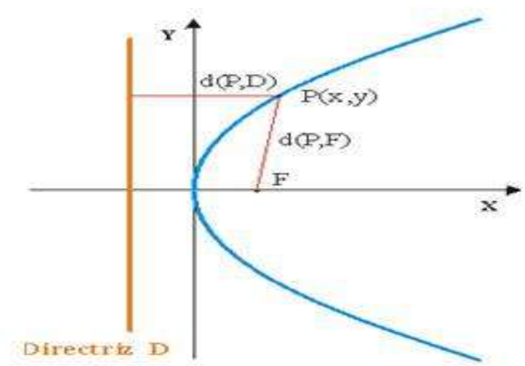
Introducción a fórmulas cónicas

Marco Teórico

Introducción

Las cónicas constituyen uno de los conjuntos de curvas más importantes de la Geometría y que más se utilizan en distintas ramas de la Ciencia y la Ingeniería.
En este trabajo presentamos lugares geométricos que son muy importantes en la Geometría analítica y que se originan de considerar cortes en diferentes ángulos de un cono doble circular recto, mediante un plano, dando lugar a las figuras llamadas precisamente CÓNICAS, o también SECCIONES CÓNICAS, las que según el ángulo de corte reciben el nombre de parábola, elipse, hipérbola, y algunos casos especiales de estas curva.
Todas estas secciones cónicas tiene una propiedad común que es satisfecha por cada uno de sus puntos, y es que el cociente de la distancia de cada uno de estos puntos hasta un punto fijo F, llamado foco, entre su distancia a una recta fija D, llamada directriz, es siempre constante, denotada por **e** y denominada excentricidad.



$$\frac{d[P;F]}{d[P;D]} = e$$

CONICAS

Se denomina sección cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasas por su vértice.

El matemático griego Menecmo descubrió estas curvas y fue el matemático griego Apolonio de Perga (antigua cuidad del Asia Menor) el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía.

Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos a los que dio por nombre: elipse, hipérbola y parábola.

Ejemplo 1.

Determina las coordenadas del centro y del radio de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

$-4 = -2a \qquad a = 2$

$C(2, 3)$

$-6 = -2b \qquad b = 3$

$-12 = 2^2 + 3^2 - r^2$

$-12-4-9 = -r^2$

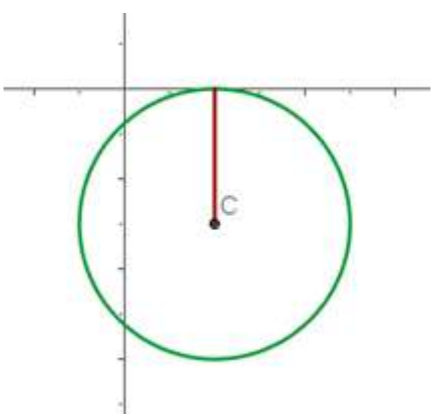
$-25 = -r^2$

$r = \sqrt{25}$

$r=5$

Ejemplo 2:

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2, −3) y es tangente al eje de abscisas.



$C(2, -3) \qquad s \equiv y = 0$

$r = d(C, s) = 3$

$(x-2)^2+(y+3)^2=3^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determina las coordenadas del centro y del radio de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 + 3x + y + 10 = 0$$

Solución:

$$3 = -2a \qquad a = -\frac{3}{2}$$

$$C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$1 = -2b \qquad b = -\frac{1}{2}$$

$$10 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - r^2$$

r= $\sqrt{\frac{-30}{4}} \notin \mathbf{R}$

No es una circunferencia real.

2. $$4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$$

Solución:
Dividiendo por 4

$$x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{3}{2} = 0$$

$$-1 = -2a \qquad a = \frac{1}{2}$$

$$C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$3 = -2b \qquad b = -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - r^2$$

r=2

3. $$\mathbf{4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0}$$

$$x^2 + y^2 - x - 2y - \frac{11}{4} = 0$$

$-1 = -2a \qquad a = \dfrac{1}{2}$

$C\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

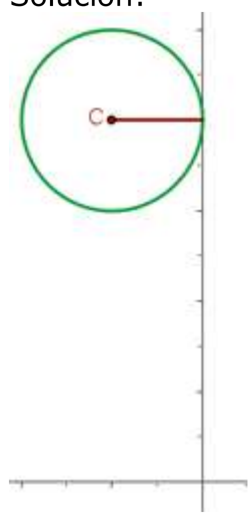
$-2 = -2b \qquad b = 1$

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{4} + 1 - r^2$$

r=2

4. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (−1, 4) y es tangente al eje de ordenadas.

Solución:



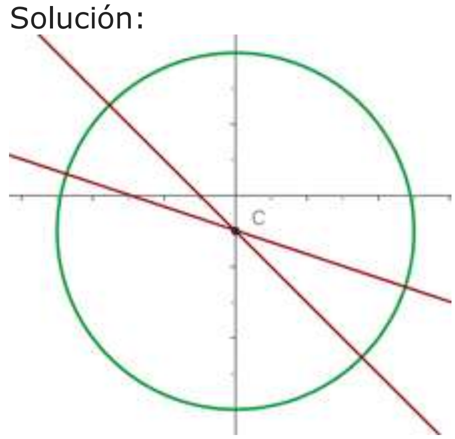
$C(-1, 4) \qquad s \equiv x = 0$

$r = d(C, s) = 1$

$(x+1)^2+(y-4)^2=1$

5. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas x + 3y + 3 = 0, x + y + 1 = 0, y su radio es igual a 5.

Solución:



$$\begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \qquad C(0, -1)$$

$$A = -2 \cdot 0 = 0 \qquad B = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$C = 0^2 + (-1)^2 - 5^2 \qquad C = -24$$

$x^2+y^2+2y-24=0$

6. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, y que pasa por el punto (−3, 4).

Solución:

Por ser concéntricas tienen el mismo centro.

$$-6 = -2a \qquad a = 3$$

$$2 = -2b \qquad b = -1$$

$$C(3, -1) \qquad P(-3, 4)$$

$$r = d(P, C) = \sqrt{(3+3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{61}$$

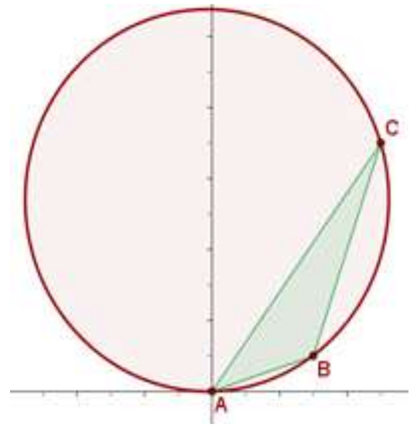
$$A = -6 \qquad B = 2$$

$$C = 3^2 + (-1)^2 - \left(\sqrt{61}\right)^2 = -51$$

$x^2+y^2-6x+2y-51=0$

7. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices: A(0, 0), B(3, 1), C(5, 7)

Solución:



$$\begin{cases} 0^2 + 0^2 + A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \\ 3^2 + 1^2 + A \cdot 3 + B \cdot 1 + C = 0 \\ 5^2 + 7^2 + A \cdot 5 + B \cdot 7 + C = 0 \end{cases}$$

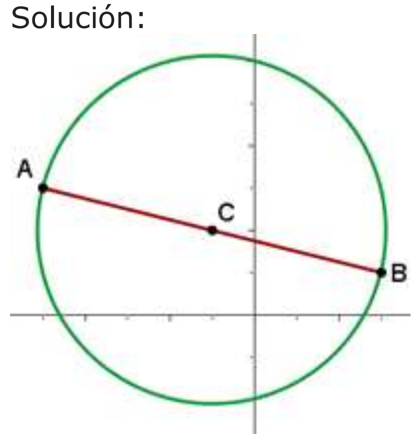
$$\begin{cases} C = 0 \\ 3A + B + C = -10 \\ 5A + 7B + C = -74 \end{cases}$$

A=$\frac{1}{4}$ **B=$-\frac{43}{4}$** **C=0**

$x^2+y^2+\frac{1}{4}x-\frac{43}{4}y = 0$

8. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A (−5, 3) y B (3, 1). ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?

Solución:



$$r = \frac{1}{2} d(A, B) = \frac{1}{2}\sqrt{(3+5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$$

$$C = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (-1, 2)$$

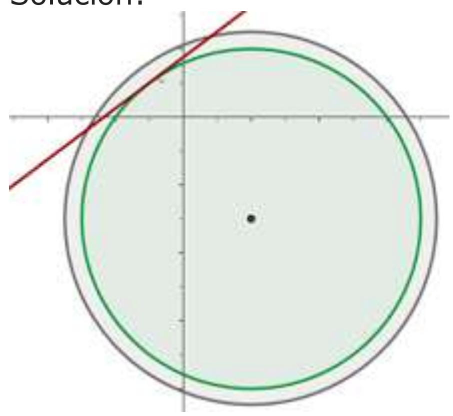
$$A = -2 \cdot (-1) = 2 \qquad B = -2 \cdot 2 = -4$$

$$C = (-1)^2 + 2^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2 = -12$$

$x^2+y^2+2x-4y-12=0$

9. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

Solución:



$$-4 = -2a \qquad a = 2$$

$$6 = -2b \qquad b = -3$$

$C(2, -3)$

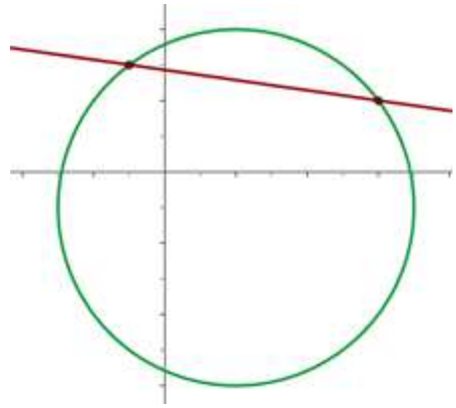
$$r = d(C, s) = \frac{2 \cdot 3 - 4(-3) + 7}{\sqrt{9+16}} = 5$$

$$A = -4 \qquad B = 6 \qquad C = 4 + 9 - 25 = -12$$

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

10. Estudiar la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ con las rectas:

Solución:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \\ x + 7y - 20 = 0 \end{cases}$$

$x = 20 - 7y$ $\quad\quad$ $y^2 - 5y + 6 = 0$

$y_1=3$ $\quad$ $x_1=-1$ $\quad$ **P (-1,3)**

$y_2= 2$ $\quad$ $x_2=6$ $\quad$ **Q (6,2)**

Glosario

Otras Referencias

http://www.monografias.com/trabajos82/conicas/conicas.shtml#ixzz40ee1HD1M

Videos.