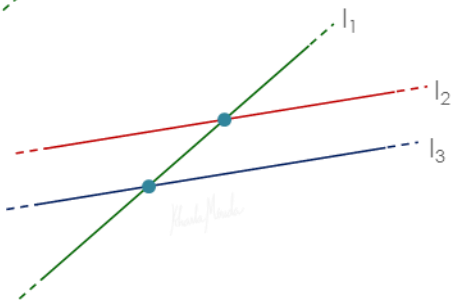
- ¿Qué tipo de rectas son?
- ¿Cuántas semirrectas se han formado?
- ¿Cuántos segmentos se han formado?
- ¿Cuántos ángulos se han formado?



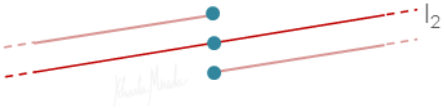
Tenemos

- 3 rectas: 2 paralelas y 1 secante.

Cada punto de corte divide cada recta en dos semirrectas.

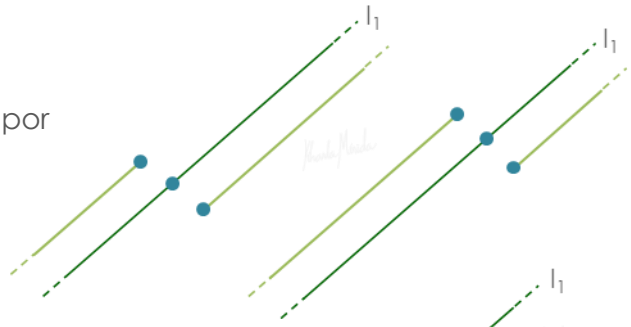


- De la recta l_2 salen 2 semirrectas.

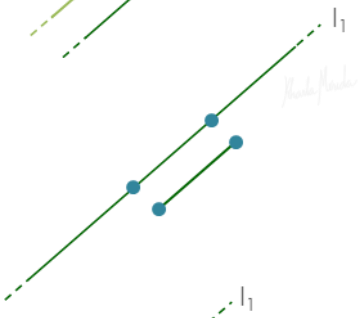


- De la l_3 también salen dos semirrectas.

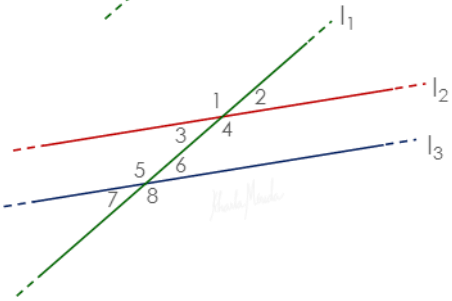
- De la recta l_1 salen 4 semirrectas, dos por cada corte.



- 1 segmento. Se genera por los cortes de las rectas 2 y 3 en la recta 1.



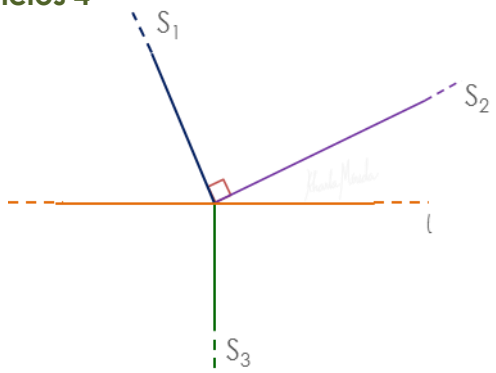
- 8 ángulos.



GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicios 4

En la siguiente figura, indica:

- ¿Cuáles son los ángulos agudos?
- ¿Cuáles son los ángulos obtusos?
- ¿Cuáles son los ángulos rectos?
- ¿Hay ángulos opuestos por el vértice?



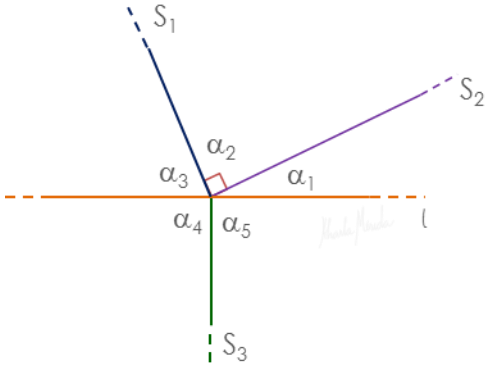
1ro. Asignamos la denominación a cada ángulo

El ángulo formado por la recta l y la semirrecta S_2 es α_1.

El ángulo formado por la semirrecta S_2 y la semirrecta S_1 es α_2.

El ángulo formado por la semirrecta S_1 y la recta l es α_3.

Los ángulos formados por la recta l y la semirrecta S_3 son α_4 y α_5.



Sabemos que ángulos agudos, son los que miden menos de 90°. Los ángulos α_1 y α_3 son menores de 90°, por lo tanto son agudos.

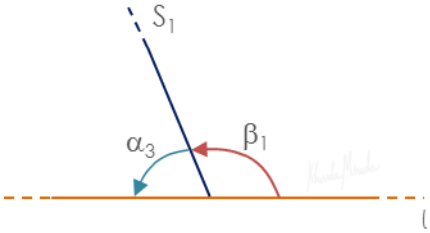
Ángulos Agudos

α_1 y α_3

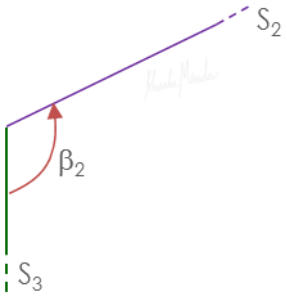
Sabemos que ángulos obtusos, son los que miden más de 90° y menos de 180°

¿Hay en esta representación pares de rectas o semirrectas que formen ángulos obtusos?

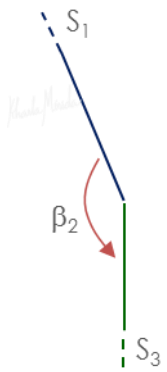
S_1 y l forman dos ángulos, uno es el que ya indicamos como α_3, otro es el adyacente a él, que indicaremos ahora como β_1. Este ángulo es mayor de 90° por lo tanto es obtuso.



S_2 y S_3 forma un ángulo que denominaremos β_2, mayor de 90°, por lo que se trata de un ángulo obtuso.

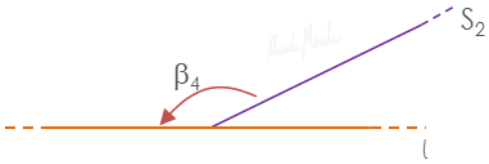


S_1 y S_3 forman un ángulo, β_3, mayor de 90°, por lo tanto es obtuso.



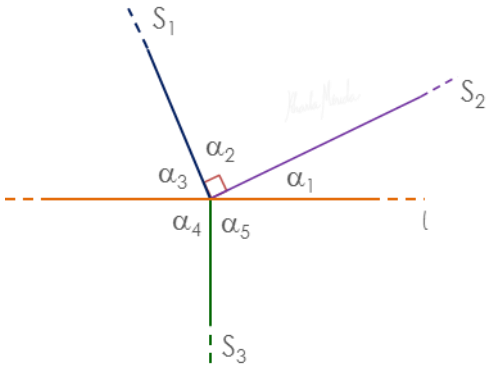
¿ves otro ángulo obtuso en la representación?.

S_2 y l forman un ángulo, β_4, mayor de 90°, así que tenemos allí otro ángulo obtuso



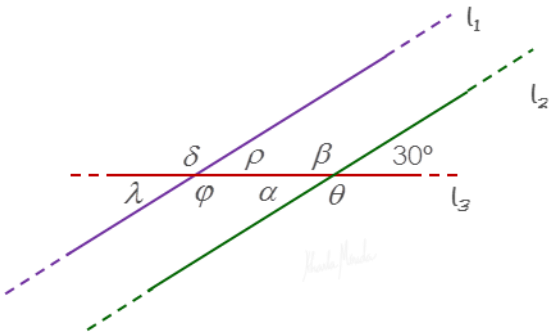
Por lo que toca a los **ángulos rectos** (ángulos de 90°) vemos que la recta l es horizontal y la semirrecta s3 es vertical, esto significa que son perpendiculares, forman ángulos de 90°.

Entonces α_4 y α_5 son ángulos rectos y el ángulo α_2, que tiene un cuadradito indicativo de ángulo recto.



GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicios 5.

Dado el ángulo indicado en la figura, determine el valor de los restantes ángulos.

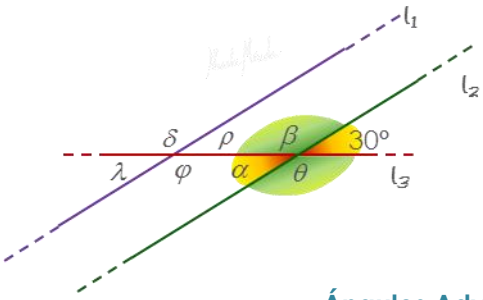


Rectas l_2 y l_3 :

Forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice: α y 30°, β y θ.
Sabemos que:

los ángulos opuestos por el vértice son iguales

Entonces $\alpha = 30°$



Ángulos opuestos por el vértice

α y 30° $\quad$ β y θ

$\alpha = 30°$ $\quad$ $\beta = \theta$

θ y 30° son ángulos adyacentes, porque tienen un lado común, y los lados no comunes están alineados. Sabemos que **la suma ángulos adyacentes es 180°**.

Resolviendo la ecuación obtenemos el valor de θ.

Ángulos Adyacentes

$\theta + 30° = 180°$

$\theta = 180° - 30°$

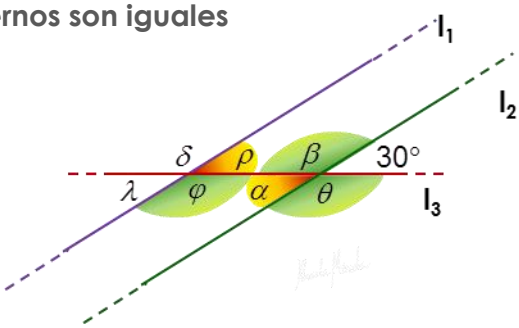
$\theta = 150°$

Como $\beta = \theta$, por ser opuestos por el vértices, $\beta = 150°$

Ahora, tenemos que son ángulos alternos internos: β y φ , ρ y α.
sabemos que:

los ángulos alteros internos son iguales

Entonces $\varphi = \beta = 150°$, y $\rho = \alpha = 30°$.



Ángulos Alternos Internos

β y φ $\quad$ ρ y α

$\beta = \varphi$ $\quad$ $\alpha = \rho$

$\varphi = 150°$ $\quad$ $\rho = 30°$

¿Qué propiedad nos permite saber el valor de lambda y delta?.

Existen varias propiedades que nos permiten deducir sus valores

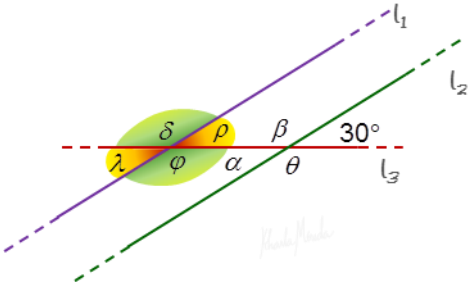
Una opción. Ángulos Opuestos por el vértice

$\rho = \lambda$, entonces, $\lambda = 30°$ y $\varphi = \delta$, entonces, $\delta = 150°$.

Ángulos opuestos por el vértice

$\rho = \lambda$ $\quad$ $\lambda = 30°$

$\varphi = \delta$ $\quad$ $\delta = 150°$



Una opción. Ángulos Opuestos por el vértice

$\rho = \lambda$, entonces, $\lambda = 30°$ y $\varphi = \delta$, entonces, $\delta = 150°$.

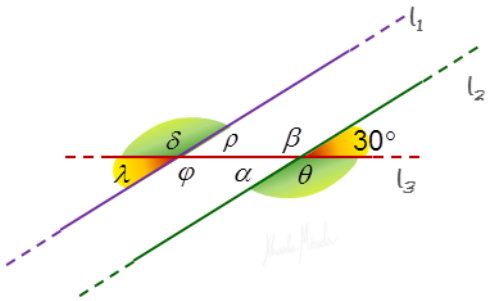
Otra opción. Ángulos Alternos Externos

$\lambda = 30°$, por ser alternos externos y $\delta = \theta = 150°$.

Ángulos Alternos Externos

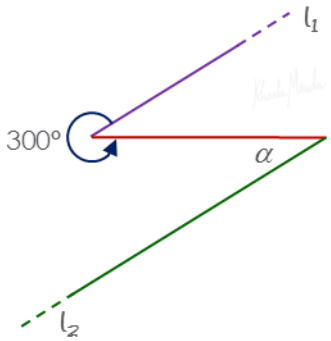
$\lambda = 30°$

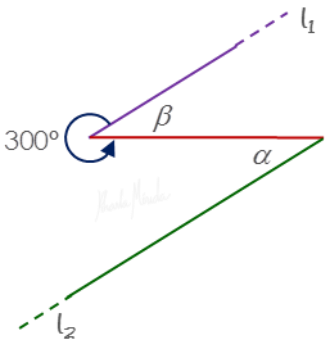
$\delta = \theta \qquad \delta = 150°$



GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicios 6 y 7

Hallar el valor de alfa, sabiendo que $l_1 \parallel l_2$.





Designamos con β el ángulo formado por la horizontal roja y l_1.

Observamos que este ángulo agregado a los 300° alcanza 360°, un ángulo completo.

Entonces, $\beta + 300° = 360°$

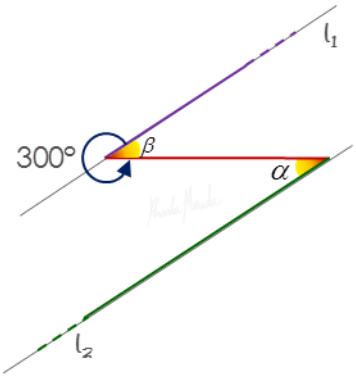
Despejamos y obtenemos $\boxed{\beta = 60°}$

Sabemos que l_1 y l_2 son paralelas, entonces el segmento horizontal rojo, es parte de una recta secante a las paralelas.

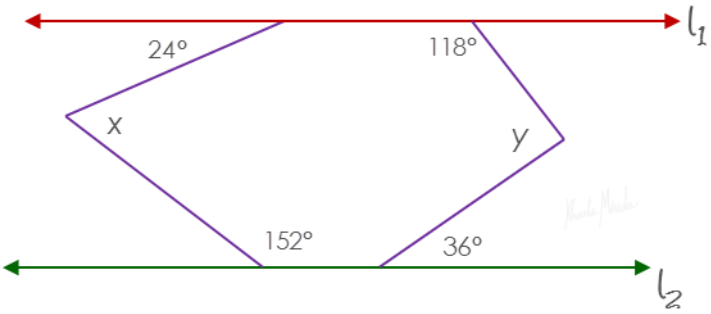
En este caso, β y α son ángulos alternos internos por lo que son iguales y alfa vale también 60°

$\alpha = \beta$

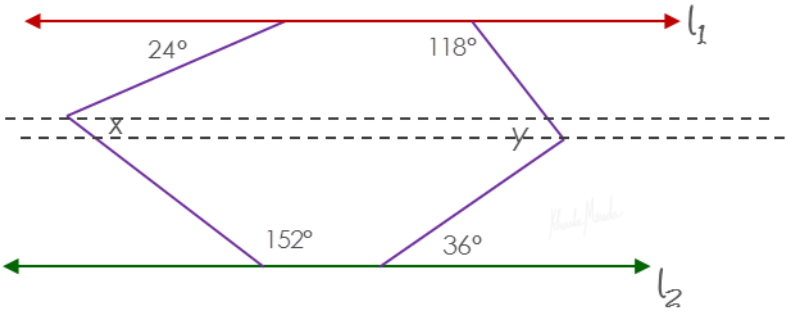
$\alpha = 60°$



Hallar el valor de x + y, sabiendo que $l_1 \parallel l_2$.



Haremos uso de un artificio geométrico, trazamos una recta imaginaria paralela a l_1 y l_2 que pase por el vértice de x, y una recta imaginaria paralela a l_1 y l_2 que pase por el vértice de y.

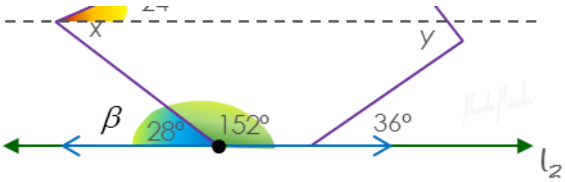


Respecto a la 1ra línea imaginaria tenemos que:

El ángulo de la línea imaginaria que pasa por x con la secante que corta a l_1 es 24°, por ser alterna interna con 24° dado.

β es adyacente con 152, porque tienen un lado y vértice común, y los lados no comunes están alineados.

La suma de ellos da 180°, despejando conseguimos que vale 28°.



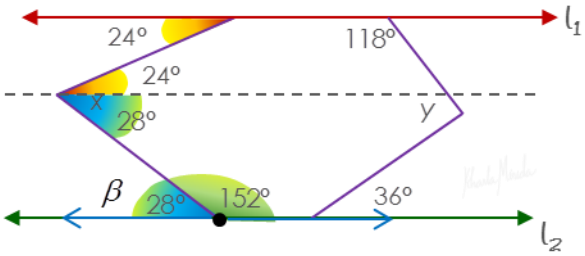
$$\beta + 152° = 180°$$

$$\beta = 180° - 152°$$

$$\beta = 28°$$

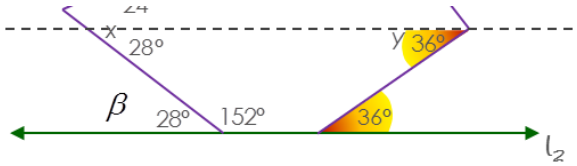
β es alterno interno con el ángulo consecutivo a 24°, por tanto son iguales, el consecutivo de 24° vale 28°.
El ángulo x es la suma de 24° y 28°

x = 24° + 28°, entonces **x = 52°**



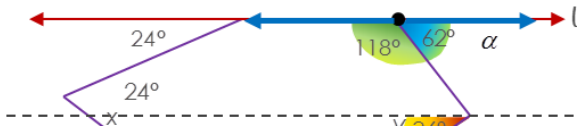
Respecto a la 2da línea imaginaria

La 2da horizontal imaginaria y l_2 son paralelas, entonces el ángulo en el vértice y es alterno interno con 36° y por eso también vale 36°.



α es adyacente a 118°, porque tienen un lado y vértice común y los lados no comunes están alineados. Entonces la suma de ellos da 180°.

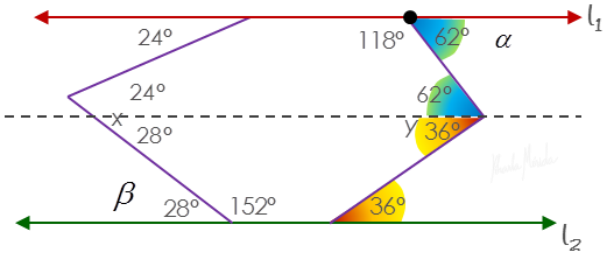
118° + α = 180° ⇒ α = 62°



α y al ángulo del vértice y son alternos internos, por tanto son iguales. Así que también vale 62°.
y es la suma de 62° y 36°, y = 98°

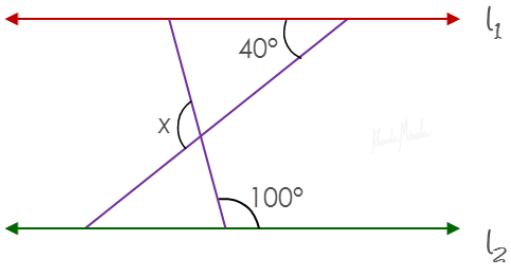
Finalmente x + y = 52° + 98°

x + y = 150°

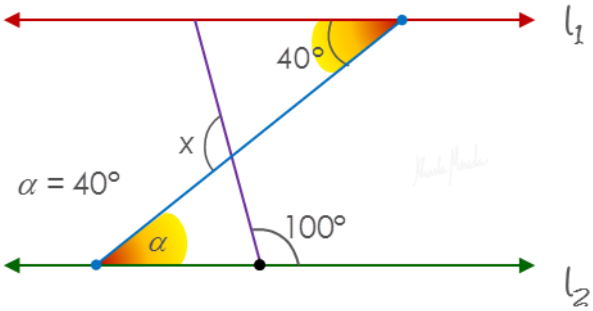


GEOMETRÍA. Rectas, Semirrectas, Segmentos. Ejercicios 8

Hallar el valor de x, sabiendo que $l_1 \parallel l_2$

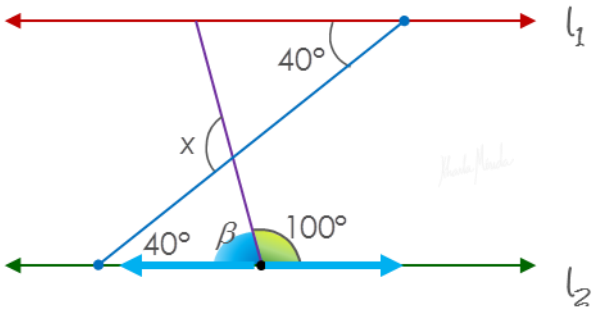


Resaltamos en azul uno de los segmentos secantes a l_1 y l_2, para visualizar mas claro que 40° y α son ángulos alternos internos, y por lo tanto son iguales, $\alpha = 40°$.



Por otra parte, β y 100° son adyacentes, por tener un lado y vértice común, y los lados no comunes alineados. Entonces,

$$\beta + 100° = 180°$$
$$\beta = 80°$$

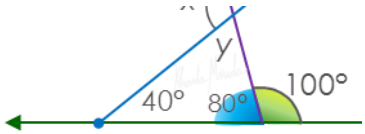


Sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

En el triángulo inferior conocemos dos ángulos, entonces

$$40° + 80° + y = 180°$$

Despejando, $y = 60°$



Si extraemos los segmentos podemos ver que generan dos pares de ángulos opuestos por el vértice.

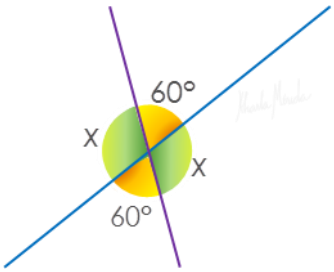
Sabemos que el ángulo inferior vale 60°, entonces el ángulo superior vale 60° también.

Los ángulos laterales son x, la suma de todos los ángulos formados por las dos rectas es un ángulo completo.

$$2 \cdot 60° + 2x = 360°$$

Despejamos x:

$$x = 120°$$

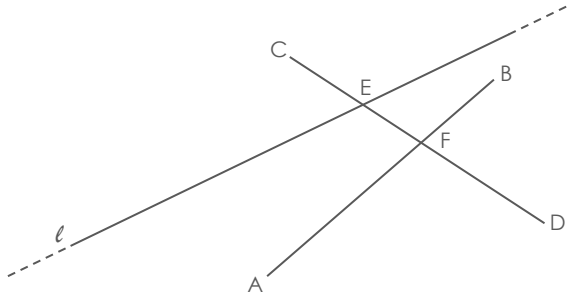


Repaso y Reflexión

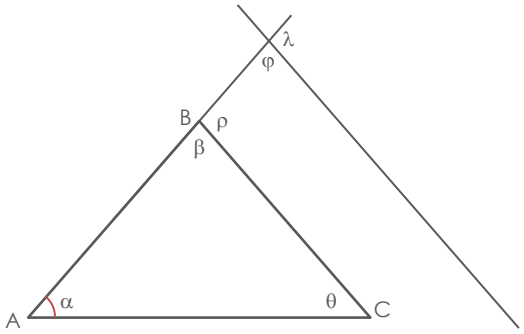
1. ¿Cómo se clasifican las rectas según la posición relativa entre ellas?
   Congruentes. O superpuestas, son rectas ubicadas una sobre la otra.
   Paralelas. Son rectas que están una al lado de la otra, nunca se cruzan.
   Oblicuas. Son rectas que se cruzan formando ángulos no rectos.
   Perpendiculares. Son rectas que se cruzan formando ángulos no rectos.
   Mediatriz. Es una recta que corta un segmento en su punto medio perpendicularmente.
2. ¿Cuáles son las rectas y segmentos notables de una circunferencia?
   Tangentes. Son rectas que tocan un punto de la circunferencia sin cortarla.
   Secantes. Son rectas que tocan dos puntos de la circunferencia.
   Cuerdas. Son segmentos que unen dos puntos de la circunferencia.
   Diámetro. Es la cuerda de circunferencia que pasa por el centro. Es la cuerda más larga.
3. ¿Cuáles son las rectas y segmentos notables de un triángulo?
   Altura. Son segmentos que van de un vértice, perpendicularmente, hasta el lado opuesto o su prolongación.
   Mediana. Son segmentos que van desde un vértice al punto medio del lado opuesto.
   Mediatriz. Son rectas que cortan los lados de un triángulo, perpendicularmente en su punto medio.
   Bisectriz. Son rectas que pasan por los vértices de un triángulo, bisecando el ángulo (dividiéndolo en dos ángulos iguales).
4. ¿Cuáles son los puntos notables de un triángulo?
   Ortocentro. Es el punto de intersección de las Alturas.
   Baricentro. Es el punto de intersección de las Medianas.
   Circuncentro. Es el punto de intersección de las Mediatrices.
   Incentro. Es el punto de intersección de las Bisectrices.
5. ¿Cuál es la recta de Euler?
   Es la recta que pasa por el ortocentro, baricentro y circuncentro del triángulo.
6. ¿Qué son ángulos alternos?
   Son ángulos que se encuentran en lados distintos de una recta secante a dos paralelas.
7. ¿Qué son ángulos internos?
   Son los ángulos que se encuentran entre las rectas paralelas.
8. ¿Qué son ángulos externos?
   Son los ángulos que se encuentran fuera de las rectas paralelas.

A Practicar

1. Identifica las rectas, semirrectas y segmentos del sistema

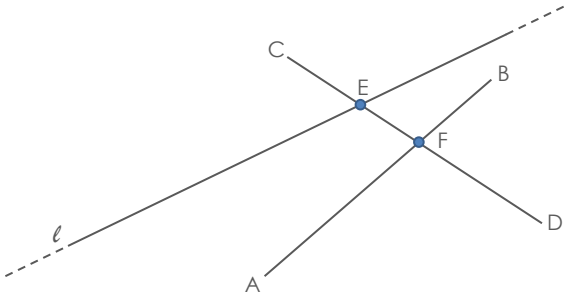


2. Identifica los ángulos de igual medida y la relación entre los distintos ángulos indicados. El triángulo ABC es isósceles, con AB = BC.

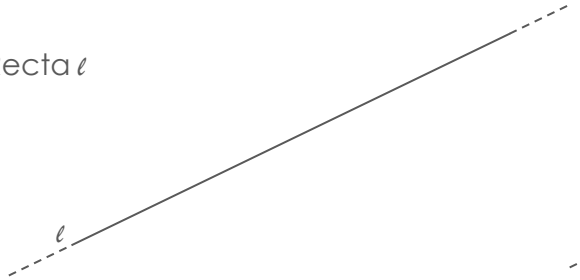


¿Lo Hicimos Bien?

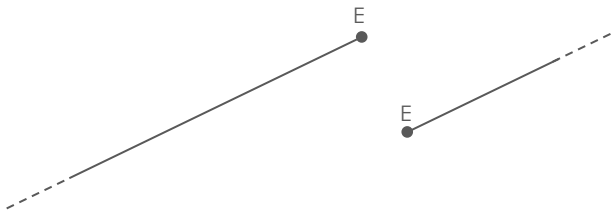
1. Identifica las rectas, semirrectas y segmentos del sistema



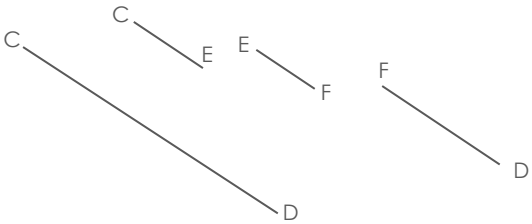
Recta ℓ

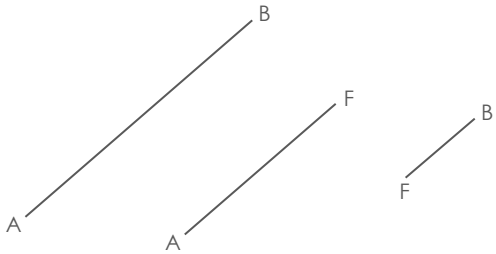


Semirrectas

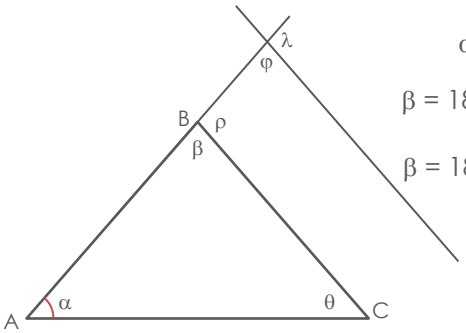


Segmentos





2. Identifica los ángulos de igual medida y la relación entre los distintos ángulos indicados. El triángulo ABC es isósceles, con AB = BC.



$\alpha = \theta$	Son los dos ángulos iguales del triángulo isósceles
$\beta = 180° - 2\alpha$	De la suma de los ángulos internos de un triángulo
$\beta = 180° - \rho$	β y ρ son ángulos suplementarios
$\beta = \varphi$	β y φ son ángulos congruentes
$\rho = \lambda$	ρ y λ son ángulos congruentes