3

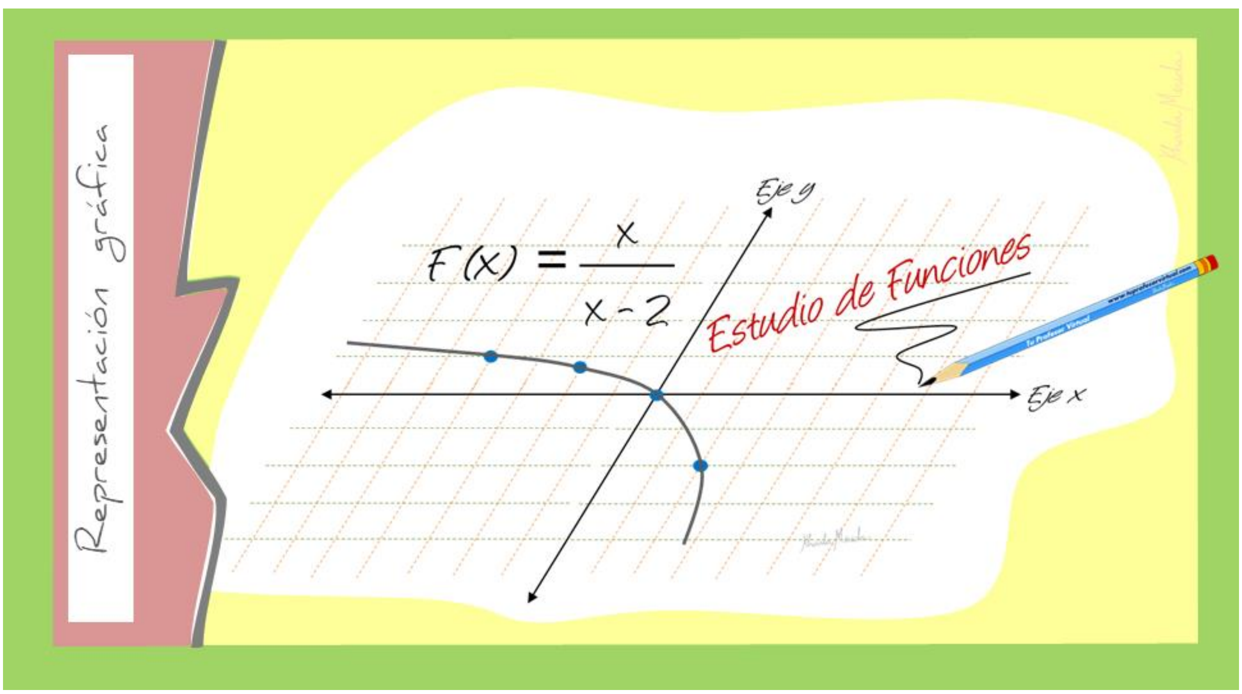
3ra Unidad

Funciones Numéricas

3.4 Representación Gráfica y Análisis de Funciones.

Adquirir nuevos conocimientos es como ascender cuesta arriba en una gran montaña. Cada nuevo aprendizaje nos ubica en un nuevo y más alto mirador, desde el que podemos ver más lejos y más amplio.

Descripción



Con este objetivo práctico fortalecemos las herramientas aprendidas para el estudio de funciones en este nivel académico, preparando buenas bases para conocer más funciones y llevar a cabo el estudio detallado de ellas, analítica y gráficamente. Cada ejercicio desarrollado presenta detalles analíticos del estudio de las funciones dadas, para servir de guía y apoyo en el aprendizaje de este tema.

Conocimientos Previos Requeridos

Números Enteros, Números Racionales, Sistema de Coordenadas Cartesianas, Definición de Función, Dominio, Rango, Tablas de Valores y Gráfico de Funciones, Tipos de Funciones.

Contenido

Representación de Funciones Mediante Tablas de Valores y Pares Ordenados, Imágenes de una Función, Ejercicios.

Videos Disponibles

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tabla de Valores y Graficar. Ejercicio 1

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tabla de Valores y Graficar. Ejercicio 2

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tabla de Valores y Graficar. Ejercicio 3

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tabla de Valores y Graficar. Ejercicio 4

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en el análisis y operaciones.

Guiones Didácticos

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tablas de Valores y Graficar. Ejercicio 1.

Dada la función **F**: {**-2**, **-1**, **0**, **1**, **2**} → **Z** , **F**(**x**) = **x** , hallar las imágenes de cada uno de los elementos del dominio y representar gráficamente.

Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor del dominio en la función, ocupando el lugar de la **x**. Veamos,

{-2, -1, 0, 1, 2} F(x) = x

Dispongamos de los valores del dominio, **x**, en forma ordenada y preparémonos para sustituirlos en ***F*(*x*)**.

x = -2	F(-2) =
x = -1	F(-1) =
x = 0	F(0) =
x = 1	F(1) =
x = 2	F(2) =

Recordemos: Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor de **x** en la imagen de la función, ***F*(*x*)**. Esto es, en cada **x** sustituimos los valores del dominio.

{-2, -1, 0, 1, 2} F(x) = x

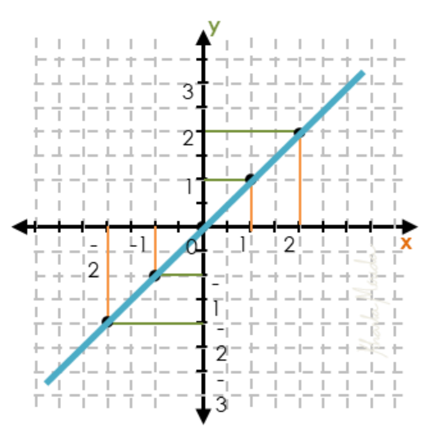
x = a	F(a) = a
x = -2	F(-2) = -2
x = -1	F(-1) = -1
x = 0	F(0) = 0
x = 1	F(1) = 1
x = 2	F(2) = 2

Nota: cada valor del dominio, **x**, y su imagen, ***f*(*x*)** son iguales.

Cuando las imágenes de una función son iguales a sus correspondientes elementos en el dominio, se trata de la **Función Identidad**, es decir, que para cualquier valor **x** del dominio, ***f*(*x*)** = **x**.

Función Identidad

F(**x**) = **x**



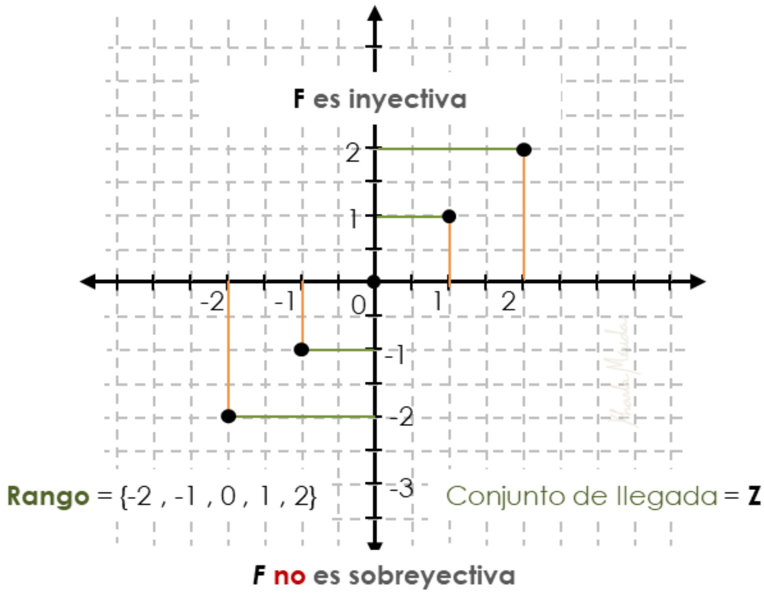
Para representar gráficamente:

Seguimos las líneas guías correspondientes para ubicar (-2 , -2) , (-1, -1) , (0 , 0) , (1, 1) y (2, 2).

Esta secuencia de puntos están alineados, es decir que podemos superponer una línea sobre ellos y todos quedarían cubiertos por ella.

Nota: También se observa que:

- **Todos los valores del dominio tienen imágenes distintas**, por lo que ***f*** es **inyectiva**,
- **El rango no coincide con el conjunto de llegada**, así que f **no es sobreyectiva**



Nota: Si el conjunto de llegada de **f** es {**-2**, **-1**, **0**, **1**, **2**} entonces **f** es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto biyectiva.

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tablas de Valores y Graficar. Ejercicio 2.

Dada la función F: {-2, -1, 0, 1, 2} → Z , F(x) = x^2 , hallar las imágenes de cada uno de los elementos del dominio y representar gráficamente

Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor del dominio en la función, ocupando el lugar de la **x**. Veamos,

{**-2**, **-1**, **0**, **1**, **2**}   F(**x**) = x^2

Dispongamos de los valores del dominio, **x**, en forma ordenada y preparémonos para sustituirlos en ***F(x)***.

$x = -2$ $F(-2) = (-2)^2 = 4$

$x = -1$ $F(-1) = (-1)^2 = 1$

$x = 0$ $F(0) = (0)^2 = 0$

$x = 1$ $F(1) = (1)^2 = 1$

$x = 2$ $F(2) = (2)^2 = 4$

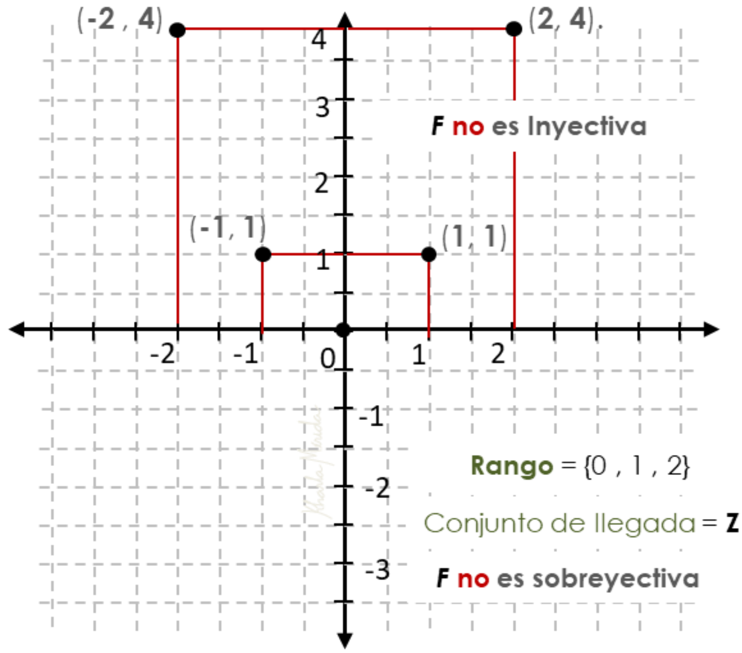
Recordemos: Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor de **x** en la imagen de la función, ***F(x)***. Esto es, en cada **x** sustituimos los valores del dominio.

{**-2**, **-1**, **0**, **1**, **2**}   F(**x**) = x^2

Ordenamos estos valores en una tabla, y representaremos gráficamente

x	F(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Siguiendo las líneas guías correspondientes ubicaremos: (-2 , 4) , (-1, 1) , (0 , 0) , (1, 1) y (2, 4).



También se observa que:

- **Cada par de valores opuestos del dominio tienen imágenes iguales**, por lo que ***f*** es **no inyectiva**,
- **El rango no coincide con el conjunto de llegada**, así que f **no es sobreyectiva**

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tablas de Valores y Graficar. Ejercicio 3.

Dada la función F: {-2, -1, 0, 1, 2} → Z , $F(x) = x^3$, hallar las imágenes de cada uno de los elementos del dominio y representar gráficamente

Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor del dominio en la función, ocupando el lugar de la **x**. Veamos,

{**-2**, **-1**, **0**, **1**, **2**}   F(**x**) = x^3

Dispongamos de los valores del dominio, **x**, en forma ordenada y preparémonos para sustituirlos en ***F*(*x*)**.

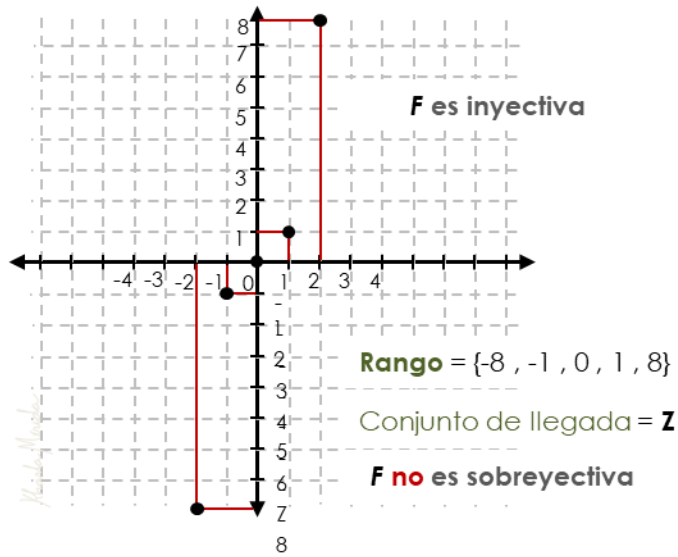
x = -2	**F(-2) = (-2)³ = -8**
x = -1	**F(-1) = (-1)³ = -1**
x = 0	**F(0) = (0)³ = 0**
x = 1	**F(1) = (1)³ = 1**
x = 2	**F(2) = (2)³ = 8**

Recordemos: Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor de **x** en la imagen de la función, ***F*(*x*)**. Esto es, en cada **x** sustituimos los valores del dominio.

{**-2**, **-1**, **0**, **1**, **2**}   F(**x**) = x^3

ordenaremos estos valores en una tabla, y representaremos gráficamente

x	F(x)
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8



Si observamos la gráfica notamos que:

- Todos los elementos del dominio tienen imágenes diferentes, entonces **f** es **inyectiva**.
- El rango está conformado por 5 números, -8, -1, 0, 1, 8 y el conjunto de llegada es los enteros. Como el rango no coincide con el conjunto de llegada **f** no es **sobreyectiva**.

FUNCIONES. Imágenes de una Función. Construir Tablas de Valores y Graficar. Ejercicio 4.

Dada la función **F**: {**-2**, **-1**, **0**, **1**, **2**} → **Z** , **F**(**x**) = **x²** + **1**, hallar las imágenes de cada uno de los elementos del dominio, realizar la tabla de valores y representar gráficamente.

Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor del dominio en la función, ocupando el lugar de la **x**. Veamos,

{-2, -1, 0, 1, 2} F(x) = $x^2 + 1$

Dispongamos de los valores del dominio, **x**, en forma ordenada y preparémonos para sustituirlos en *F*(*x*).

x = **-2** F(-2) = $(-2)^2 + 1 = 5$

x = **-1** F(-1) = $(-1)^2 + 1 = 2$

x = **0** F(0) = $(0)^2 + 1 = 1$

x = **1** F(1) = $(1)^2 + 1 = 2$

x = **2** F(2) = $(2)^2 + 1 = 5$

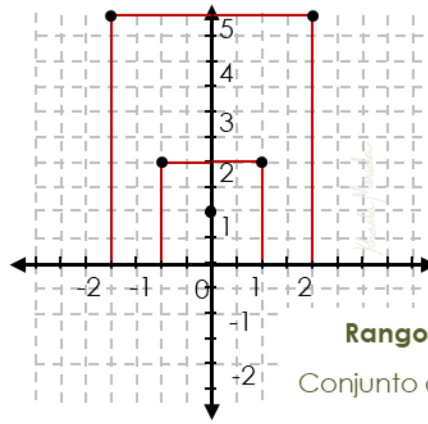
Recordemos: Para hallar las imágenes debemos sustituir cada valor de **x** en la imagen de la función, *F*(*x*). Esto es, en cada **x** sustituimos los valores del dominio.

{-2, -1, 0, 1, 2} F(x) = $x^2 + 1$

ordenaremos estos valores en una tabla, y representaremos gráficamente

F: {-2, -1, 0, 1, 2} → Z , F(x) = x^2 + 1

x	F(x)
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5



Rango = {1 , 2 , 5}

Conjunto de llegada = **Z**

***F* no es sobreyectiva**

Si observamos la gráfica notamos que:

- Todos los elementos opuestos del Dominio tienen imágenes iguales, entonces **f** es **inyectiva**.
- El rango está conformado por 3 números, **1**, **2**, **5**, y el conjunto de llegada es los enteros. Como el rango no coincide con el conjunto de llegada **f** no es **sobreyectiva**.

A Practicar

Hacer el estudio analítico y gráfico de cada función:

1. $F: A \to B$, $F(x) = \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ A = *enteros positivos pares* , $B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , \ldots\}$

- Identificar, Dominio, Conjunto de Llegada, Imagen.
- Realizar la tabla de valores y Gráfico, e Identificar el Rango.
- Identificar Tipo de Función: ***Inyectiva***, ***Sobreyectiva***, ***Biyectiva***.

2. $G: E \to K$, $G(x) = \dfrac{10}{x+1}$ $\qquad$ $E = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$
$K = Q^{+}$

- Identificar, Dominio, Conjunto de Llegada, Imagen.
- Realizar la tabla de valores y Gráfico, e Identificar el Rango.
- Identificar Tipo de Función: ***Inyectiva***, ***Sobreyectiva***, ***Biyectiva***.
- ¿Qué sucede si $K = \{1 , 10/9 , 5/4 , 10/7 , 5/3 , 2 , 5/2 , 10/3 , 5 , 10\}$?

3. $H: C \to D$, $H(x) = 4x^2$ $\qquad$ $C = \{-1 , -1/2 , 0 , 1/2 , 1\}$
$D = \{0 , 1 , 4\}$

- Identificar, Dominio, Conjunto de Llegada, Imagen.
- Realizar la tabla de valores y Gráfico, e Identificar el Rango.
- Identificar Tipo de Función: ***Inyectiva***, ***Sobreyectiva***, ***Biyectiva***.
- ¿Qué sucede si **H** está definida $H: Z \to Z$?
- ¿Qué sucede si **H** está definida $H: Q \to Q$?

4. $f: A \to C$, $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ $\qquad$ $C = \{-2 , -1 , 0 , 1\}$
$D = \{1/2 , 1/3 , 0 , -1\}$

- Identificar, Dominio, Conjunto de Llegada, Imagen.
- Realizar la tabla de valores y Gráfico, e Identificar el Rango.
- Identificar Tipo de Función: ***Inyectiva***, ***Sobreyectiva***, ***Biyectiva***.
- ¿Qué sucede con f cuando $x = 2$?
- Hallar las imágenes $f(1{,}1)$, $f(1{,}2)$, $f(1{,}3)$, $f(1{,}4)$, $f(1{,}5)$, $f(1{,}6)$, $f(1{,}7)$, $f(1{,}8)$, $f(1{,}9)$
- ¿Qué sucede con los valores de la imagen a medida que **x** aumenta de **1,1** a **1,9**?

5. $f: Z \to Z$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$

Hallar: $f(a)$, $f(c-4)$, $f(c+2)$, $f(6c)$, $\dfrac{f(-2)+f(2)}{2}$, $f(c+2)-f(c)$

Lo Hicimos Bien?

1. $F: A \to B$, $F(x) = \dfrac{x}{2}$ A = *enteros positivos pares* , $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

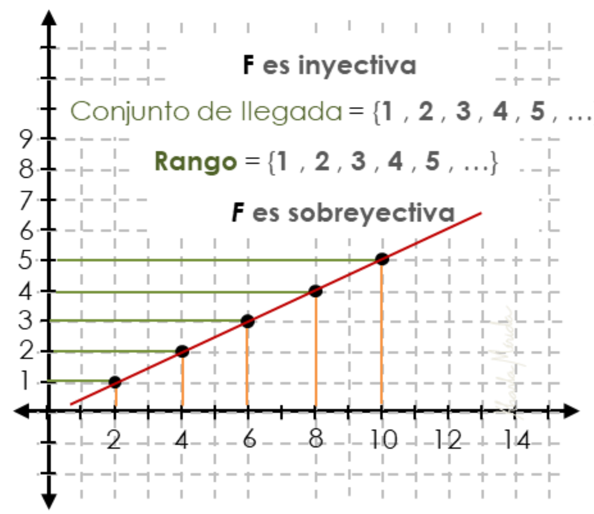
La Definición de la función ***F*** nos dice que:
Dom$_f$: enteros positivos pares, **A** = {**2** , **4**, **6**, **8**, **10**, …}
Conjunto de Llegada: ***B*** = {**1** , **2** , **3** , **4** , **5** , …}
Imagen: $F(x) = \dfrac{x}{2}$

F relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del Dominio tienen imágenes diferentes, **F** es **Inyectiva**.
- Rango: {**1** , **2** , **3** , **4** , **5** , …}
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **F** es **Sobreyectiva**.

X	F(x)
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5

F es **Biyectiva**



2. $G: E \to K$, $G(x) = \dfrac{10}{x+1}$ $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$K = Q^{+}$

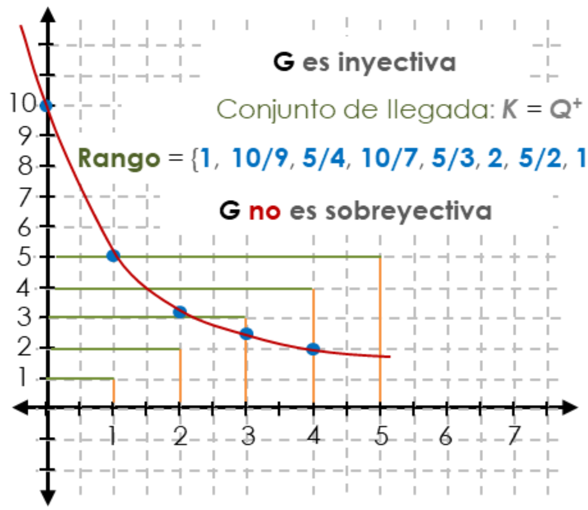
La Definición de la función **G** nos dice que:
Dom$_f$: enteros positivos pares, **E** = *{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}*
Conjunto de Llegada: $K = Q^{+}$
Imagen: $G(x) = \dfrac{10}{x+1}$

G relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del Dominio tienen imágenes diferentes, **G** es **Inyectiva**.
- Rango: *{1 , 10/9 , 5/4 , 10/7 , 5/3 , 2 , 5/2 , 10/3 , 5 , 10}*
- No Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **G** no es **Sobreyectiva**.

X	G(x)
0	10
1	5
2	10/3
3	5/2
4	2
5	5/3

G es **Inyectiva**



Si ***K* = {*1* , *10/9* , *5/4* , *10/7* , *5/3* , *2* , *5/2* , *10/3* , *5* , *10*}** entonces $\mathbf{Rgo_f = K}$,
Así que **G es Sobreyectiva**, y por lo tanto **G es Biyectiva.**

3. $H\!: C \to D \;,\; H(x) = 4x^2$ $\qquad C = \{-1\,,\,-1/2\,,\,0\,,\,1/2\,,\,1\}$
$D = \{0\,,\,1\,,\,4\}$

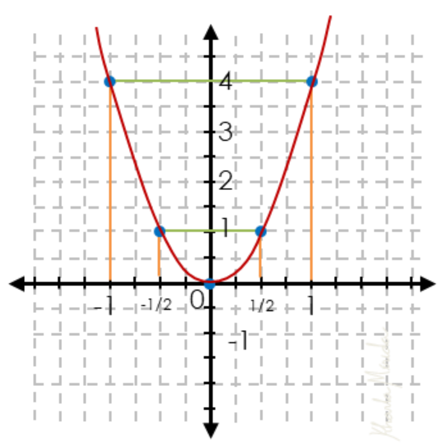
La Definición de la función ***H*** nos dice que:
Dom$_f$: $C = \{-1\,,\,-1/2\,,\,0\,,\,1/2\,,\,1\}$
Conjunto de Llegada: $D = \{0\,,\,1\,,\,4\}$
Imagen: $H(x) = 4x^2$

H relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Cada par de elementos opuestos del Dominio tienen imágenes iguales, **H** no es **Inyectiva**.
- Rango: *{0, 1, 4}*
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **H** es **Sobreyectiva**.

X	H(x)
-1	4
-1/2	1
0	0
1/2	1
1	4

H es **Biyectiva**



H no es inyectiva

Conjunto de llegada: ***D* = {*0* , *1* , *4*}**

Rango = {**0**, **1**, **4**}

***H* es sobreyectiva**

- Si ***H*** está definida $H\!: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, se tienen infinitos (un sin fin de) enteros que no son imágenes de ningún elemento del Dominio. **No es Sobreyectiva**.
- Si ***H*** está definida $H\!: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, se tienen infinitos (un sin fin de) racionales que no son imágenes de ningún elemento del Dominio. **No es Sobreyectiva**.

4. $f\colon A \to C$, $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ $C = \{-2 , -1 , 0 , 1\}$ $D = \{1/2 , 1/3 , 0 , -1\}$

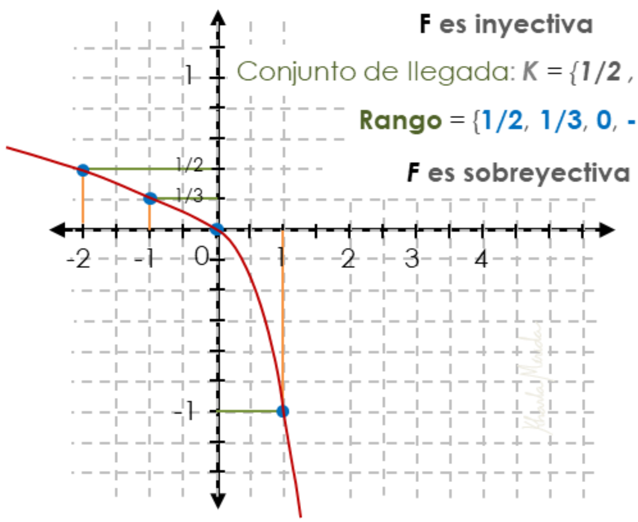
La Definición de la función ***f*** nos dice que:
Dom$_f$: $C = \{-2 , -1 , 0 , 1\}$
Conjunto de Llegada: $D = \{1/2 , 1/3 , 0 , -1\}$
Imagen: $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

f relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Cada par de elementos opuestos del Dominio tienen imágenes iguales, **f** no es **Inyectiva**.
- Rango: $\{1/2 , 1/3 , 0 , -1\}$
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **f** es **Sobreyectiva**.

X	F(x)
-2	1/2
-1	1/3
0	0
1	-1

F es **Biyectiva**



- Si $x = 2$, $f(2) = \dfrac{2}{0}$ No existe la división entre cero. Entonces, no existe la imagen **f(2)**.

$f(1{,}1) = -1{,}\overset{\frown}{2}$ $f(1{,}2) = -1{,}5$ $f(1{,}3) = -1{,}857142$ $f(1{,}4) = -2{,}\overset{\frown}{3}$ $f(1{,}5) = -3$

$f(1{,}6) = -4$ $f(1{,}7) = -5{,}\overset{\frown}{6}$ $f(1{,}8) = -9$ $f(1{,}9) = -19$

- Los valores de la imagen dan grandes saltos hacia la parte negativa a medida que ***x*** aumenta de ***1,1*** a ***1,9***.

Nota: *entre **x = 1** y **x = 1,9** hay **0,9** de diferencia, mientras que la imagen salta 18 unidades, de **-1** a **-19**.*

5. $f(a) = \dfrac{1}{2}a + 3$ $f(c-4) = \dfrac{1}{2}c + 1$ $f(c+2) = \dfrac{1}{2}c + 4$ $f(6c) = 3c + 3$

$\dfrac{f(-2) + f(2)}{2} = 3$ $f(c+2) - f(c) = 1$