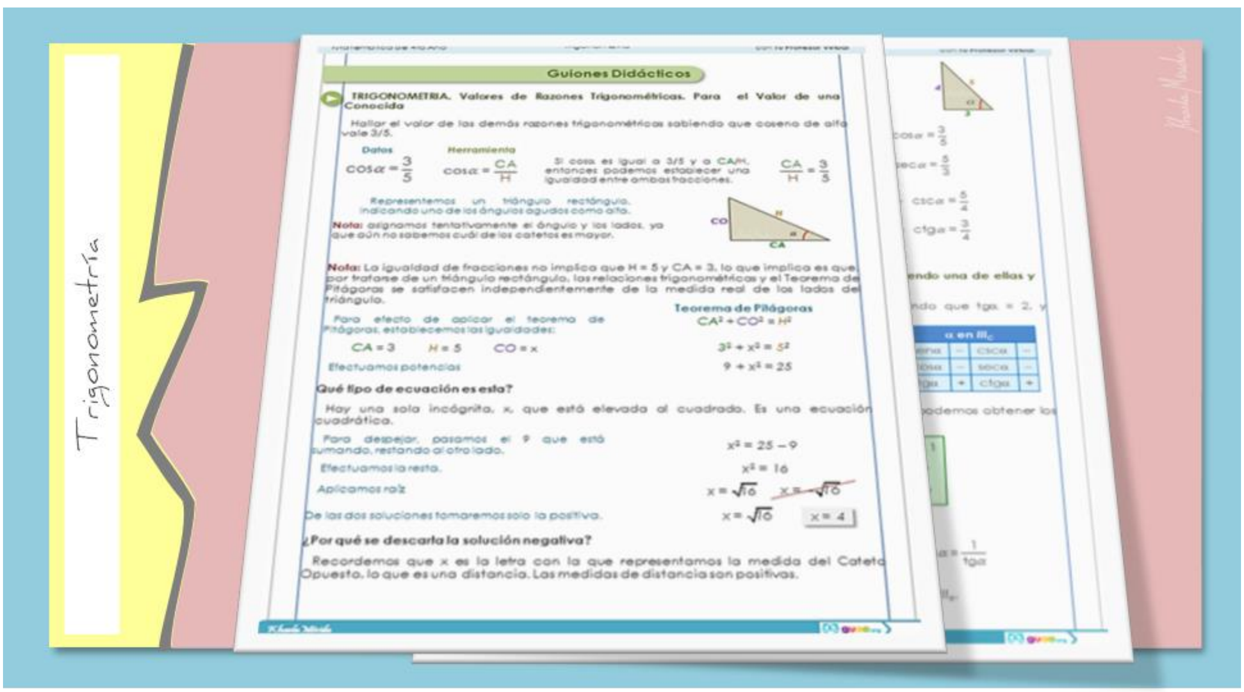
4
4ta Unidad

Trigonometría

4.3 Cálculo de Valores de las Relaciones Trigonométricas.

Ideas surgen, nacen y renacen, y hacen que cada día sea El Día… La magia está cómo vivimos los momentos, los sencillos y los trascendentes.

Descripción



Ya conocemos cuáles son las razones trigonométricas, cómo relacionarlas con las coordenadas de un punto en el plano cartesiano, y hemos obtenido las primeras identidades trigonométricas. En este objetivo pondremos en práctica lo aprendido para calcular el valor de cada razón trigonométrica conociendo el valor de al menos una de ellas, y el signo partiendo del cuadrante donde se encuentre ubicado el ángulo.

Conocimientos Previos Requeridos

Razones Trigonométricas, Teorema de Pitágoras, Ecuaciones de 2do grado, Plano Cartesiano.

Contenido

Valores de la Razones Trigonométricas Conociendo el Valor de una de ella, Seno y Coseno de la Suma, Ley del Seno y del Coseno.

Videos Disponibles

TRIGONOMETRÍA. Valores de R Trigonométricas. Para del Valor de una Conocida
TRIGONOMETRÍA. Valores de R Trigonométricas. Conociendo una de Ellas y el Cuadrante de alfa
TRIGONOMETRÍA. Recursos Para Recordar. Valores de Seno y Coseno para Ángulos Notables

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

TRIGONOMETRIA. Valores de Razones Trigonométricas. Para el Valor de una Conocida

Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que coseno de alfa vale 3/5.

Datos

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}$$

Herramienta

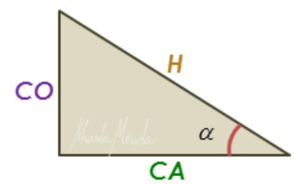
$$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$$

Si $\cos\alpha$ es igual a 3/5 y a CA/H, entonces podemos establecer una igualdad entre ambas fracciones.

$$\frac{CA}{H} = \frac{3}{5}$$

Representemos un triángulo rectángulo, indicando uno de los ángulos agudos como alfa.

Nota: asignamos tentativamente el ángulo y los lados, ya que aún no sabemos cuál de los catetos es mayor.



Nota: La igualdad de fracciones no implica que H = 5 y CA = 3, lo que implica es que, por tratarse de un triángulo rectángulo, las relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras se satisfacen independientemente de la medida real de los lados del triángulo.

Teorema de Pitágoras

$$CA^2 + CO^2 = H^2$$

Para efecto de aplicar el teorema de Pitágoras, establecemos las igualdades:

$CA = 3$ $H = 5$ $CO = x$

$$3^2 + x^2 = 5^2$$

Efectuamos potencias

$$9 + x^2 = 25$$

Qué tipo de ecuación es esta?

Hay una sola incógnita, x, que está elevada al cuadrado. Es una ecuación cuadrática.

Para despejar, pasamos el 9 que está sumando, restando al otro lado.

$$x^2 = 25 - 9$$

Efectuamos la resta.

$$x^2 = 16$$

Aplicamos raíz

$$x = \sqrt{16} \qquad \cancel{x = -\sqrt{16}}$$

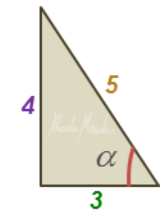
De las dos soluciones tomaremos solo la positiva.

$$x = \sqrt{16} \qquad \boxed{x = 4}$$

¿Por qué se descarta la solución negativa?

Recordemos que x es la letra con la que representamos la medida del Cateto Opuesto, lo que es una distancia. Las medidas de distancia son positivas.

En un triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5 tenemos que $\cos\alpha = 3/5$. Partiendo de esta razón y los tres lados conocidos, hallamos las demás razones trigonométricas.



Razones Trigonométricas

Razón trigonométrica dada y su inversa

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H} \rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sec\alpha = \frac{H}{CA} \rightarrow \sec\alpha = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{H} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5} \qquad \csc\alpha = \frac{H}{CO} \rightarrow \csc\alpha = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CO}{CA} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{CA}{CO} \rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$$

TRIGONOMETRIA. Valores de Razones Trigonométricas. Conociendo una de ellas y el Cuadrante de Alfa.

Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 2$, y α pertenece al III_C.

Datos

$\operatorname{tg}\alpha = 2$

$\alpha \in III_c$

Tenemos el valor de la tangente y el cuadrante al que pertenece alfa.

Con el cuadrante podemos saber el signo de cada razón trigonométrica en el 3er cuadrante.

α en III_C			
senα	–	cscα	–
cosα	–	secα	–
tgα	+	ctgα	+

Con el valor de la tangente y las identidades trigonométricas podemos obtener los valores de las demás razones.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

Hallando ctgα

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

Pasamos cotangente multiplicando al otro lado y tangente dividiendo.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Sustituyendo, $\operatorname{tg}\alpha = 2$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}}$$

Nota: ctgα es positiva en el III_C.

Ahora, con 2do grupo de identidades trigonométricas hallamos los valores de la secante y cosecante, usando los valores de la tangente y cotangente que ya tenemos.

$\boxed{tg\alpha = 2}$ $\boxed{ctg\alpha = \frac{1}{2}}$ $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$ $ctg^2\alpha + 1 = csc^2\alpha$

$$tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$$

Aplicamos propiedad simétrica de la igualdad.

$$sec^2\alpha = tg^2\alpha + 1$$

Aplicamos raíz cuadrada del otro lado de la igualdad considerando el doble signo.

$$sec\alpha = \pm\sqrt{tg^2\alpha + 1}$$

Sustituyendo, tgα = 2

$$sec\alpha = \pm\sqrt{2^2 + 1}$$

Nota: secα es negativa en el III_C.

$$\boxed{sec\alpha = -\sqrt{5}} \qquad sec\alpha = \sqrt{5}$$

$$ctg^2\alpha + 1 = csc^2\alpha$$

Aplicamos propiedad simétrica de la igualdad.

$$csc^2\alpha = ctg^2\alpha + 1$$

Aplicamos raíz cuadrada del otro lado de la igualdad considerando el doble signo.

$$csc\alpha = \pm\sqrt{ctg^2\alpha + 1}$$

Sustituyendo, ctgα = ½

$$csc\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

Nota: cscα es negativa en el III_C.

$$csc\alpha = -\sqrt{\frac{5}{4}} \qquad csc\alpha = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\boxed{csc\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Del 1er grupo de identidades trigonométricas tenemos:

$$sen\alpha = \frac{1}{csc\alpha} \rightarrow sen\alpha = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{2}} \qquad cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha} \rightarrow sec\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{sen\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}} \qquad \boxed{sec\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

El procedimiento es una combinación de propiedades de las raíces, aprendida en la sección de números reales, con operaciones y propiedades de las fracciones aprendida en la sección de números racionales.

Es importante que tengas presente que para entender y aprender nuevos conocimientos debes dominar los conocimientos anteriores.

TRIGONOMETRIA. Recursos para Recordar. Valores de Seno y Coseno para Ángulos Notables

Lo siguiente que verás son llamados Recursos Mnemotécnicos, es decir, Recursos que ayudan a Recordar una información dad. De ningún modo son fórmulas matemáticas, o propiedades por tanto no son un recurso formal matemático, pero son absolutamente ciertos y pueden ser usados sin temor para recordar se han presentado como una herramienta alternativa para ti a la hora de necesitar la información que en ellos se resumen.

Recursos Mnemotécnicos

Los Recursos Mnemotécnicos son recursos que Ayudan a Recordar. A continuación te presentamos una tabla que te ayudará a recordar los valores de las razones trigonométricas para 0°, 30°, 45°, 60° y 90°.

En la 1ra columna, los símbolos de seno y coseno, y en 1ra fila, los ángulos 0°, 30°, 45°, 60° y 90°.

Razón Trig. \ α	0°	30°	45°	60°	90°
senα					
cosα					

Ahora,

En la 2da fila (justo debajo de los ángulos), y frente al símbolo del seno, colocaremos en cada casilla 0, 1, 2, 3, y 4, respectivamente.

En la siguiente fila, frente al símbolo del coseno, colocaremos 4, 3, 2, 1 y 0.

Razón Trig. \ α	0°	30°	45°	60°	90°
senα	0	1	2	3	4
cosα	4	3	2	1	0

Colocamos una gran fracción debajo de las filas de números, y un 2 como denominador.

Y una gran raíz cubriendo a las dos filas.

Razón Trig. \ α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
senα	0	1	2	3	4
cosα	4	3	2	1	0
			2		

¿cómo funciona esta tabla?

Para saber cuál es el valor del seno de 45°.

Buscamos el valor que esté en la fila del seno, y en la columna de 45°.

En esa casilla hay un 2. Como el 2 está dentro de una raíz, y sobre un 2, el valor es

$$\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Razón Trig. \ α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
senα	0	1	2	3	4
cosα	4	3	2	1	0
			2		

Para saber cuál es el valor del coseno de 60°.

Buscamos el valor que esté en la fila del coseno, y en la columna de 60°.

En esa casilla hay un 1. Como el 1 está dentro de una raíz, y sobre un 2, el valor es

$$\cos 60° = \frac{\sqrt{1}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

Razón Trig. \ α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
senα	0	1	2	3	4
cosα	4	3	2	1	0
			2		

Nota: En general, para obtener el valor de seno o coseno de un ángulo determinado, se busca el elemento de la fila del seno o coseno, según sea el caso, y de la columna correspondiente al ángulo dado.

A Practicar

Halla el valor de la incógnita en cada caso, y comprueba el resultado:

1. Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que tgα vale 8/9.
2. Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que senα vale 3/7.
3. Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que cosα vale 2/5.
4. Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que cosα = ½, y α pertenece al IV_c.
5. Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que senα = 3/4, y α pertenece al II_c.
6. Hallar el valor de las demás razones trigonométricas sabiendo que tgα = 3, y α pertenece al III_c.

¿Lo Hicimos Bien?

1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{\sqrt{145}}$, $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{145}}$, $\sec\alpha = \frac{\sqrt{145}}{9}$, $\csc\alpha = \frac{\sqrt{145}}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{9}{8}$

2. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{58}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$, $\sec\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$, $\csc\alpha = \frac{7}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{58}}{3}$

3. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\sec\alpha = \frac{5}{2}$, $\csc\alpha = \frac{5}{\sqrt{21}}$

4. $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec\alpha = 2$, $\csc\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\sec\alpha = -\frac{4}{\sqrt{7}}$, $\csc\alpha = \frac{4}{3}$

6. $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\sec\alpha = -\sqrt{10}$, $\csc\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{3}$