6

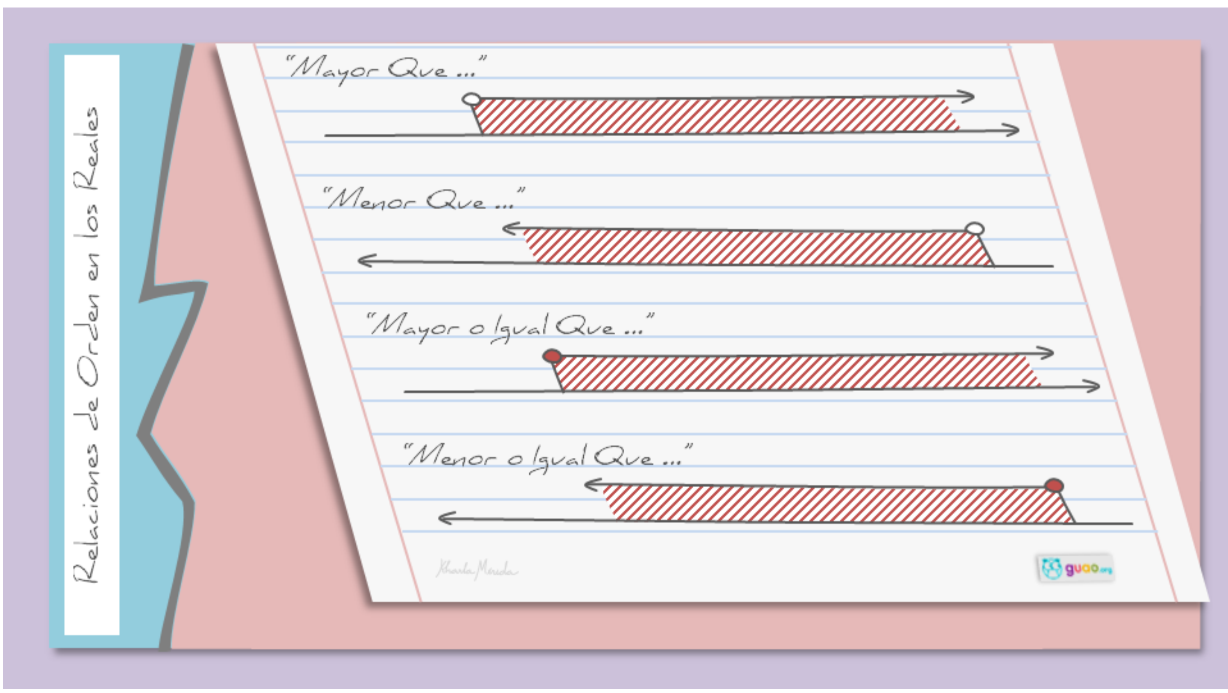
6ta Unidad

Relación de Orden en los Reales

6.1 Símbolos y Propiedades

Felicidad es poder contemplar el pasado como parte de las maravillosas hojas que caen y se hacen abono de la vida en el hoy, y nutriente del fruto del mañana.

Descripción



Otro ámbito importante en Matemática es el estudio de los valores y las relaciones de orden entre expresiones matemáticas. En este objetivo aprendemos las propiedades fundamentales de las relaciones de orden en los reales, en un lenguaje accesible al estudiante de nivel básico, y nos prepara para operar y resolver inecuaciones en los reales.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Naturales y los Números Enteros.

Contenido

Relación de Orden, Propiedades de Relaciones de Orden.

Videos Disponibles

NÚMEROS REALES. Relación de Orden

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

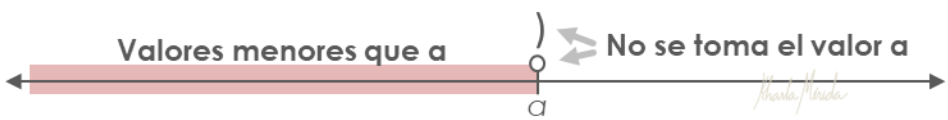
Guiones Didácticos

NÚMEROS REALES. Relaciones de Orden

Los reales, al igual que los conjuntos de números estudiados anteriormente, es un conjunto ordenado. Esto, en sencillas palabras, significa que existen números menores que otros y números mayores que otros, y que es posible relacionar dos o más números según si se aspira a tenerlos en orden creciente o decreciente.

Existen cuatro símbolos que nos permiten establecer relaciones de orden:

< , Menor que. Una relación de la forma, $x < a$ (x menor que *a*), representa el conjunto de valores reales menores que *a*.



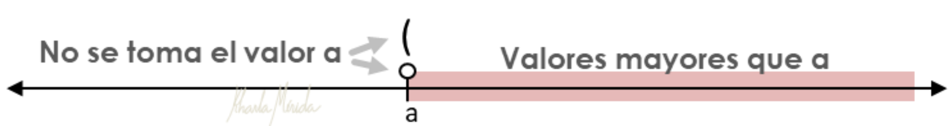
Sobre la recta real indicamos "**x menor que *a***" resaltando todos los puntos de la recta a la izquierda de *a*.

Se utiliza una pequeña circunferencia, o un paréntesis, para indicar que no se toma el valor *a*.

¿Puedes indicar qué número real se encuentra exactamente a la izquierda de *a*?

A diferencia de cuando se trata de números enteros, es imposible determinar qué número está exactamente a la izquierda de a, o qué número es con precisión justamente menor que a. Ver **Propiedad de Densidad**, pág. 4.

> , Mayor que. Una relación de la forma, $x > a$ (x mayor que a), representa el conjunto de valores reales mayores que a.



Sobre la recta real indicamos "**x mayor que *a***" resaltando todos los puntos de la recta a la derecha de *a*.

Se utiliza una pequeña circunferencia, o un paréntesis, para indicar que no se toma el valor *a*.

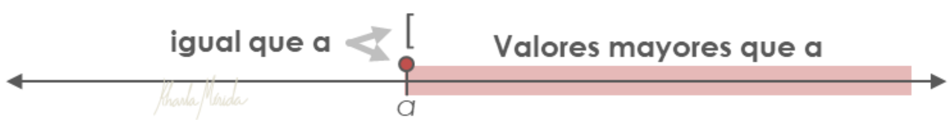
¿Puedes indicar qué número real se encuentra exactamente a la derecha de *a*?

Igual que el caso anterior, es imposible determinar qué número está exactamente a la derecha de a, o qué número es con precisión justamente mayor que a. Ver **Propiedad de Densidad**, pág. 4

≤ , Menor o igual que. Una relación de la forma, $x \leq a$ (x menor o igual que a), representa el conjunto de valores reales menores o iguales que a.

Sobre la recta real indicaremos **x menor que a** resaltando todos los puntos de la recta a la izquierda de a, y para indicar "**o igual que a**" se utiliza un círculo relleno o un corchete.

≥ , Mayor o igual que. Una relación de la forma, $x \geq a$ (x mayor o igual que a), representa el conjunto de valores reales mayores o iguales que a.



Sobre la recta real indicaremos **x mayor que a** resaltando todos los puntos de la recta a la derecha de a, y para indicar "**o igual que a**" se utiliza un círculo relleno o un corchete.

RELACIONES DE ORDEN EN LOS REALES. Propiedades

Propiedad de Densidad. Entre dos números reales existe otro número real, situado entre los dos en la recta real, por muy cerca que estén uno de otro.

Nota: Esta propiedad sustenta el análisis hecho en las relaciones de orden "Menor que" y "Mayor que".

Leyes de Monotonía

De la Suma. Sean a, b y c, números reales, se cumple que:

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Del Producto. Sean a, b y c, números reales, se cumple que:

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$

Ejemplo

Qué valores reales toma "x" sabiendo que $3x + 5 < 11$.

Sumamos -5 a ambos lados de la desigualdad, al -2.

$$3x + 5 < 11$$

$$3x + 5 - 5 < 11 - 5$$

Efectuamos la resta 5 – 5 = 0. Este procedimiento es el soporte formal de lo que conocemos en despeje como: **Pasamos el 5, que está sumando, restando al otro lado**

$$3x < 11 - 5$$

$$3x < 6$$

Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ ambos lados de la desigualdad.

$$3x < 6$$
$$\frac{1}{3} \cdot 3x < \frac{1}{3} \cdot 6$$

Simplificamos el factor 3 en el 1er lado de la desigualdad. Y Efectuamos el producto del 2do lado de la desigualdad.

$$x < \frac{6}{3}$$

Este procedimiento es el soporte formal de lo que conocemos en despeje como:

Pasamos el 3, que está multiplicando, dividiendo al otro lado

$$x < 2$$

Propiedad de Tricotomía en los Reales
Si a y b son números reales, se cumple solo una de las siguientes afirmaciones:
$a>b$ $a=b$ $a<b$

Ejemplo

Qué números reales satisfacen ambas desigualdades $5x+3<23$ y $2x-7>1$.

Para encontrar qué números satisfacen ambas desigualdades, debemos encontrar los que satisfacen cada una y luego encontrar los valores comunes.

Primera Desigualdad

Pasamos 3, que está sumando en el 1er lado de la desigualdad, restando al 2do lado de la desigualdad.

$$5x + 3 < 23$$
$$5x < 23 - 3$$

Efectuamos la resta y pasamos 5, que está multiplicando en el 1er lado de la desigualdad, dividiendo a 20.

$$5x < 20$$
$$x < \frac{20}{5} \rightarrow \boxed{x < 4}$$

Segunda Desigualdad

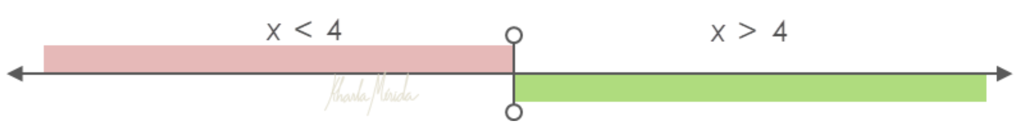
Pasamos 7, que está restando en el 1er lado de la desigualdad, sumando al 1.

$$2x - 7 > 1$$
$$2x > 1 + 7$$

Efectuamos la suma y pasamos 2, que está multiplicando en el 1er lado de la desigualdad, dividiendo a 8.

$$2x > 8$$
$$x > \frac{8}{2} \rightarrow \boxed{x > 4}$$

Ahora debemos identificar los números comunes a ambas soluciones.



La relación $x < 4$ hace referencia a todos los valores reales menores que 4.

La relación $x > 4$ hace referencia a todos los valores reales mayores que 4.

Por **Propiedad de Tricotomía** sabemos que x sólo puede ser mayor que 4 o menor que 4. No puede ser ambas cosas a la vez.
Conclusión: **No hay reales que satisfagan ambas desigualdades**.
En las próximas lecciones aprenderemos cómo representar este tipo de conclusiones.

Propiedad Reflexiva

Sean x, un número real, se cumple que:

$$x \leq x, \text{ entonces } x = x \text{, para todo } x$$

Propiedad Transitiva

Sean a, b y c, tres números reales, se cumple que:

$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c, \text{ entonces } a < c$$

Ejemplo

Qué valores reales toma "y" sabiendo que $y < x$, $4x + 10 < -2$.

Primero hallamos solución a la desigualdad $4x + 10 < -2$

Pasamos 10, que está sumando en el 1er lado de la desigualdad, restando al -2.

Efectuamos la suma algebraica y pasamos 4, que está multiplicando en el 1er lado de la desigualdad, dividiendo a -12.

$$4x + 10 < -2$$
$$4x < -2 - 10$$
$$4x < -12$$
$$x < -\frac{12}{4} \qquad \boxed{x < -3}$$

Sabemos que $y < x$, y ahora tenemos que $x < -3$, aplicamos transitividad

$$y < x \;\;,\;\; x < -3 \;\rightarrow\; y < -3$$

y toma valores reales menores que -3

Propiedad Antisimétrica

Sean a y b, dos números reales, se cumple que:

$$\text{Si } a \geq b \text{ y } a \leq b, \text{ entonces } a = b$$

La relación $a \geq b$ indica dos posibilidades:

- **a** es mayor que **b** o **a** es igual a **b**.

La relación $a \leq b$ indica dos posibilidades:

- **a** es menor que **b** o **a** es igual a **b**.

Por tricotomía no puede ocurrir que $a < b$ y $a > b$ a la vez. Entonces la condición común que satisface ambas relaciones es la condición de igualdad. **a = b**

Signo del Producto

Sean a, b y c, números reales, se cumple que:

$$\text{Si } a > 0 \text{ y } b > 0, \text{ entonces } a \cdot b > 0$$
$$\text{Si } a < 0 \text{ y } b > 0, \text{ entonces } a \cdot b < 0$$
$$\text{Si } a > 0 \text{ y } b < 0, \text{ entonces } a \cdot b < 0$$

Estas propiedades tienen un amplio campo de aplicación tanto en el estudio de desigualdades como en el estudio del signo de expresiones matemáticas. Veamos

- Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b > 0$

Esta propiedad se traduce:

$a > 0$: a es positivo
$b > 0$: b es positivo

$a \cdot b > 0$: **el producto de dos números positivos es positivo**

- Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b < 0$

Esta propiedad se traduce:

$a < 0$: a es negativo
$b > 0$: b es positivo

$a \cdot b < 0$: **el producto de un número negativo por un número positivo es negativo**.

- Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $a \cdot b < 0$

Esta propiedad se traduce:

$a > 0$: a es positivo
$b < 0$: b es negativo

$a \cdot b < 0$: **el producto de un número positivo por un número negativo es negativo**.

Otra forma de ver estas propiedades es:

De las primeras dos propiedades:
Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b > 0$
Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b < 0$

Cuando multiplicamos una cantidad (positiva o negativa) por un valor positivo no se altera su signo.

Cantidad	Factor que Multiplica	Producto
$a > 0$ (positiva)	$b > 0$ (positivo)	$a \cdot b > 0$ (positivo)
$a < 0$ (negativa)		$a \cdot b > 0$ (positivo)

De la tercera propiedad:
Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $a \cdot b < 0$

Cuando multiplicamos una cantidad por un valor negativo se altera su signo.

Cantidad	Factor que Multiplica	Producto
$a > 0$ (positiva)	$b < 0$ (negativo)	$a \cdot b < 0$ (negativo)
$a < 0$ (negativa)		$a \cdot b > 0$ (positivo)

Ejercicios

Describa el conjunto de valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

1. $x + 3 > 14$
2. $2x - 7 < 15$
3. $-6x + 9 \geq 33$
4. $(x + 2) - 11 \geq 2(-x + 5) + 8$
5. $-17 + 3(x + 2) - (4 - x) < 1 + x$
6. $10 - (9 - 7x) - 6x > 5 - (x + 2)$

¿Lo Hicimos Bien?

Describa el conjunto de valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

1. $x > 11$; todos los valores mayores que 11 (no incluye al 11)
2. $x < 11$; todos los valores menores que 11 (no incluye al 11)
3. $x \le -4$; todos los valores menores o iguales que -4 (incluye al -4)
4. $x \ge 9$; todos los valores mayores o iguales que 9 (incluye al 9)
5. $x < 16/3$; todos los valores reales menores que 16/3 (no incluye a 16/3)
6. $x > 1$; todos los valores reales mayores que 1 (no incluye a 1)