Suma de los términos de una progresión aritmética finita

Marco Teórico

Determinaremos ahora una relación matemática que nos permita calcular la suma de los términos de una $P\bar{V}$ finita sin necesidad de construir previamente la progresión.

Sea la progresión

$P\bar{V} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

Designaremos por S_n la suma de todos los términos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Los términos de la expresión anterior los podemos escribir también en la siguiente forma:

$S_n=a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+\ldots+(a_n-2r)+(a_n-r)+a_n$ (1)

Si en la ecuación anterior invertimos el orden de los sumandos obtenemos esta otra ecuación equivalente :

$S_n=a_n+(a_n-r)+(a_n-2r)+\ldots+(a_1+2r)+(a_1+r)+a_1$ (2)

Sumemos ahora miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2):

$S_n=a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+\ldots+(a_n-2r)+(a_n-r)+a_n$ (1)

$\underline{S_n=a_n+(a_n-r)+(a_n-2r)+\ldots+(a_n+2r)+(a_n+r)+a_1}$ (2)

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)$

Como el número de términos es n podemos simplificar el resultado de la siguiente forma:

$2Sn=(a_1+a_n)n$

Y, por último :

$S_n=\frac{(a_1+a_n)\ n}{2}$

Ejemplo Nº1:

1. Determinar la suma de los términos de la siguiente progresión :
   $P\bar{V}$:3, 8, 13,…., 1953

Para calcular la suma debemos conocer previamente el número n de término que tiene la progresión procederemos así :

Calcularemos primero la razón de la progresión :

$r=8-3=5$

Ya conocemos los siguientes datos:

$a_1=3$;$a_n=1953$;$r=5$

Sustituyendo en :

$1953=3+(n-1)5$

$(n-1)5=1950$

$n-1=390$

$n=391$

La suma pedida será

$S_{391}=\frac{(3+1953)\ 391}{2}$

$=\frac{(3+1953)\ 391}{2}$

$S_{391}=\frac{1956.391}{2}$

$S_{391}=382398$

Ejemplo Nº2:

Calcular la suma de los 24 primeros múltiplos de 13

La progresión cuya suma debemos calcular es:

P$\overline{V}$= 13,26,39

Es obvio que la razón es r=13.

Otros datos : $a_1=13$; n=24

Calculo de a_{24}

$a_{24}=13+(24-1)13$

$a_{24}=13+299$

$a_{24}=312$

Cálculo de s_4

$S_{24}=\frac{(13+312)24}{2}$

$=325.12$

$S_{24}=3900$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuántos términos de la P$\overline{V}$:5,9,13 …hay que tomar para que se sumen 1224?

Solución:

Datos :$a_1=5$;r=4

Sustituyendo estos datos en:

$a_n=5+(n-1)4$

$a_n=5+4n-4$

$a_n=1+4n$

Por otra parte sabemos que s_n =1224.por lo tanto :

$1224=\frac{(5+a_n)n}{2}$ (1)

$$(5+a_n)n=2448$$

Sustituyendo el valor de a_n de la ecuación (1)

$(5+1+4n)n=2448$

$6n+4n^2-2448=0$

$4n^2+6n-2448=0$

$(2n)^2+3(2n)-2448=0$

$(2n+51)(n-24)=0$

$n_1=-51/2$; $n_2=24$ Sólo se debe admitir el segundo pues n debe ser entero y positivo. Por lo tanto:

$n=24$

2. ¿Cuál es el primer término mayor que 10^5 en la progresión

$P\overline{V}: 15,50,85,\ldots ?$

Solución

Tenemos una progresión con los siguientes datos :

$a_1=15$;

$r=50-15=35$

Las condiciones del problema son las siguientes :

$a_n>10^5$

Sustituyendo en la ecuación:

$15+(n-1)35>100000$

$15+35n-35>100000$

$35n>100020$

$n>2857,7$

Tenemos pues para que se cumpla la condición del problema ,es decir, para que a_n sea mayor que 10^5 ,el número de términos tiene que ser mayor 2587,7.El primer entero superior a esa cifra es

$n=2858$

Por lo tanto el primer término superior a 10^5 en la ley $P\overline{V}$ dada es

$a_n=a_{2858}$

3. Sumar los veinte primeros términos de la progresión:

   -5, 4, 13, 22, 31, 40

Solución:

Resolución:

- $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot d$

- La diferencia es $d = 9$

- $a_{20} = -5 + (20 - 1) \cdot 9$

  $a_{20} = -5 + 19 \cdot 9 = 166$

$s_{20} = \frac{-5+166}{2}.20 = \mathbf{1610}$

4. Dada la progresión aritmética 8, 3, -2, -7, -12, ..., sumar los términos comprendidos entre a_{24} y a_{36}.

Solución:

Resolución:

- La diferencia es $d = -5$.

$a_{24} = 8 + 23 \cdot (-5) = -107$

$a_{36} = 8 + 35 \cdot (-5) = -167$

Entre ambos hay 36 - 23 = 13 términos.
La suma pedida es
$s_{13} = \frac{(-120)+(-167)}{2}.13 = \mathbf{-1781}$

5. ¿Cuántos términos de la progresión -11, -4, 3, 10, ... hay que tomar para que su suma sea 570?

Solución:

Se sabe que:
$a_1 = -11$, $d = 7$, $a_n = -11 + (n - 1)\,7 = 7n - 18$ y $S_n = 570$.

Se ha de calcular n:

$$570 = \frac{-11 + 7n - 18}{2} \cdot n$$

$$1140 = 7n^2 - 29n$$

$$7n^2 - 29n - 1140 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado:

$$n=\frac{29\pm\sqrt{841+31\,920}}{14}=\frac{29\pm\sqrt{32\,761}}{14}=\frac{29\pm181}{14}=\begin{matrix}\rightarrow 15\\ \rightarrow -\frac{76}{7}\end{matrix}$$

Como n ha de ser entero y positivo $\frac{-76}{6}$ no puede ser la solución ,luego n=15

Glosario

Referencias

http://www.sectormatematica.cl/contenidos/progsuma.htm

Videos.