

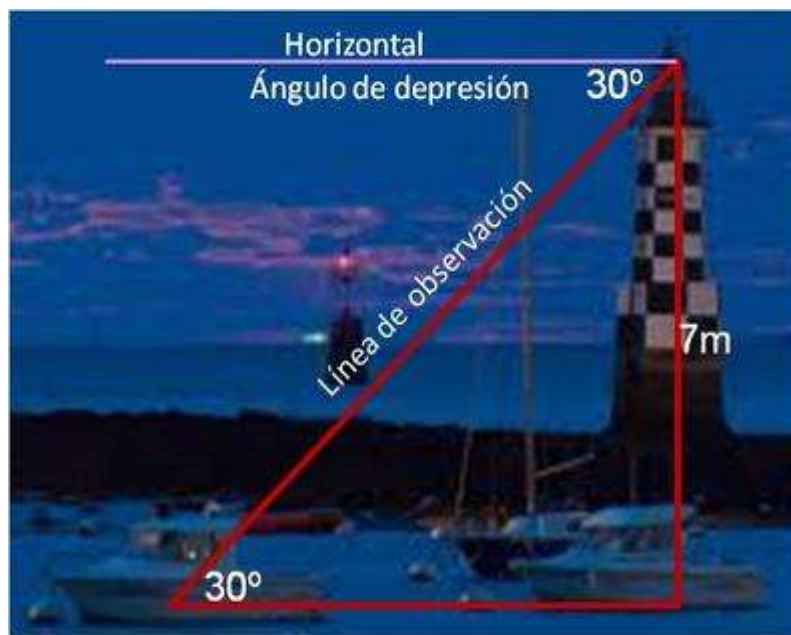
Razones trigonométricas en triángulo rectángulo

La trigonometría, enfocada en sus inicios solo al estudio de los triángulos, se utilizó durante siglos en topografía, navegación y astronomía.

Esta rama de la Geometría se ocupa de la medida de los elementos de los triángulos. En la determinación de esas medidas desempeñan un papel importante las funciones circulares, razón por la cual suelen denominarse funciones trigonométricas y su estudio incluye en el de la trigonometría.

EJEMPLO N° 1

Desde la cima de un faro de 7m de alto, se observa un barco con un ángulo de depresión de 30° , como lo muestra la siguiente figura. Calcular la distancia desde la cima del faro hasta el barco.



Solución:

Se tienen los siguientes datos:

- El ángulo de la base del triángulo es 30° puesto que la línea horizontal y el suelo son paralelos.
- La altura del faro es de 7m y representa el cateto opuesto del triángulo que se forma.
- x es el valor desconocido que corresponde a la distancia desde la cima del faro hasta el barco.

Por lo tanto:

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{7\text{m}}{x} \text{ despejando la ecuación se tiene:}$$

$$x = \frac{7\text{m}}{0,5} \rightarrow x = 14\text{m}$$

Respuesta: La distancia desde la cima del faro hasta el barco es de 14 m.

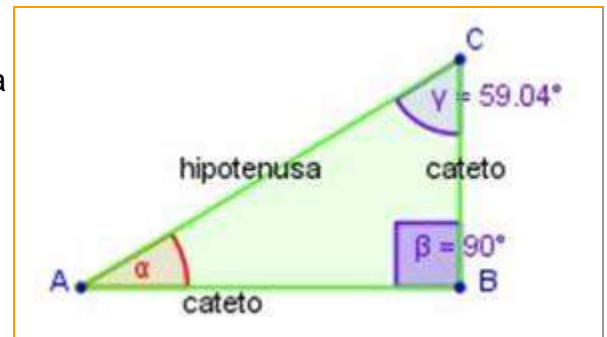
Nota: En este tipo de problemas se utiliza la razón trigonométrica más apropiada para resolver y darle respuesta al cuestionamiento, esto de acuerdo a los datos que nos del ejercicio.

Etimológicamente, trigon significa triángulo, y metron, medida. Por lo tanto, trigonometría se puede definir como "medida de triángulos".

Para establecer las razones trigonométricas, en cualquier triángulo rectángulo, es necesario conocer sus elementos. Para ello, veamos la figura a la derecha:

Los ángulos con vértice en A y C son agudos, el ángulo con vértice en B es recto.

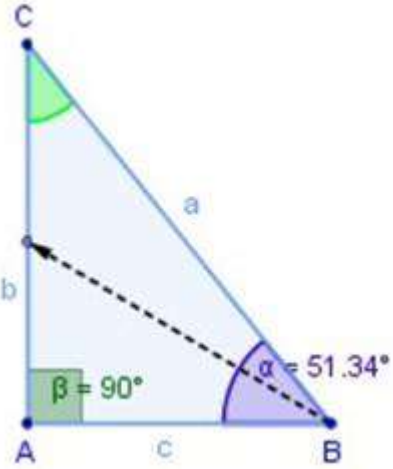
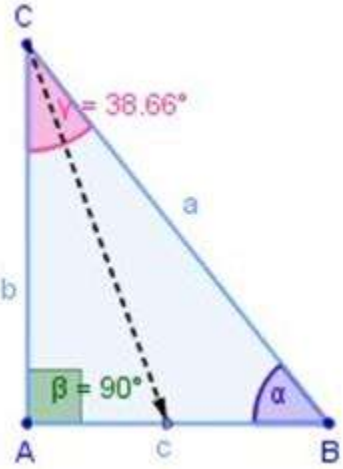
Este triángulo se caracteriza por que los lados de los ángulos agudos (α y γ son la hipotenusa y un cateto, y los lados del ángulo recto (β) son los catetos.



Cada uno de los ángulos agudos del triángulo, uno de cuyos lados es la hipotenusa, se relaciona con los catetos, que pueden ser cateto opuesto al ángulo o cateto adyacente al ángulo.

Cateto adyacente es aquel que forma parte del ángulo al cual se hace referencia.

Con los siguientes ejemplos, veamos lo dicho:

Si consideramos el ángulo α	Si consideramos el ángulo α
	
<p>Si consideramos el ángulo α cateto adyacente = $\overline{AB} = c$ cateto opuesto = $\overline{CA} = b$</p>	<p>Si consideramos ángulo α cateto adyacente = $\overline{CA} = b$ cateto opuesto = $\overline{AB} = c$</p>

Seis son las razones o funciones trigonométricas que se pueden establecer para cualquiera de los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo; de ellas, tres son fundamentales y tres son recíprocas, como lo vemos en el siguiente cuadro:

Funciones (razones) trigonométricas			
Fundamentales		Recíprocas	
sen	seno	cosec (csc)	cosecante
cos	coseno	sec	secante
tan (tg)	tangente	cotan (cotg)	cotangente

Las razones trigonométricas con respecto a alfa (α) se definen como:

Seno

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AC} \text{ (seno de } \alpha)$$

Seno, es la razón (división) entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa

Coseno

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{AC} \text{ (coseno de } \alpha)$$

coseno, es la razón (división) entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa

Tangente

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{BC}{AB} \text{ (tangente de } \alpha)$$

Tangente, es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al mismo.

Estas tres (seno, coseno, tangente) son las razones fundamentales que se pueden establecer entre un ángulo agudo y los lados del triángulo rectángulo del cual forman parte.

A cada razón fundamental corresponde una razón recíproca, llamadas así porque cada una es la inversa de otra fundamental.

Las tres siguientes son las razones recíprocas que se pueden establecer respecto al mismo ángulo:

Cosecante

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{AC}{BC} \text{ (cosecante de } \alpha)$$

cosecante, es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo, y como es la recíproca del seno de α se puede expresar como

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}} = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \text{ (cosecante de } \alpha)$$

Secante

$$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{AC}{AB} \text{ (secante de } \alpha)$$

secante, es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo, y como es la recíproca del coseno de α se puede expresar como

$$\sec \alpha = \frac{1}{\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}} = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ (secante de } \alpha \text{)}$$

Cotangente

$$\cotg \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{AB}{BC} \text{ (cotangente de } \alpha \text{)}$$

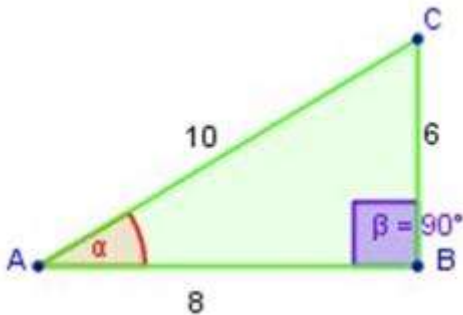
cotangente, es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto puesto al mismo, y como es la recíproca de la tangente de ase puede expresar como

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}} = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \text{ (cotangente de } \alpha \text{)}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dado el triángulo **ABC** rectángulo en **B** (figura a la derecha).

Sean sus catetos **AB = 8 cm** y **BC = 6 cm**.



Aplicamos el **Teorema de Pitágoras** y calculamos la hipotenusa, que es:

$$8^2 + 6^2 = 10^2; \text{ o sea, es igual a } 10 \text{ cm}$$

entonces podemos calcular las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{6}{8} = 0,75$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{8}{6} = 1,33$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1,66$$

2. En un triángulo rectángulo $a = 7$ y $c = 25$, encuentra la medida del tercer lado. Calcular las razones trigonométricas.

Solución: Podemos empezar sustituyendo lo que conocemos hacia el Teorema de Pitágoras y entonces calcular el lado que no conocemos, b :

$$\begin{aligned} 7^2 + b^2 &= 25^2 & a=7, b=24, c=25 \\ 49 + b^2 &= 625 \\ b^2 &= 625 - 49 \\ b^2 &= 576 \\ b &= \sqrt{576} \\ b &= 24 \end{aligned}$$

Podemos calcular las razones trigonométricas

$$\text{sen } \theta = \frac{c.o}{H}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{24}{25} = 0,96$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c.a}{H}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{7}{25} = 0,28$$

$$\text{tan } \theta = \frac{c.o}{c.a}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{24}{7} = 3,42$$

$$\text{ctg } \theta = \frac{c.a}{c.o}$$

$$\text{ctg } \theta = \frac{7}{24} = 0,29$$

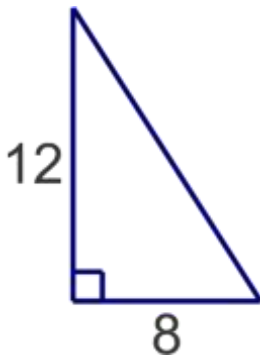
$$\text{sec } \theta = \frac{H}{c.a}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{25}{7} = 3,57$$

$$\text{csc } \theta = \frac{H}{c.o}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{25}{24} = 1,04$$

3. Encuentra la medida del tercer lado del siguiente triángulo. Escribe tu respuesta en la forma radical simplificada. Calcule las razones trigonométricas



Solución: Ya que conocemos las medidas de los dos catetos, podemos insertarlos en el Teorema de Pitágoras y encontrar la medida de la hipotenusa.

$$\begin{aligned} 8^2 + 12^2 &= c^2 \\ 64 + 144 &= c^2 \\ c^2 &= 208 \\ c &= \sqrt{208} \\ c &= 14,33 \end{aligned}$$

Podemos calcular las razones trigonométricas

$$\text{sen } \theta = \frac{c.o}{H}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{12}{14,33} = 0,83$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c.a}{H}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{8}{14,33} = 0,55$$

$$\text{tan } \theta = \frac{c.o}{c.a} \quad \text{tan } \theta = \frac{12}{8} = 1,5$$

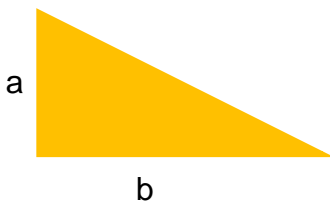
$$\text{ctg } \theta = \frac{c.a}{c.o} \quad \text{ctg } \theta = \frac{8}{12} = 0,66$$

$$\text{sec } \theta = \frac{H}{c.a}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{14,33}{8} = 1,79$$

$$\text{csc } \theta = \frac{H}{c.o} \quad \text{csc } \theta = \frac{14,33}{12} = 1,19$$

4. Determina si un triángulo cuyas medidas son: $a=21, b=28, c=35$ es un triángulo rectángulo. Luego calcular las razones trigonométricas



Solución: Necesitamos ver si estos valores cumplirán $a^2 + b^2 = c^2$. Si es así, entonces se forma un triángulo rectángulo. Entonces:

$$\begin{aligned} 21^2 + 28^2 &= 441 + 784 = 1225 \\ 35^2 &= 1225 \end{aligned}$$

Si, se cumple el Teorema de Pitágoras por estas medidas y el triángulo rectángulo se forma por las medidas 21, 28 y 35. Calculemos las Razones trigonométricas.

a=cateto opuesto
 b=cateto adyacente
 c=hipotenusa

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{21}{1225} = \mathbf{0,017}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{28}{1225} = \mathbf{0,8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{21}{28} = \mathbf{0,75}$$

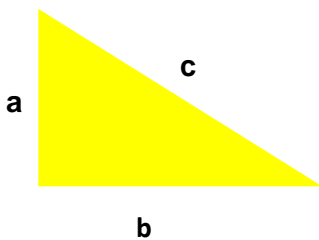
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{28}{21} = \mathbf{1,33}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1225}{28} = \mathbf{43,75}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1225}{21} = \mathbf{58,33}$$

5. Para los dos lados conocidos, determina la medida del tercer lado si el triángulo es un triángulo rectángulo. Luego calcula las razones trigonométricas

$$a = 10 \text{ y } b = 5$$



Solución:

Necesitamos ver si estos valores cumplirán $a^2 + b^2 = c^2$. Si es así, entonces se forma un triángulo rectángulo. Entonces:

$$c^2 = 5^2 + 10^2$$

$$c^2 = 25 + 100$$

$$c^2 = 125$$

$$c = \sqrt{125}$$

$$\mathbf{c = 11,18}$$

Calculemos las Razones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{11,18} = \mathbf{0,44}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{10}{11,18} = \mathbf{0,8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{10} = \mathbf{0,5}$$

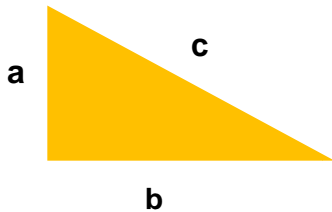
$$\cotg \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{11,18}{10} = 1,18$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{11,18}{5} = 2,23$$

6. Para los dos lados conocidos, determina la medida del tercer lado si el triángulo es un triángulo rectángulo. Luego calcule las razones trigonométricas

$$a = 13 \text{ y } b = 5$$



Solución:

Necesitamos ver si estos valores cumplirán $a^2 + b^2 = c^2$. Si es así, entonces se forma un triángulo rectángulo. Entonces:

$$c^2 = 13^2 + 5^2$$

$$c^2 = 169 + 25$$

$$c^2 = 194$$

$$c = \sqrt{194}$$

$$c = 13,92$$

Calculemos las Razones trigonométricas.

$$\sen \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{13,92} = 0,35$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{13}{13,92} = 0,93$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{13} = 0,38$$

$$\cotg \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{13}{5} = 2,6$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{13,92}{13} = 1,07$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{13,92}{5} = 2,78$$

7. Para los dos lados conocidos, determina la medida del tercer lado si el triángulo es un triángulo rectángulo. Luego calcule las razones trigonométricas

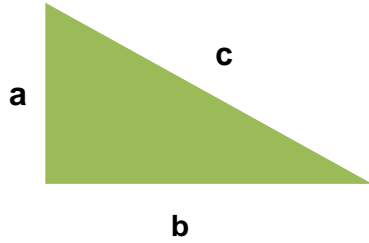
$$a = 5 \text{ y } b = 8$$

Necesitamos ver si estos valores cumplirán

$a^2 + b^2 = c^2$. Si es así, entonces se forma un triángulo rectángulo. Entonces:

$$c^2 = 5^2 + 8^2$$

$$c^2 = 25 + 64$$



$$c^2 = 89$$

$$c = \sqrt{89}$$

$$c = 9,43$$

Calculemos las Razones trigonométricas.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{9,43} = 0,53$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{9,43} = 0,84$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{8} = 0,62$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{9,43}{8} = 1,17$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{9,43}{5} = 1,88$$

8. Para los dos lados conocidos, determina la medida del tercer lado si el triángulo es un triángulo rectángulo. Luego calcule las razones trigonométricas
 $a = 6$ y $b = 9$

Necesitamos ver si estos valores cumplirán $a^2 + b^2 = c^2$. Si es así, entonces se forma un triángulo rectángulo. Entonces:

$$c^2 = 6^2 + 9^2$$

$$c^2 = 36 + 81$$

$$c^2 = 117$$

$$c = \sqrt{117}$$

$$c = 10,81$$

Calculemos las Razones trigonométricas.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{10,81} = 0,55$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{9}{10,81} = 0,83$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{6}{9} = \mathbf{0,66}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{9}{6} = \mathbf{1,5}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{10,81}{9} = \mathbf{1,20}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{10,81}{6} = \mathbf{1,80}$$

9. Para los dos lados conocidos, determina la medida del tercer lado si el triángulo es un triángulo rectángulo. Luego calcule las razones trigonométricas
 $a=7$ y $b=10$

Necesitamos ver si estos valores cumplirán $a^2 + b^2 = c^2$. Si es así, entonces se forma un triángulo rectángulo. Entonces:
 $c^2 = 7^2 + 10^2$
 $c^2 = 49 + 100$
 $c^2 = 149$
 $c = \sqrt{149}$
 $c = 12,20$

Calculemos las Razones trigonométricas.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{7}{12,20} = \mathbf{0,57}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{10}{12,20} = \mathbf{0,81}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{7}{10} = \mathbf{0,7}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{10}{7} = \mathbf{1,42}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{12,20}{10} = \mathbf{1,22}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{12,20}{7} = \mathbf{1,74}$$

10. Para los dos lados conocidos, determina la medida del tercer lado si el triángulo es un triángulo rectángulo. Luego calcule las razones trigonométricas
 $a=8$ y $b=11$

Necesitamos ver si estos valores cumplirán $a^2 + b^2 = c^2$. Si es así, entonces se forma un triángulo rectángulo. Entonces:
 $c^2 = 8^2 + 11^2$
 $c^2 = 64 + 121$
 $c^2 = 185$
 $c = \sqrt{185}$
 $c = 13,60$

Calculemos las Razones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{13,60} = \mathbf{0,58}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{11}{13,60} = \mathbf{0,80}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{8}{11} = \mathbf{0,72}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{11}{8} = \mathbf{1,37}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{13,60}{11} = \mathbf{1,23}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{13,60}{8} = \mathbf{1,7}$$

Profesor : MILITZA INDABURO

Fe y Alegría Versión :2015-10-15

Otras Referencias

<http://www.vitutor.com/al/trigo/triActividades.html>

Videos.

