Ley del Seno

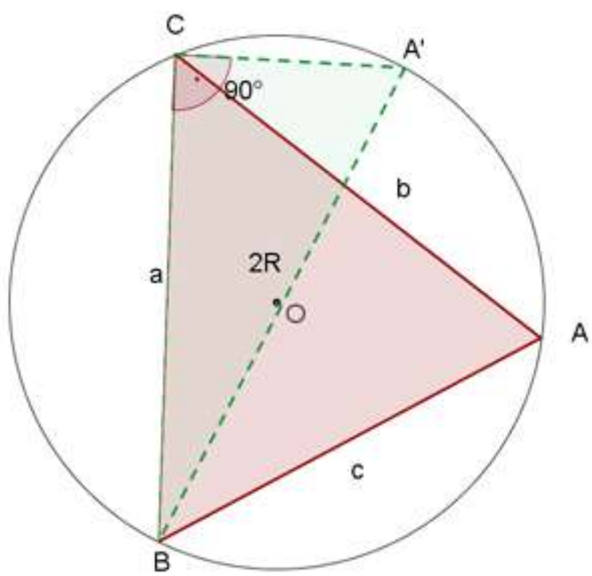
En esta sección, derivarás la relación de la Ley de Senos y la usarás para resolver triángulos no rectángulos en los que se conocen dos ángulos y un lado.

Un triángulo tiene dos ángulos que miden 60° y 45°. La longitud de los lados entre estos dos ángulos es 10.

¿Cuáles son las longitudes de los otros dos lados?

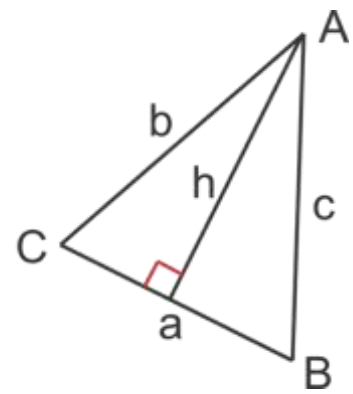
Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos o puestos.

$$\frac{\text{a}}{\text{sen}a} = \frac{\text{b}}{\text{sen}b} = \frac{\text{c}}{\text{sen}c} = 2R$$



Orientación

Observa el siguiente triángulo no rectángulo. Podemos construir una altura desde cada uno de los vértices para dividir el triángulo en dos triángulos rectángulos como se muestra a continuación.



Del diagrama podemos escribir dos funciones trigonométricas que involucran *h* :

$\operatorname{sen} C = \frac{h}{b}$ y $\operatorname{sen} B = \frac{h}{c}$

h=b sen C y h=c sen B

Ya que ambos son iguales a *h* , podemos igualarlas para obtener:

$b \sin C = c \sin B$ y finalmente dividir ambos lados por bc para crear la proporción:

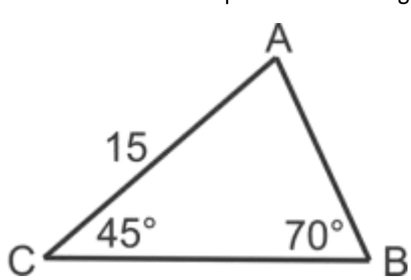
$$\frac{senC}{c} = \frac{senB}{b}$$

Si construimos la altura desde diferentes vértices, digamos *B, obtendremos la proporción*

$$\frac{senC}{c} = \frac{senB}{b}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determine los lados que faltan en el siguiente triángulo



Solución: Ya que sabemos dos de los tres ángulos del triángulo, podemos encontrar el tercer ángulo sabiendo que los tres ángulos deben sumar en total 180° . Entonces, $m\angle A = 180° - 45° - 70° = 65°$. Ahora podemos substituir los valores conocidos hacia la relación de la Ley de Senos como se muestra:

$$\frac{sen65°}{a} = \frac{sen70°}{15} = \frac{\boldsymbol{sen45°}}{\boldsymbol{c}}$$

Tomando dos razones cada vez, podemos resolver las proporciones, para encontrar a y c, usar multiplicación cruzada.

Para encontrar "a":

$$\frac{sen65°}{a} = \frac{sen70°}{15}$$

$$a = \frac{15sen65°}{sen70°} \approx \mathbf{14,5}$$

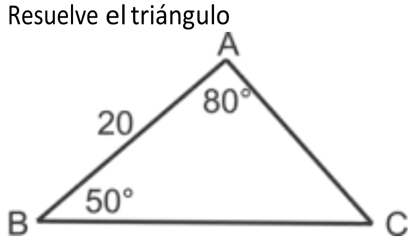
Para encontrar "c"

$$\frac{sen70°}{15} = \frac{sen45°}{c}$$

$$c = \frac{15sen45°}{sen70°} \approx \mathbf{11,3}$$

Este triángulo en particular es un ejemplo en el que nos dan dos ángulos y el lado no incluido o AAL (también LAA).

2. Resuelve el triángulo



Solución: En este ejemplo nos dan dos ángulos y también un lado, pero el lado está entre los ángulos. Nos referimos a esta disposición como ALA. En la práctica, no importa mucho si nos dan AAL o ALA. Seguiremos el mismo procedimiento que en el ejercicio 1. Primero, encuentra el tercer ángulo:

$$m\angle A = 180° - 50° - 80° = 50°$$

Segundo, copia detalladamente las proporciones apropiadas para calcular los lados desconocidos, a y b.

Para encontrar "a":

$$\frac{sen80°}{a} = \frac{sen50°}{20}$$

$$a = \frac{20sen80°}{sen50°} \approx \mathbf{25,7}$$

Para encontrar "b"

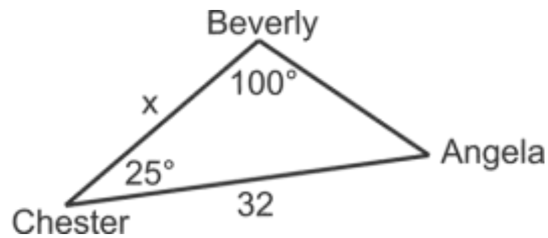
$$\frac{sen50°}{b} = \frac{sen50°}{20}$$

$$b = \frac{20sen50°}{sen50°} \approx \mathbf{20}$$

Observa que $c = b$ y $m\angle C = m\angle B$. Esto ilustra una propiedad de los triángulos isósceles, la cual establece que los ángulos base (los ángulos apuestos a los lados congruentes) también son congruente.

3. Tres barcos pesqueros de una flota están mar adentro. El Chester está a 32 km del Angela. Un oficial del Chester resuelve que el ángulo entre el Angela y el Beverly es 25°. Un oficial del Beverly resuelve que el ángulo entre el Angela y el Chester es 100°. ¿Qué tan alejados están el Chester y el Beverly? Aproxima tu respuesta al kilómetro más cercano?

Solución: Primero, haz un dibujo. Recuerda que cuando decimos que un oficial en una de las naves está midiendo un ángulo, el ángulo que se está midiendo está en el vértice donde el barco se encuentra.



Ahora que tenemos una imagen, podemos determinar el ángulo en Angela y entonces usar la Ley de los Senos para encontrar la distancia entre el Beverly y el Chester.

El ángulo en Angela es 180°-100°-25°=55°

Ahora encuentra “x”:

$$\frac{sen55°}{x} = \frac{sen100°}{32}$$

$$x = \frac{32sen55°}{sen100°} \approx 27$$

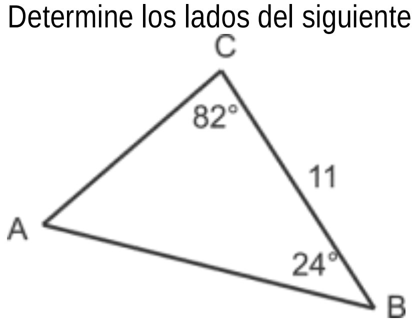
El Beverly y el Chester están alejados a 27 km.

Revisión del Problema Conceptual La medida del tercer ángulo del triángulo es $180° - 60° - 45° = 75°$

$$\frac{sen45°}{x} = \frac{sen75°}{10} \;;x = \frac{10sen45°}{sen75°} \approx \mathbf{7,29}$$

$$\frac{sen60°}{y} = \frac{sen75°}{10} \;;x = \frac{10sen60°}{sen75°} \approx \mathbf{8,93}$$

4. Determine los lados del siguiente triángulo



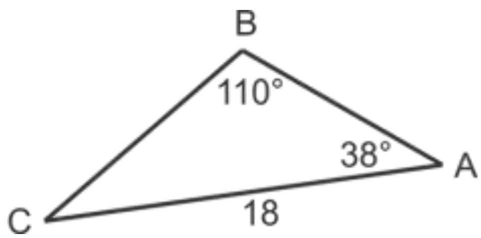
Solución:

m∠A=180°- 82°- 24°=74°

$$\frac{sen24°}{b} = \frac{sen74°}{11} \;;b = \frac{11sen24°}{sen74°} \approx \mathbf{4,7}$$

$$\frac{sen82°}{c} = \frac{sen74°}{11} \;;c = \frac{11sen82°}{sen74°} \approx \mathbf{11,3}$$

5. Determine los lados del siguiente triángulo



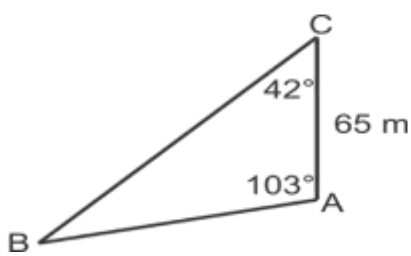
Solución:

m∠C=180°- 110°- 38°=32°

$\frac{sen38°}{a}=\frac{sen110°}{18}$;$a=\frac{18sen38°}{sen110°}\approx \mathbf{11,8}$

$\frac{sen32°}{c}=\frac{sen110°}{18}$;$c=\frac{18sen32°}{sen110°}\approx \mathbf{10,2}$

6. Un equipo de investigación está midiendo la distancia entre punto *A* ubicado en un lado del río y punto *B* al otro lado del río. Un investigador se encuentra en el punto *A* y el segundo se encuentra en el punto *C*, 65 m más arriba del punto *A*. Siguiendo la orilla del río. El investigador en el punto *A* calcula que el ángulo entre los puntos *B* y *C* es 103°. El investigador en el punto *C* calcula que el ángulo entre los puntos *A* y *B* es 42°. Encuentra la distancia entre los puntos *A* y *B.*

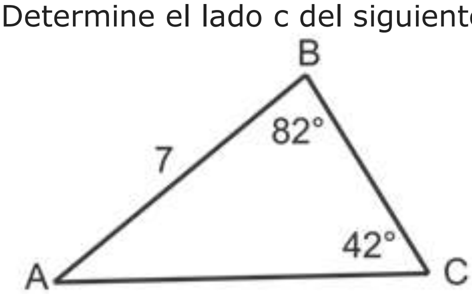


Solución:

m∠B=180°- 103°- 42°=35°

$\frac{sen35°}{65}=\frac{sen42°}{c}$;$c=\frac{65sen42°}{sen35°}\approx \mathbf{75,8}$

7. Determine el lado c del siguiente triangulo



Solución:

m∠B=180°- 82°- 42°=56°

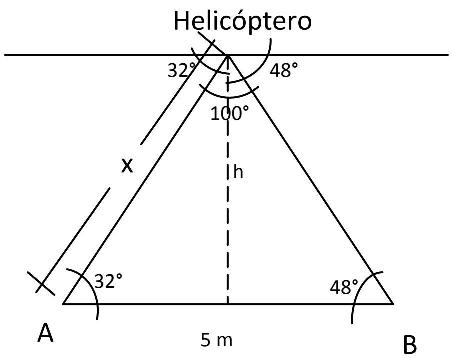
$\frac{sen56°}{7}=\frac{sen42°}{c}$;$c=\frac{7sen42°}{sen56°}\approx \mathbf{5,64}$

8. Un piloto de un helicóptero está volando sobre una carretera recta. El observa dos motos con ángulos de depresión de32º y 48º respectivamente, los cuales están a 5 metros de distancia entre sí (entre A y B la distancia =5m). (Ver figura). Determinar: La distancia del helicóptero al punto A y la altitud del helicóptero.

Solución:

Calculemos la distancia del helicóptero al punto A, aplicando ley de seno:

$$\frac{x}{\sin 48°}=\frac{5m}{\sin 100°}$$



$$x = \frac{5m\,.\ \sin 48°}{\sin 100°} = \frac{5m\,.\ 0{,}7431}{0{,}9848} = \frac{3{,}72m}{0{,}9848}$$
$$= 3{,}77m$$

$$\boldsymbol{x = 3{,}77m}$$

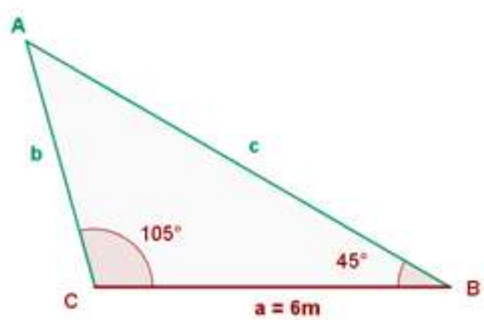
Calculemos la altitud del helicóptero:

$$\sin 32° = \frac{h}{x} = \frac{h}{3{,}77m}$$

$$h = 3{,}77m\,.\ \sin 32° = 3{,}77m\,.\ 0{,}5299$$
$$= 1{,}99m$$

$$\boldsymbol{h = 1{,}99m}$$

9. De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Determina los restantes elementos.



Solución:

A= 180°-45°-105°=30°

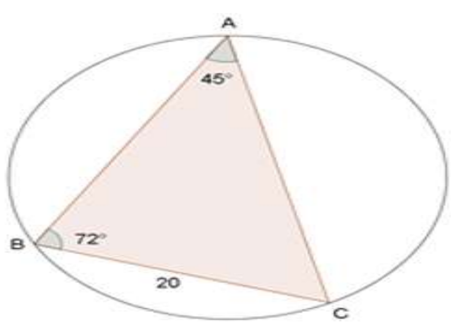
$$\frac{6}{Sen\ 30°} = \frac{b}{Sen\ 45°}$$

$$b=6.\frac{Sen\ 45°}{Sen\ 30°} = 6.\frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = \boldsymbol{6\sqrt{2}m}$$

$$\frac{6}{Sen\ 30°} = \frac{c}{Sen\ 105°}$$

$$c=6.\frac{Sen\ 105°}{Sen\ 30°} = \boldsymbol{11{,}6m}$$

10 Hallar el radio del círculo circunscrito en un triángulo, donde A = 45°, B = 72° y a=20m.



$$\frac{a}{Sen\ A} = 2R$$

$$R = \frac{20}{2\ Sen\ 45°} = 14{,}14$$

R=14,14