TEOREMA DE PITÁGORAS.

INTRODUCCIÓN

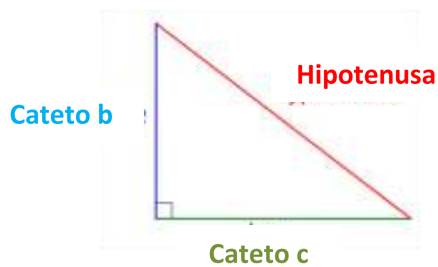
Pitágoras es muy conocido, a pesar de que no publicó ningún escrito durante su vida. Lo que sabemos de Pitágoras ha llegado a través de otros filósofos e historiadores. Pitágoras fue un filósofo y matemático griego conocido por introducir el teorema que lleva su nombre, que indica que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma del cuadrado de los catetos. El teorema no es sólo un postulado geométrico; también tiene aplicaciones en el mundo real.

Suponiendo que la pared de un edificio es de 90º al piso, el teorema de Pitágoras puede usarse para encontrar el lado faltante del triángulo recto que forma.

Una escalera de 7,6 m se inclina contra un edificio de tal forma que la base de la escalera es de 2 m alejado del edificio. ¿Qué tan lejos del edificio puede alcanzar la parte alta de la escalera?. Ejercicios como este, es que está unidad nos permitirá desarrollar.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Permite encontrar la longitud de los lados de un **triángulo rectángulo**, que es un triángulo con un ángulo $90°$ (conocido como ángulo recto). Un ejemplo de un triángulo rectángulo se representa a continuación.



Un triángulo rectángulo se compone de tres partes: dos piernas, que están marcados en el diagrama como **cateto b**, **cateto c**, y una **hipotenusa**, que es el lado opuesto al ángulo recto. La hipotenusa es siempre el más largo de los tres lados. Típicamente, se denota el ángulo recto con un pequeño cuadrado, como se muestra arriba, pero esto no es necesario.

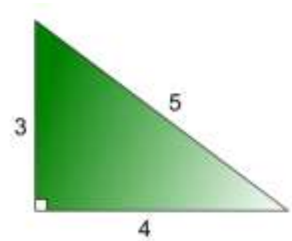
El Teorema de Pitágoras dice que la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos. Esto se escribe matemáticamente como:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Para comprobar esta afirmación vamos a ver un ejemplo.

EJEMPLO 1

Consideremos el triángulo rectángulo de abajo. ¿Se cumple el Teorema de Pitágoras para este triángulo?



Respuesta:

Según la imagen, este triángulo rectángulo tiene lados con longitudes de 3, 4, y 5. El lado de longitud 5, el lado más largo, es la hipotenusa, ya que es opuesto al ángulo recto. Digamos que el lado de longitud 4 es el **cateto c** y el lado de longitud 3 es el **cateto b**.

Recordemos el Teorema de Pitágoras:

$$\boldsymbol{h^2 = a^2 + b^2}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula tendremos que:

$$\boldsymbol{h^2 = a^2 + b^2}$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

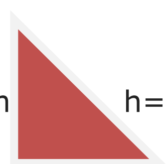
$$25 = 16 + 9$$

$$25 = 25$$

Aunque está claro que el teorema se cumple para este triángulo específico, todavía no hemos demostrado que el teorema se cumplirá para todos los triángulos rectángulos. Una prueba simple, demostrará que el teorema de Pitágoras es universalmente válido.

EJEMPLO 2: Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo de 60 cm de cateto menor y 80 cm de cateto mayor.

Respuesta:



Usando la fórmula del teorema de Pitágoras

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$

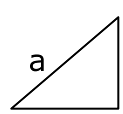
Despejando a tenemos que:

$a = \sqrt{b^2 + c^2} \longrightarrow a = \sqrt{60^2 + 80^2} \longrightarrow a = \sqrt{3600 + 6400} = \sqrt{1\,0000} =$ 100 cm

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una carretera tiene una altura de 6 m por cada 100 m medidos sobre la horizontal ¿Cuánto se recorre por cada 6 m de altura?

Respuesta:



Por medio del teorema de Pitágoras calculemos cuanto recorre a por cada 6m de altura.

Usando la fórmula del teorema de Pitágoras

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$

Despejando a tenemos que:

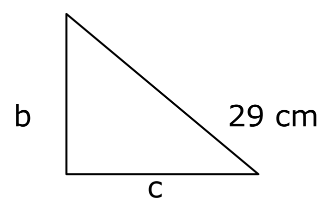
$a = \sqrt{b^2 + c^2} \longrightarrow a = \sqrt{(6\ m)^2 + (100)\ m^2}$

$a = \sqrt{36m^2 + 10000}m^2 = \sqrt{1\ 0036\ m^2}$=100,17 m

2. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 70 cm y la hipotenusa mide 29 cm. Hallar los lados.

Respuesta:

Recordemos que el perímetro es la suma de sus lados pudiéndose escribir que:



P= a + b+ c

Sustituyendo los valores en la fórmula de el perímetro tenemos que:

P= a + b+ c
P= 29 cm + b+ c como P=70 cm entonces:
70 cm= 29 cm + b+ c
70 cm-29 cm = b+ c
41 = + b+ c ….. (1)

Si aplicamos el teorema de Pitágoras a el triángulo nos queda que:

$29^2 = b^2 + c^2$ despejando b

$b = \sqrt{29^2 - c^2}$ …… (2)

Sustituyendo 2 en 1

$41 = \sqrt{29^2 - c^2} + c$

$41 - c = \sqrt{29^2 - c^2}$ Aislando el radical

Elevando al cuadrado ambos miembros y resolviendo

$(41 - c)^2 = 841 - c^2$

1681 – 82c + $c^2 = 841 - c^2$

Transponiendo términos e igualando a cero

1681 – 82c + c^2 + c^2- $841 = 0$

$2c^2 - 82\,c + 840 = 0$

Dividiendo por 2

$c^2 - 41\,c + 420 = 0$

Factorizando la ecuación resultante:

$(c - 20)(c - 21) = 0$

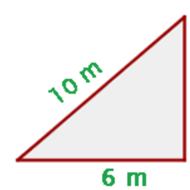
Así; c_1= 20 y c_2= 21

Sustituyendo c_1= 20 en la expresión (1)

41 = + b+ c
41= b + 20
41-20= b
21= b

3. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera diste 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

Respuesta:



Sustituyendo los valores en la fórmula tendremos que:

$\boldsymbol{h^2 = a^2 + b^2}$

$(10m)^2 = (6m)^2 + b^2$

$100m^2 - 36m^2 = b^2$

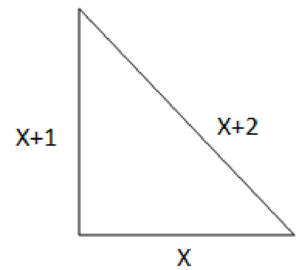
Despejando b

$b = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64m^2}$ = 8 m

4. Un triángulo rectángulo tiene sus 3 lados consecutivos. Calcular el valor del lado menor

Respuesta:
Sean los tres lados consecutivos x, x+1, x+2.

Grafiquemos



Aplicando el teorema de Pitágoras: $\boldsymbol{h^2 = a^2 + b^2}$

$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$

Resolviendo:

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2$

Agrupando términos semejantes e igualando a cero:

$0 = x^2 - 4x - 4 - x^2 + 2x + 1 + x^2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Factorizando la ecuación resultante

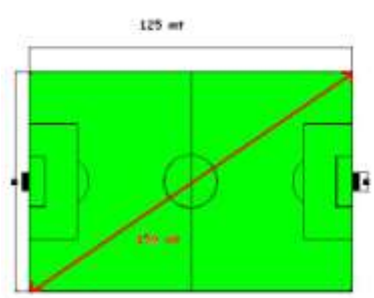
(x-3) (x+1) =0

$X_1 = 3$ y $x_2 = -1$

El valor de $x_2 = -1$ no es real ya que los lados de un triángulo no pueden. ser negativos, obteniendo así $X_1 = 3$ lado menor del triángulo

5. Una cancha de fútbol (rectangular como sabemos) mide 125 metros de largo. Si la longitud de sus diagonales es de 150 metros. ¿Cuál es el ancho del campo de juego?

Respuesta:



Analizando la figura, vemos que el triángulo queda comprendido por esa diagonal del campo de juego (la hipotenusa), el largo del campo (uno de los catetos) y el ancho (el otro cateto cuya longitud es lo que se nos pide hallar). El planteo de resolución sería el siguiente:

$a^2 = b^2 + c^2$
$150^2 = 125^2 + c^2$
$22{,}500 = 15{,}625 + c^2$

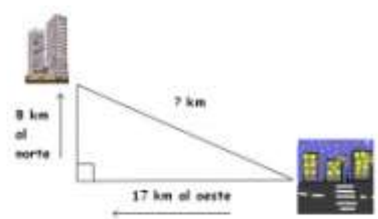
$c^2 = 22{,}500 - 15{,}625 = 6{,}875$
$c = \sqrt{6{,}875}$

$c = 82.9$

El ancho del campo de fútbol es de 82,9 metros

6. Una ciudad se encuentra 17 km al oeste y 8 km al norte de otra. ¿Cuál es la distancia real lineal entre las dos ciudades?

Respuesta:
Este podría ser un buen dibujo, donde observamos que se cumplen los datos que nos da el problema y que además la distancia real entre las ciudades, vendría a ser la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo.



El triángulo entonces queda claramente definido y sabemos que tenemos un cateto que mide 17 km, otro que mide 8 km y que la distancia real que se nos está pidiendo es la hipotenusa del tal triángulo. Aplicamos Teorema de Pitágoras y el planteo sería así:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 8^2 + 17^2 = 64+289=353$

$a = \sqrt{353} = 18.8$

La distancia real entre las dos ciudades es de 18,8 km.

7. Halla la altura de un rectángulo cuya base mide 21 cm y su diagonal, 29 cm.

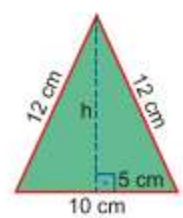
Respuesta:
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$29^2 = x^2 + 21^2$$
$$x^2 = 841 - 441 = 400$$
$$x = \sqrt{400} = 20$$

La altura mide 20 cm.

8. En un triángulo isósceles, la base mide 10 cm y los otros dos lados miden 12 cm cada uno. Halla la altura correspondiente al lado desigual.

Respuesta:



Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$12^2 = h^2 + 5^2$$
$$h^2 = 144 - 25 = 119$$
$$h = \sqrt{119} = 10{,}91$$

La altura mide 10,91 cm

Glosario

- **Hipotenusa:** Lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

- **Catetos:** Es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo los que conforman el ángulo recto. El lado mayor se denomina hipotenusa el que es opuesto al ángulo recto. La denominación de catetos e hipotenusa se aplica a los lados de los triángulos rectángulos exclusivamente.

- **Ángulo recto:** Ángulo que tiene 90 grados.

Otras Referencias

- https://www.youtube.com/watch?v=6-VV3USF-AU

- http://www.vitutor.com/geo/eso/as_e.html

- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/2eso2008/u-8.pdf