7

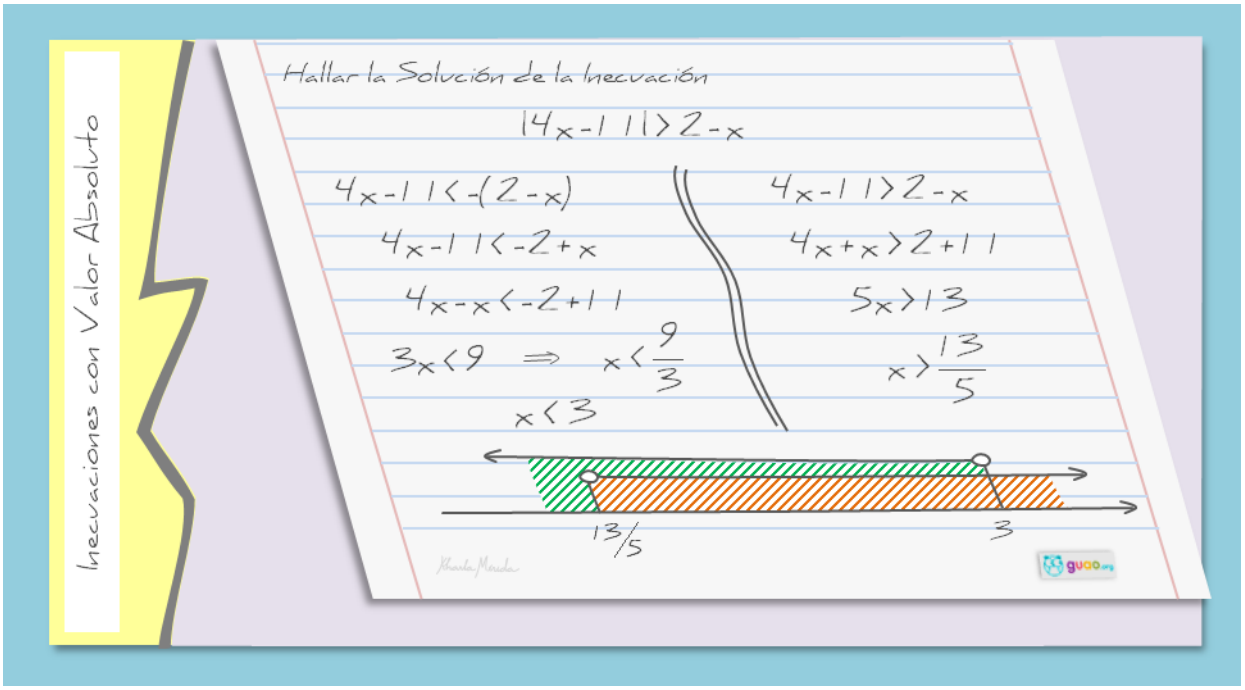
7ma Unidad

Inecuaciones

7.4 Inecuaciones con Valor Absoluto Definición y Ejercicios

Solo cuando somos capaces de dar Amor, brindar seguridad, inculcar valores y hacer que principios nobles y edificantes estén arraigados en quienes formamos, somos merecedores de ser llamados Padres.

Descripción



En este objetivo se presentan 4 ejercicios de inecuaciones en los que se aplica productos notables y otras herramientas algebraicas aprendidas con antelación. Se nutre el análisis de casos diversos en las relaciones de orden, y se deja el terreno listo para avanzar a los sistemas de inecuaciones.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Naturales y los Números Enteros.

Contenido

Hallar la Solución de las Inecuaciones Dadas. Ejercicios, Hallar la Solución del Sistema de Inecuaciones. Ejercicios, Inecuaciones con Calor Absoluto Definición y Ejercicios .

Videos Disponibles

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Definición

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 1 y 2

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 3

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 4

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 5

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 6

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Definición

En **4.1 Números Negativos, Valor Absoluto, El Opuesto, Representación de Números Enteros en la Recta** vimos el significado práctico de valor absoluto.
Ahora conoceremos la definición formal de valor absoluto.

Para toda x perteneciente a los reales se define valor absoluto como sigue:

Se lee valor absoluto de x es

$$|x| = \begin{cases} -x \ , & x < 0 \\ x \ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Se lee
El opuesto de x, si x es menor que cero
Es x, si x es mayor o igual que cero.

También podemos decirlo,

$$|x| = \begin{cases} -x \ , & x < 0 \\ x \ , & x \geq 0 \end{cases}$$

- x, Si x es negativa
x, Si x es positiva o cero

Ejemplos

$|-3| = 3$ $|-17| = 17$ $|-58| = 58$

El valor absoluto de números negativos son sus opuestos, positivos.

$|8| = 8$ $|67| = 67$ $|136| = 136$

El valor absoluto de números positivos, es su propio valor.

Conozcamos ahora las propiedades el valor absoluto en los números reales.

Propiedades del Valor Absoluto

Desigualdad triangular. El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

El valor absoluto de un producto. es el producto de los valores absolutos.

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

El valor absoluto de un cociente. es el cociente de los valores absolutos.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Relaciones de Orden con Valor Absoluto

$|x| \leq a$ → $-a \leq x \leq a$

valor absoluto de x menor o igual que a → x mayor o igual que -a y menor o igual que a.

$|x| \geq a$ → $x \leq -a$ ó $x \geq a$

valor absoluto de x menor o igual que a → x menor o igual que -a, o mayor o igual que a.

Pongamos manos a la práctica para fortalecer en nuestra mente la definición de valor absoluto y sus propiedades. Acompáñanos a la siguiente lección.

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 1 y 2

Resolver la inecuación dada: $|x+1| \geq 6$

Sabemos que

$|x| \geq a$ → $x \leq -a$ ó $x \geq a$

valor absoluto de x menor o igual que a → x menor o igual que -a, o mayor o igual que a.

Aplicando eso a la inecuación dada resulta:

$$x + 1 \leq -6 \quad ó \quad x + 1 \geq 6$$

Debemos despejar x en ambas inecuaciones.

Pasamos el 1, que está sumando, al otro lado de la inecuación restando.

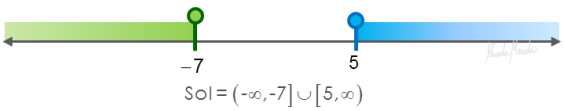
$$x + 1 \leq -6 \quad ó \quad x + 1 \geq 6$$

$$x \leq -6 - 1 \quad ó \quad x \geq 6 - 1$$

Efectuamos las sumas algebraicas.

$$x \leq -7 \quad ó \quad x \geq 5$$

Emparejando Lenguaje. En Conjuntos y Operaciones entre conjuntos "**o**" significa Operativamente "**Unión**"



Sol = $(-\infty, -7] \cup [5, \infty)$

Resolver la inecuación dada $|x-8| \leq 3$

Sabemos que

$|x| \leq a$ → $-a \leq x \leq a$

valor absoluto de x menor o igual que a → x mayor o igual que -a y menor o igual que a.

Aplicando eso a la inecuación dada resulta:

$$-3 \leq x - 8 \leq 3$$

Debemos despejar x en el centro del sistema de desigualdades.

Sumamos 8 en los tres miembros de la desigualdad

$$-3 \leq x - 8 \leq 3$$

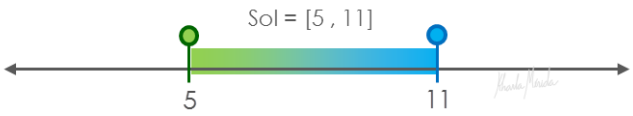
Efectuamos las sumas algebraicas.

$$-3 + 8 \leq x - 8 + 8 \leq 3 + 8$$

$$5 \leq x \leq 11$$

La solución contempla los valores de x que van de 5 a 11.

Sol = [5 , 11]



Veamos más inecuaciones con valor absoluto, aumentando el nivel de exigencia para esclarecer cualquier punto.

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 3

Resolver la inecuación $|4x - 11| > 2 - x$

Aplicamos la propiedad de relación de orden con valores absolutos

$\lvert x \rvert \geq a$	→	$x \leq -a$ ó $x \geq a$
valor absoluto de x menor o igual que a		x menor o igual que -a, o mayor o igual que a.

$$4x - 11 < -(2 - x) \quad \text{ó} \quad 4x - 11 > 2 - x$$

Recordemos. En el estudio de conjuntos, "**o**" significa operativamente "**Unión**".

Entonces, debemos resolver ambas inecuaciones y unir las soluciones de cada una.

1ra Inecuación. Es una inecuación lineal sencilla.

Despejamos x

$$4x - 11 < -(2 - x)$$

Distribuimos el signo para eliminar el paréntesis.

$$4x - 11 < -2 + x$$

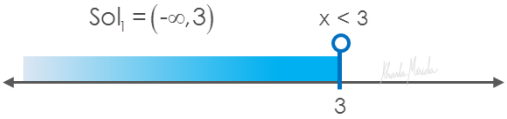
Reunimos los términos variables en el primer lado de la desigualdad y los numéricos en el 2do.

$$4x - x < -2 + 11$$

Simplificamos términos semejantes, y pasamos 3 dividiendo al 2do lado de la desigualdad.

$$3x < 9 \rightarrow x < \frac{9}{3}$$

$$x < 3$$



$Sol_1 = (-\infty , 3)$

2da Inecuación. Es una inecuación lineal sencilla.

Despejamos x

$4x - 11 > 2 - x$

Reunimos los términos variables en el 1er lado de la desigualdad, y los numéricos en el 2do.

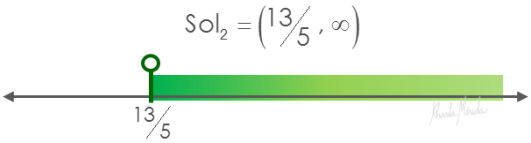
$4x + x > 2 + 11$

Efectuamos las sumas algebraicas

$5x > 13$

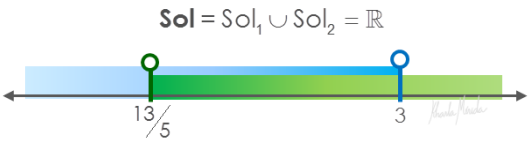
Pasamos 5 dividiendo al 2do lado

$5x > 13 \rightarrow x > \frac{13}{5}$



$Sol_2 = (13/5 , -\infty)$

Solución. La solución total es la unión de las soluciones particulares.



$Sol = (-\infty , 3) \cup (13/5 , -\infty)$

$Sol = \mathbb{R}$

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 4

Resolver la inecuación $|5 - 6x| < 4x + 1$

Aplicamos la propiedad de relación de orden con valores absolutos,

$$-(4x + 1) < 5 - 6x < 4x + 1$$

Nota: Ésta es una relación compuesta por dos inecuaciones. Para leerla debemos partir desde el centro, leer hacia la izquierda y luego hacia la derecha, esto es:

$$-(4x + 1) < 5 - 6x < 4x + 1$$

"$5 - 6x$ mayor que $-(4x + 1)$ **y** menor que $4x + 1$"

$$5 - 6x > -(4x + 1) \qquad y \qquad 5 - 6x < 4x + 1$$

Emparejando Lenguaje. En Conjuntos y Operaciones entre conjuntos "**y**" significa Operativamente "**Intersección**"

Entonces, debemos resolver ambas inecuaciones y unir las soluciones de cada una.

1ra Inecuación. Es una inecuación lineal sencilla.

Despejamos x

$$5 - 6x > -(4x + 1)$$

Distribuimos el signo para eliminar el paréntesis.

$$5 - 6x > -4x - 1$$

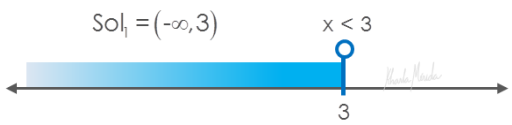
Reunimos los términos variables en el 1er lado de la desigualdad y los numéricos en el 2do.

$$-6x + 4x > -1 - 5$$

$$-2x > -6$$

Pasamos -2 dividiendo al otro lado cambiando el sentido de la desigualdad por ser negativo.

$$x < \frac{-6}{-2} \rightarrow x < 3$$



$$\boxed{Sol_1 = (-\infty\ ,\ 3)}$$

2da Inecuación. Es una inecuación lineal sencilla.

Despejamos x

$$5 - 6x < 4x + 1$$

Reunimos los términos variables en el 1er lado de la desigualdad y los numéricos en el 2do.

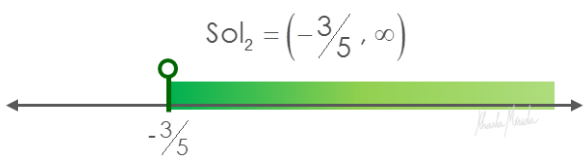
$$-6x - 4x < 1 - 5$$

Simplificamos términos semejantes.

$$-10x < -4$$

Pasamos -10 dividiendo al otro lado cambiando el sentido de la desigualdad por ser negativo.

$$x > \frac{-4}{-10} \rightarrow x > \frac{2}{5}$$



$$\boxed{Sol_2 = \left(\tfrac{2}{5}\ ,\ \infty\right)}$$

Solución. La solución total es la intersección de las soluciones particulares.

$$\textbf{Sol} = Sol_1 \cap Sol_2 = \left(\tfrac{2}{5}\ ,\ 3\right)$$

$$Sol_1 = (-\infty\ ,\ 3) \cap Sol_2 = \left(\tfrac{2}{5}\ ,\ \infty\right)$$

$$\boxed{Sol = \left(\tfrac{2}{5}\ ,\ 3\right)}$$

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 5

Resolver la inecuación dada $\left|\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right| \geq 5$

Aplicamos la propiedad de relación de orden con valores absolutos,

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{2} \leq -5 \quad \text{ó} \quad \frac{x}{5} - \frac{1}{2} \geq 5$$

1ra Inecuación. Es una inecuación lineal .

Despejamos x

$$\frac{x}{5}-\frac{1}{2}\leq -5$$

Multiplicamos por el m.c.m. entre 5 y 2 eliminar denominadores.

m.c.m. = 10

$$10\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{2}\right)\leq 10\cdot(-5)$$

Distribuimos el factor 10 para eliminar el paréntesis.

$$10\cdot\frac{x}{5}-10\cdot\frac{1}{2}\leq 10\cdot(-5)$$

Simplificamos cada factor 10 con los denominadores respectivos y efectuamos los productos.

$$2x-5\leq -50$$

Pasamos 5 restando al 2do lado de la desigualdad, y 2 dividiendo.

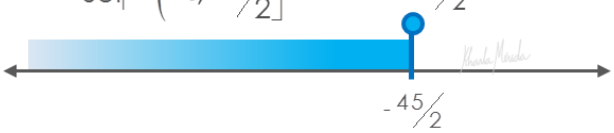
$$2x\leq -50+5$$

$$2x\leq -45$$

$$x\leq -\frac{45}{2}$$

$$\boxed{Sol_1=\left(-\infty,-45/2\right]}$$

$Sol_1=\left(-\infty,-45/2\right]$ $x\leq -45/2$



2da Inecuación. Es una inecuación lineal sencilla.

Despejamos x

$$\frac{x}{5}-\frac{1}{2}\geq 5$$

Multiplicamos por el m.c.m. entre 5 y 2 eliminar denominadores.

m.c.m. = 10

$$10\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{2}\right)\geq 10\cdot 5$$

Distribuimos el factor 10 para eliminar el paréntesis.

$$10\cdot\frac{x}{5}-10\cdot\frac{1}{2}\geq 10\cdot 5$$

Simplificamos cada factor 10 con los denominadores respectivos y efectuamos los productos.

$$2x-5\geq 50$$

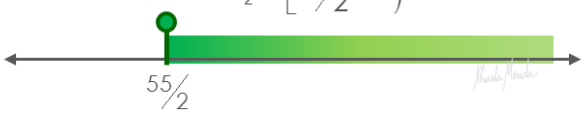
Pasamos 5 restando al 2do lado de la desigualdad, y 2 dividiendo.

$$2x\geq 50+5$$

$$2x\geq 55 \rightarrow x\geq \frac{55}{2}$$

$$\boxed{Sol_1=\left[55/2,\infty\right)}$$

$Sol_2=\left[55/2,\infty\right)$



Solución. La solución total es la unión de las soluciones particulares.

$$\textbf{Sol}=Sol_1\cup Sol_2=\left(-\infty,-45/2\right]\cup\left[55/2,\infty\right)$$

$$\boxed{Sol=\left(-\infty,-45/2\right]\cup\left[55/2,\infty\right)}$$

INECUACIONES. Con Valor Absoluto. Ejercicio 6

Resolver el sistema de inecuación $\begin{cases} |x+6| > 3 \\ |x-8| < 20 \end{cases}$

En el objetivo **7.3 Inecuaciones. Sistemas. Ejercicios** la solución de un sistema de inecuaciones se obtiene de la intersección de las soluciones particulares.

Solución de $|x+6| > 3$: Sol_1

Solución de $|x-8| < 20$: Sol_2

$Sol_1 \cap Sol_2$ = Solución de $\begin{cases} |x+6| > 3 \\ |x-8| < 20 \end{cases}$

Para Sol_1:

$$|x+6| > 3$$

Aplica el caso

$|x| \geq a$ → $x \leq -a$ ó $x \geq a$

valor absoluto de x menor o igual que a

x menor o igual que -a, o mayor o igual que a.

Recordemos. En lenguaje matemático "o" se entiende como "unión". Entonces debemos resolver las dos inecuaciones simples y unir las soluciones para obtener Sol_1.

En ambos casos pasamos 6 restando al 2do lado de la desigualdad.

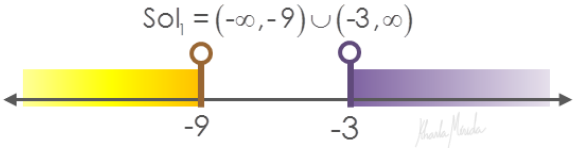
Efectuamos las sumas algebraicas

$x + 6 < -3$ ó $x + 6 > 3$

$x < -3 - 6$ ó $x > 3 - 6$

$x < -9$ ó $x > -3$

$Sol_1 = (-\infty, -9) \cup (-3, \infty)$



$$Sol_1 = (-\infty, -9) \cup (-3, \infty)$$

Para Sol_2:

$$|x-8| < 20$$

Aplica el caso

$|x| \leq a$ → $-a \leq x \leq a$

valor absoluto de x menor o igual que a

x mayor o igual que -a y menor o igual que a.

Recordemos. En lenguaje matemático "y" se entiende como "intersección". Entonces debemos resolver las dos inecuaciones simples e intersectar las soluciones para obtener Sol_2.

En ambos casos pasamos 8 sumando al 2do lado de la desigualdad.

$$x - 8 < 20 \quad y \quad x - 8 > -20$$

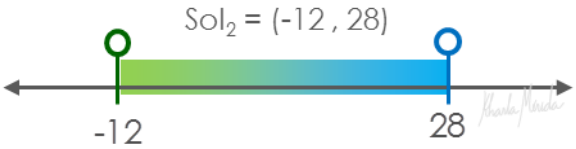
Efectuamos las sumas algebraicas

$$x < 20 + 8 \quad y \quad x > -20 + 8$$

$$x < 28 \quad y \quad x > -12$$

Intersectamos las soluciones parciales

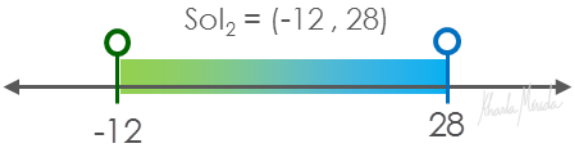
$$\textbf{Sol} = Sol_a \cap Sol_b = (-12\,,\,28)$$



$$Sol_2 = (12, 28)$$

Ahora, debemos intersectar las Sol_1 y Sol_2 para hallar la solución del sistema de inecuaciones con valor absoluto.

$$Sol_1 = (-\infty, -9) \cup (-3, \infty) \qquad Sol_2 = (-12, 28)$$



El conjunto solución se corresponde con las secciones de la recta en las que coinciden ambas soluciones.

$$Sol = (-12, -9) \cup (-3, 28)$$

$$Sol = (-12, -9) \cup (-3, 28)$$

Emparejando el Lenguaje

Desigualdad triangular. El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos.
El valor absoluto de un producto. Es el producto de los valores absolutos.
El valor absoluto de un cociente. Es el cociente de los valores absolutos.

Ejercicios

Hallar la solución de las siguientes inecuaciones

1. $|11x - 2| \leq 8$
2. $|1 - 5x| > -3$
3. $|12 + 7x| > 3 - 2x$
4. $|8x + 14| > 3x + 2$
5. $|3x + 12| > 14 - 2x$
6. $|-3x + 1| > 5x + 7$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $\left[-\frac{6}{11}, \frac{6}{11}\right]$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}$
4. $\mathbb{R}$
5. $(\infty, -26) \cup \left(-\frac{2}{5}, \infty\right)$
6. $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$