

5

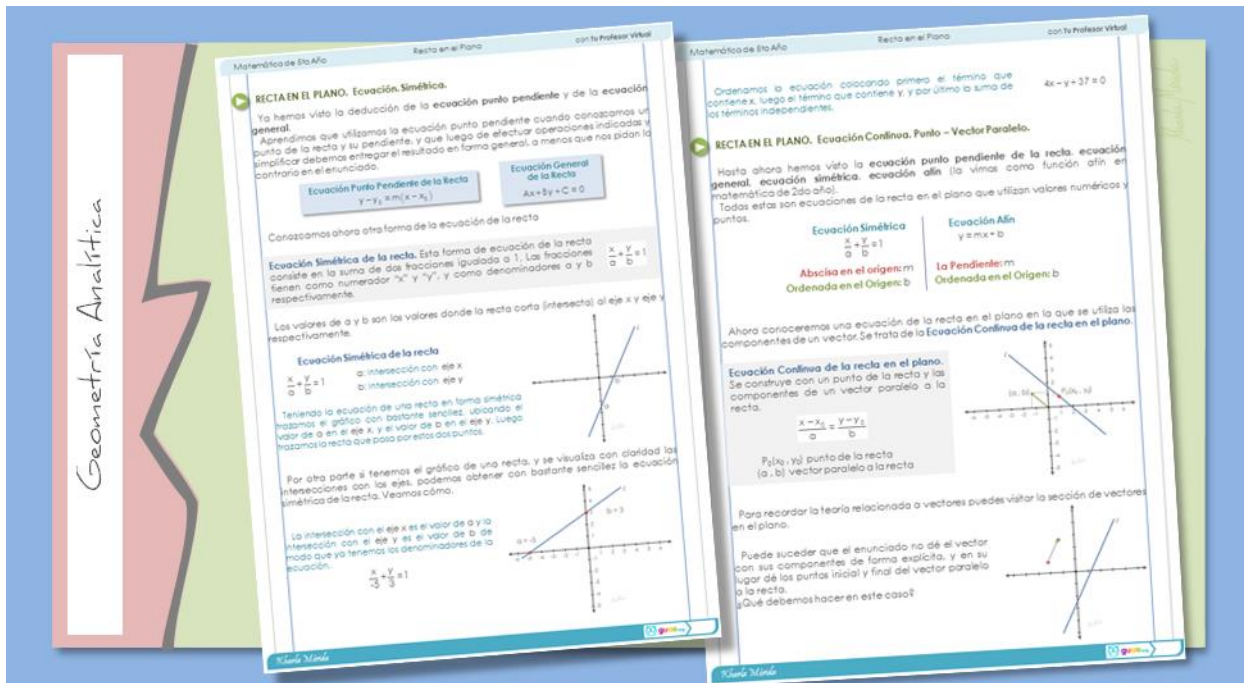
5ta Unidad

Geometría Analítica

5.1 Recta en el Plano. Ecuaciones

Cómo aburrirse cuando nuestra espiritualidad está siempre inspirada, y nuestra mente vibrante, siempre diseñando cómo hacer más y mejor.

Descripción



Desde nuestro primer encuentro con la recta, y su ecuación afín, es esta la unidad en la que se estudia de forma detallada y sistemática la recta en el plano, así como sus ecuaciones. Cada una aplica a casos y condiciones particulares. También contamos en este objetivo con el estudio de dos posiciones relativas entre rectas: Paralelas y Perpendiculares. Veamos.

Conocimientos Previos Requeridos

Plano Cartesiano, Ecuaciones, , Despeje, Función Afín.

Contenido

Ecuaciones, Punto Pendiente, Ecuación General, Ecuación Simétrica, Transformación de Ecuaciones de la Recta, Posiciones Relativas en la Recta Paralelas y Recta Perpendicular, Posiciones Relativas, Ejercicios.

Videos Disponibles

[RECTA EN EL PLANO. Ecuación. Punto Pendiente](#)

[RECTA EN EL PLANO. Ecuación. General](#)

[RECTA EN EL PLANO. Ecuación. Simétrica](#)

[RECTA EN EL PLANO. Transformación de Ecuaciones de la Recta. Ejercicios 1 y 2](#)

[RECTA EN EL PLANO. Transformación de Ecuaciones de la Recta. Ejercicios 3 y 4](#)

[RECTA EN EL PLANO. Ecuación Continua. Punto - Vector Paralelo](#)

[RECTA EN EL PLANO. Ecuación. Punto - Vector Perpendicular](#)

[RECTA EN EL PLANO. Posiciones Relativas. Rectas Paralelas](#)

[RECTA EN EL PLANO. Posiciones Relativas. Rectas Perpendicular](#)

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

Guiones Didácticos

▶ RECTA EN EL PLANO. Ecuación. Punto Pendiente.

En esta lección obtendremos la ecuación de una recta en el plano, empezaremos por la ecuación punto pendiente.

Ecuación punto pendiente. Es la ecuación de la recta basada en las coordenadas de un punto $P_0(x_0, y_0)$ y la pendiente, m .

En esta ecuación conocemos

Un Punto: $P_0(x_0, y_0)$

La Pendiente: m

Indiquemos como P_0 un punto conocido de la recta, y representemos el punto variable de la recta como P .

Sabemos que la pendiente de una recta es: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Donde x_1, x_2, y_1, y_2 son coordenadas de dos puntos conocidos de la recta.

Trabajaremos m como un valor conocido las coordenadas x_2, y_2 se sustituirán por las coordenadas x, y de P , y las coordenadas x_1, y_1 se sustituirán por las coordenadas x_0, y_0 de P_0 .

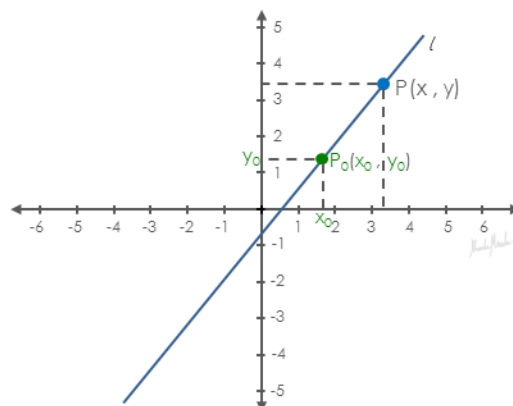
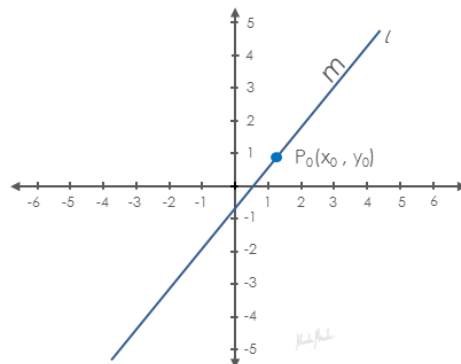
$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Pasamos el denominador, $x - x_0$, multiplicando al otro lado de la igualdad.

Finalmente ordenaremos la ecuación colocando la diferencia $y - y_0$ en el primer lado de la igualdad.

Ecuación Punto Pendiente de la Recta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



$$m(x - x_0) = y - y_0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

**RECTA EN EL PLANO. Ecuación. General.**

En la lección anterior dedujimos la **Ecuación Punto Pendiente de la Recta**.

Ahora transformaremos esta ecuación a la forma general de la ecuación de la recta. Veamos.

Aplicamos propiedad distributiva de la multiplicación de m respecto a la resta de $x - x_0$.

Reunimos todo en el 2do lado de la igualdad.

Aplicamos propiedad simétrica de la igualdad para ordenar la ecuación

Reunimos los dos términos constituidos por valores conocidos, $-mx_0 - y_0$.

Designamos los coeficientes de las variables y término independiente de forma más simple:

$$A = m, \quad B = -1, \quad C = -mx_0 - y_0$$

Ecuación Punto Pendiente de la Recta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_0 = mx - mx_0$$

$$0 = mx - mx_0 - y + y_0$$

$$mx - mx_0 - y + y_0 = 0$$

$$mx - y - mx_0 + y_0 = 0$$

$$\underbrace{mx}_A + \underbrace{(-1)y}_B + \underbrace{(-mx_0 + y_0)}_C = 0$$

Ecuación General de la Recta

$$Ax + By + C = 0$$

Una ecuación que tenga la forma $Ax + By + C = 0$ es una ecuación escrita en forma general.

Ejemplos

$$3x + 5y - 7 = 0$$

$$-x + 2y + 5 = 0$$

$$x + y = 0$$

Estas ecuaciones de la recta están presentadas en forma general

$$3x + 5y - 7 = 0$$

$$-x + 2y + 5 = 0$$

$$x + y = 0$$

1er caso. $A = 3, B = 5$ y $C = -7$

2do caso. $A = -1, B = 2$ y $C = 5$

3er caso. $A = 1, B = 1$
¿Cuánto vale C ?

Nota: Como no hay término independiente, $C = 0$

La forma general de ecuación de la recta es utilizada fundamentalmente para entregar los resultados las ecuaciones de rectas. Es decir, a menos que en el enunciado pida específicamente la ecuación en alguna de sus otras formas, se entregan en forma general.

▶ RECTA EN EL PLANO. Ecuación. Simétrica.

Ya hemos visto la deducción de la **ecuación punto pendiente** y de la **ecuación general**.

Aprendimos que utilizamos la ecuación punto pendiente cuando conozcamos un punto de la recta y su pendiente, y que luego de efectuar operaciones indicadas y simplificar debemos entregar el resultado en forma general, a menos que nos pidan lo contrario en el enunciado.

Ecuación Punto Pendiente de la Recta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ecuación General de la Recta

$$Ax + By + C = 0$$

Conozcamos ahora otra forma de la ecuación de la recta

Ecuación Simétrica de la recta. Esta forma de ecuación de la recta consiste en la suma de dos fracciones igualada a 1. Las fracciones tienen como numerador "x" y "y", y como denominadores a y b respectivamente.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Los valores de a y b son los valores donde la recta corta (intersecta) al eje x y eje y respectivamente.

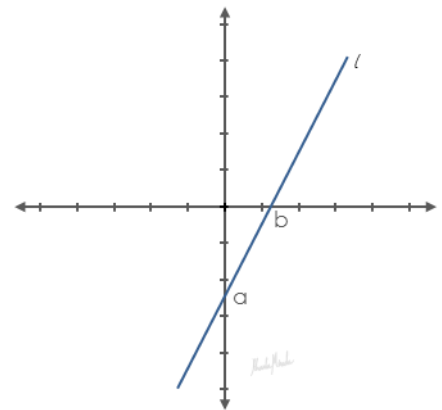
Ecuación Simétrica de la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a: Intersección con eje x

b: Intersección con eje y

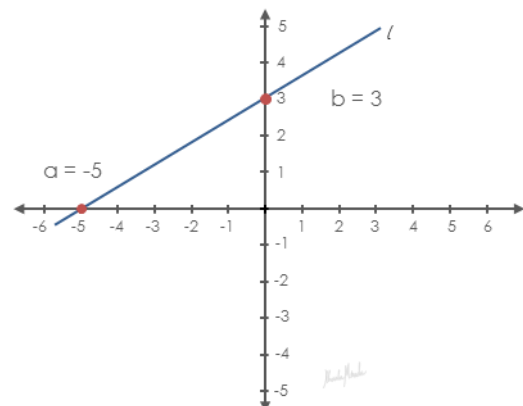
Teniendo la ecuación de una recta en forma simétrica trazamos el gráfico con bastante sencillez, ubicando el valor de a en el eje x, y el valor de b en el eje y. Luego trazamos la recta que pasa por estos dos puntos.



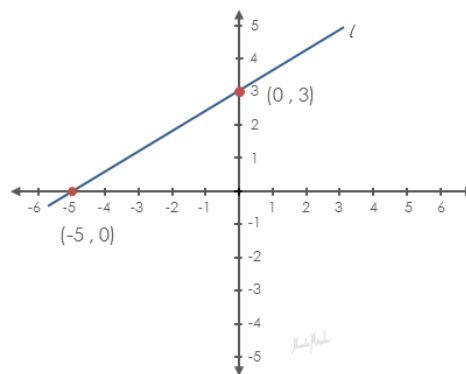
Por otra parte si tenemos el gráfico de una recta, y se visualiza con claridad las intersecciones con los ejes, podemos obtener con bastante sencillez la ecuación simétrica de la recta. Veamos cómo.

La intersección con el eje x es el valor de a y la intersección con el eje y es el valor de b de modo que ya tenemos los denominadores de la ecuación.

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$$



Esta ecuación simétrica puede ser transformada a la ecuación general acompáñanos a la siguiente lección donde aprenderemos cómo pasar de una forma de ecuación de la recta a otra.



▶ RECTA EN EL PLANO. Transformación de Ecuaciones de la Recta. Ejercicios 1 y 2.

En el siguiente grupo de ecuaciones identifique si se trata de una ecuación en forma punto pendiente, simétrica o afín y llevarla a la forma general

1. $x + y = 1$ 2. $y = 6x$ 3. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ 4. $y - 1 = 4(x + 9)$

1ra ecuación. Es una ecuación lineal, es decir, sin denominadores. La ecuación está dada en forma simétrica, considerando que $a = 1$ y $b = 1$.

$$x + y = 1$$

$$a = 1 \text{ y } b = 1$$

La forma general es aquella en la que todos los términos están en el 1er lado de la igualdad, ordenados de tal manera que primero va el término con x, luego el término con y, luego el término independiente.

Ecuación General de la Recta

$$Ax + By + C = 0$$

En este caso tenemos como 1er término x, y como segundo término y. Sólo falta pasar el término independiente al primer lado de la igualdad para tener la ecuación en la forma general.

1ra ecuación. Es una ecuación lineal, es decir, sin denominadores. La ecuación está dada en forma simétrica, considerando que $a = 1$ y $b = 1$.

$$x + y = 1$$

$$x + y - 1 = 0$$

2da ecuación. Es también lineal, sin denominadores. y está despejada por lo que su forma se corresponde con la **ecuación afín**, en donde $m = 6$ y $b = 0$. Para llevarla a la forma general debemos reunir todos los términos en el primer lado de la igualdad.

$$y = 6x$$

Ecuación Afín

$$y = mx + b \quad m = 6 \text{ y } b = 0$$

Opciones para llevar a ecuación general

1ra Opción

Pasamos $6x$ restando al 1er lado de la igualdad.

$$-6x + y = 0$$

El coeficiente de x debe ser positivo, entonces multiplicamos toda la expresión por -1, y aplicamos distributiva.

$$-1(-6x + y) = -1 \cdot 0$$

$$6x - y = 0$$

1ra Opción

Pasamos y restando al 2do lado de la igualdad.

$$0 = 6x - y$$

Aplicamos propiedad simétrica de la igualdad

$$6x - y = 0$$

Cualquiera sea el procedimiento matemático que apliquemos nos llevará al mismo resultado.

 **RECTA EN EL PLANO. Transformación de Ecuaciones de la Recta. Ejercicios 3 y 4.**

En la lección anterior identificamos a qué forma pertenecen las primeras dos ecuaciones, y las llevamos a la forma general, ahora trabajaremos con las últimas dos ecuaciones

1. $x + y = 1$



2. $y = 6x$



3. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$

4. $y - 1 = 4(x + 9)$

3ra ecuación. Es una suma de fracciones igualada a 1, los numeradores de las fracciones son x e y , y los denominadores 5 y 2 respectivamente. La ecuación está dada en forma simétrica, considerando que $a = 5$ y $b = 2$.

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$$

$$a = 5 \text{ y } b = 2$$

Para llevar la ecuación a la forma general, debemos eliminar los denominadores y reunir todos los términos en el primer lado de la igualdad.

Multiplicamos todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 2 y 5, que es 10.

$$10 \cdot \frac{x}{5} + 10 \cdot \frac{y}{2} = 10 \cdot 1$$

$$\text{m.c.m.}_{\{2,5\}} = 10$$

Efectuamos los productos y simplificamos.

$$2x + 5y = 10$$

Pasamos restando 10 al primer lado de la igualdad

$$2x + 5y - 10 = 0$$

4ta ecuación. Es lineal, sin denominadores. La forma de esta ecuación se corresponde con la ecuación punto pendiente, con $m = 4$, y las coordenadas del punto son $(1, -9)$.

$$y - 1 = 4(x + 9)$$

$$m = 4 \text{ y } P(-9, 1)$$

Ecuación Punto Pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Para llevarla a la forma general debemos reunir todos los términos en el primer lado de la igualdad.

$$y - 1 = 4(x + 9)$$

Aplicamos propiedad distributiva del 4 respecto a la suma del paréntesis.

$$y - 1 = 4x + 36$$

Pasamos $4x$ y 36 restando al primer lado de la igualdad.

$$-4x + y - 1 - 36 = 0$$

Multiplicamos todos los términos de la ecuación por -1 para hacer que el coeficiente de x sea positivo.

$$-1 \cdot (-4x + y - 1 - 36) = -1 \cdot 0$$

Ordenamos la ecuación colocando primero el término que contiene x , luego el término que contiene y , y por último la suma de los términos independientes.

$$4x - y + 37 = 0$$

▶ RECTA EN EL PLANO. Ecuación Continua. Punto – Vector Paralelo.

Hasta ahora hemos visto la **ecuación punto pendiente de la recta**, **ecuación general**, **ecuación simétrica**, **ecuación afín** (la vimos como función afín en matemática de 2do año).

Todas estas son ecuaciones de la recta en el plano que utilizan valores numéricos y puntos.

Ecuación Simétrica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Abcisa en el origen: m

Ordenada en el Origen: b

Ecuación Afín

$$y = mx + b$$

La Pendiente: m

Ordenada en el Origen: b

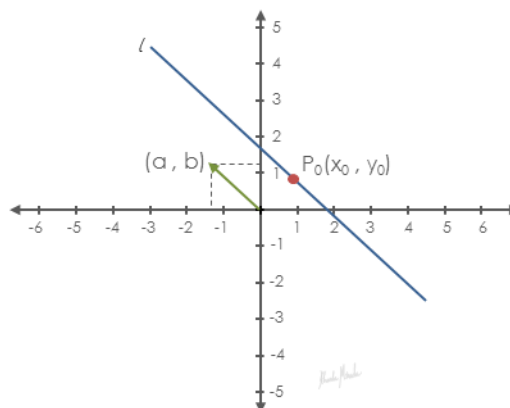
Ahora conoceremos una ecuación de la recta en el plano en la que se utiliza las componentes de un vector. Se trata de la **Ecuación Continua de la recta en el plano**.

Ecuación Continua de la recta en el plano.

Se construye con un punto de la recta y las componentes de un vector paralelo a la recta.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

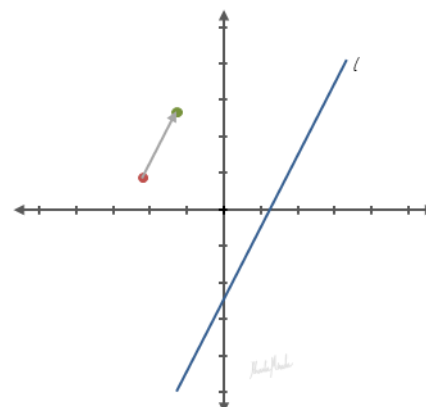
$P_0(x_0, y_0)$ punto de la recta
 (a, b) vector paralelo a la recta



Para recordar la teoría relacionada a vectores puedes visitar la sección de vectores en el plano.

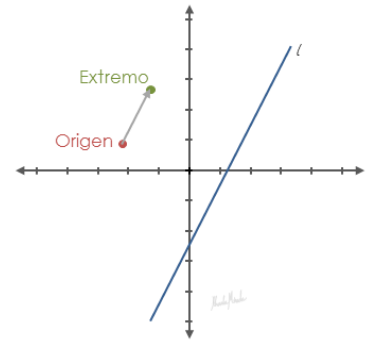
Puede suceder que el enunciado no dé el vector con sus componentes de forma explícita, y en su lugar dé los puntos inicial y final del vector paralelo a la recta.

¿Qué debemos hacer en este caso?



En la sección de Vectores, se enseña en detalle que para hallar las componentes de un vector, conociendo los puntos origen y extremo, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\text{Componentes de un Vector} = \text{Coordenadas del Punto Extremo} - \text{Coordenadas del Punto Origen}$$



Una vez que ya se tiene las componentes del vector podemos aplicarla fórmula de la ecuación continua y obtener la ecuación de la recta en estudio.

▶ RECTA EN EL PLANO. Ecuación. Punto – Vector Perpendicular.

En la lección anterior conocimos la **ecuación continua** de una recta en el plano para la cual se utiliza un punto de la recta y las componentes de un vector paralelo a la recta.

**Ecuación Continua
Punto-Vector Paralelo**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

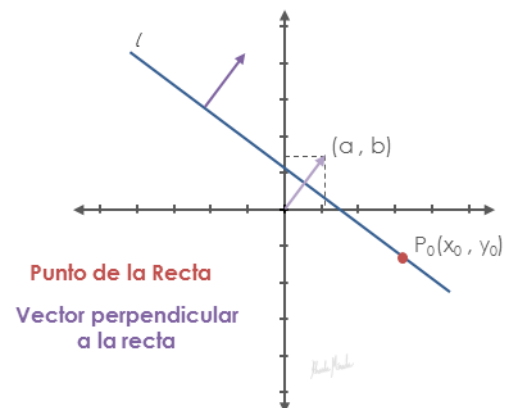
Punto de la Recta: $P(x_0, y_0)$

Vector Paralelo a la Recta: $\vec{v} = (a, b)$

Ahora conoceremos otra ecuación de la recta en el plano en la que se utiliza las componentes de un vector. Se trata de la **Ecuación punto vector perpendicular**. veamos

Ecuación punto vector perpendicular. Tiene la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, se construye con un punto de la recta y las componentes de un vector perpendicular a la recta.

Nuevamente puede ocurrir que el enunciado no dé el vector perpendicular con sus componentes de forma explícita, y en su lugar dé los puntos inicial y final del vector perpendicular a la recta.

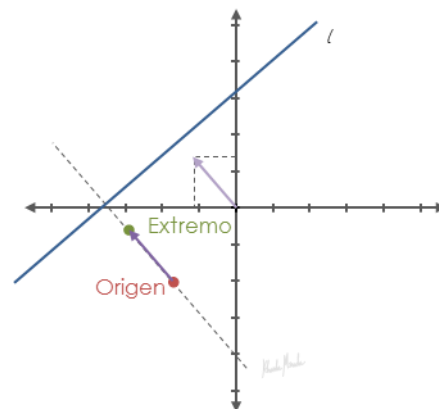


¿Qué debemos hacer si conocemos las coordenadas del origen y extremo del vector?

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Conociendo los puntos origen y extremo, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\text{Componentes de un Vector} = \text{Coordenadas del Punto Extremo} - \text{Coordenadas del Punto Origen}$$



Una vez que ya se tiene las componentes del vector podemos aplicarla fórmula de la ecuación punto vector perpendicular y obtener la ecuación de la recta en estudio.

▶ RECTA EN EL PLANO. Posiciones Relativas. Rectas Paralelas.

Hemos presentado un conjunto valioso de ecuaciones de la recta en el plano, que nos permiten contar con diversas opciones para obtener dichas ecuaciones, de acuerdo con los datos que nos entreguen en el enunciado.

Ahora conozcamos algunos recursos igualmente valiosos y que servirán para establecer posiciones particulares entre rectas

Condiciones de Paralelismo Entre Rectas en el Plano

Tenemos dos posibilidades para establecer la condición de paralelismo, una relaciona cantidades escalares, que son las pendientes de las rectas en estudio y la otra relaciona cantidades vectoriales, que son los vectores paralelos.

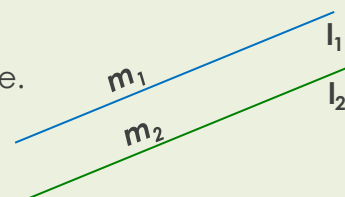
1 Usando las Pendientes de las Rectas

Dos rectas en el plano son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

en términos matemáticos:

Sean l_1 y l_2 rectas de pendientes m_1 y m_2 , respectivamente.

$$l_1 \parallel l_2 \quad \text{Si y solo si} \quad m_1 = m_2$$



2 Usando Vectores Paralelos

Dos rectas en el plano son paralelas si y solo si un vector que sea paralelo a una de ellas es paralelo también a la otra.

$$\text{Sean } l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \vec{v} = (a, b)$$

$$\text{Se cumple que } l_1 \parallel l_2 \quad \text{si y solo si } \vec{v} \parallel l_1 \quad \text{y} \quad \vec{v} \parallel l_2 \quad \text{y} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k$$

▶ RECTA EN EL PLANO. Posiciones Relativas. Rectas Perpendicular.

Hemos presentado un conjunto valioso de ecuaciones de la recta en el plano, que nos permiten contar con diversas opciones para obtener dichas ecuaciones de acuerdo con los datos que nos entreguen en el enunciado.

Ahora conozcamos algunos recursos igualmente valiosos y que servirán para establecer posiciones particulares entre rectas

Condiciones de Paralelismo Entre Rectas en el Plano

Tenemos dos posibilidades para establecer la condición de perpendicularidad, una relaciona cantidades escalares, que son las pendientes de las rectas en estudio, y la otra relaciona cantidades vectoriales.

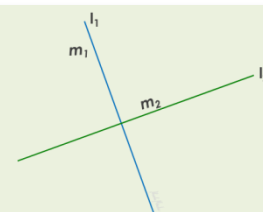
1 Usando las Pendientes de las Rectas

Si dos rectas en el plano son perpendiculares el producto de sus pendientes es -1.

en términos matemáticos:

Sean l_1 y l_2 rectas de pendientes m_1 y m_2 , respectivamente.

$$\text{Si } l_1 \perp l_2 \quad \text{entonces} \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$



2 Usando Vectores Paralelos

**Si dos rectas en el plano son perpendiculares
los vectores paralelos a ellas son también perpendiculares**

en términos matemáticos:

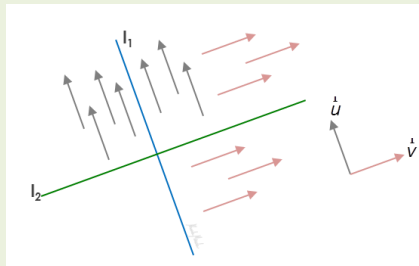
$$\text{Sean } l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \quad \vec{u} = (u_x, u_y)$$

Se cumple que

Si $l_1 \perp l_2$, $\vec{v}_1 \perp l_1$ y $\vec{v}_2 \perp l_2$ entonces

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$



Emparejando el Lenguaje

Ecuación punto pendiente. Es la ecuación de la recta basada en las coordenadas de un punto $P_0(x_0, y_0)$ y la pendiente, m .

Ecuación Simétrica de la recta. Esta forma de ecuación de la recta consiste en la suma de dos fracciones igualada a 1. Las fracciones tienen como numerador "x" y "y", y como denominadores a y b respectivamente.

Ecuación Continua de la recta en el plano. Se construye con un punto de la recta y las componentes de un vector paralelo a la recta.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Ecuación punto vector perpendicular. Tiene la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, se construye con un punto de la recta y las componentes de un vector perpendicular a la recta.

A Practicar

1. Dadas las ecuaciones de las rectas:
 $l \equiv 2x - 3y + 7 = 0$, $r \equiv x + 6y + 15 = 0$ hallar:
- La pendiente
 - La abscisa y la ordenada en el origen
 - La abscisa del punto de la recta cuya ordenada es 1.
 - La ordenada del punto cuya abscisa es -1.
 - La pendiente de una recta paralela.
 - La pendiente de una recta perpendicular.

¿Lo Hicimos Bien?

$$l \equiv 2x - 3y + 7 = 0$$

- a. $m_l = 2/3$
- b. $x(0) = -7/2$, $y(0) = 7/3$
- c. $x(1) = 3$
- d. $y(-1) = 5/3$
- e. $m_{ll} = 2/3$
- f. $m_{\perp} = -3/2$

$$r \equiv x + 6y + 15 = 0$$

- a. $m_r = -1/6$
- b. $x(0) = -15$, $y(0) = -5/2$
- c. $x(1) = -21$
- d. $y(-1) = -7/3$
- e. $m_{rr} = -1/6$
- f. $m_{\perp} = 6$