TELESECUNDARIA

CONCEPTOS BÁSICOS

MATEMÁTICAS

9

SEP

Revolución Educativa
Colombia aprende

Ministerio de
Educación Nacional
República de Colombia

Libertad y Orden

COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

COORDINACIÓN PEDAGÓGICA Y EDITORIAL

Mary Luz Isaza Ramos

ASESORÍA PEDAGÓGICA Y DIDÁCTICA

Edith Figueredo de Urrego	Ciencias Naturales y Educación Ambiental: (Biología, Física, Química, Educación Ambiental)
Cecilia Casasbuenas Santamaría	Matemáticas

ADAPTACIONES Y/O PRODUCCIONES NACIONALES MATERIAL IMPRESO

Edith Figueredo de Urrego Ana María Cárdenas Navas	Biología y Educación Ambiental
Cecilia Casasbuenas Santamaría Virginia Cifuentes de Buriticá	Matemáticas
Patricia Arbeláez Figueroa	Educación en Tecnología
Eucaris Olaya	Educación Ética y en Valores Humanos
Alejandro Castro Barón	Español
Mariela Salgado Arango Alba Irene Sáchica	Historia Universal
Antonio Rivera Serrano Javier Ramos Reyes	Geografía Universal
Edith Figueredo de Urrego Alexander Aristizábal Fúquene César Herreño Fierro Augusto César Caballero Adiela Garrido de Pinzón	Física, Química y Ambiente
Betty Valencia Montoya Enoc Valentín González Palacio Laureano Gómez Ávila	Educación Física
Edith Figueredo de Urrego Mary Luz Isaza Ramos	Horizontes de Telesecundaria
Mary Luz Isaza Ramos Edith Figueredo de Urrego	Perspectivas del Camino Recorrido

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - MÉXICO
COORDINACIÓN GENERAL PARA LA MODERNIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN
UNIDAD DE TELESECUNDARIA

COORDINACIÓN GENERAL
Guillermo Kelley Salinas
Jorge Velasco Ocampo

ASESORES DE TELESECUNDARIA PARA COLOMBIA
Pedro Olvera Durán

COLABORADORES

ESPAÑOL
María de Jesús Barboza Morán, María Carolina Aguayo Roussell, Ana Alarcón Márquez, María Concepción Leyva Castillo, Rosalía Mendizábal Izquierdo, Pedro Olvera Durán, Isabel Rentería González, Teresita del Niño Jesús Ugalde García, Carlos Valdés Ortíz.

MATEMÁTICAS
Miguel Aquino Zárate, Luis Bedolla Moreno, Martín Enciso Pérez, Arturo Eduardo Echeverría Pérez, Jossefina Fernández Araiza, Esperanza Issa González, Héctor Ignacio Martínez Sánchez, Alma Rosa Pérez Vargas, Mauricio Rosales Avalos, Gabriela Vázquez Tirado, Laurentino Velázquez Durán.

HISTORIA UNIVERSAL
Francisco García Mikel, Ivonne Boyer Gómez, Gisela Leticia Galicia, Víctor Hugo Gutiérrez Cruz, Sixto Adelfo Mendoza Cardoso, Alejandro Rojas Vázquez.

GEOGRAFÍA GENERAL
Rosa María Moreschi Oviedo, Alicia Ledezma Carbajal, Ma. Esther Encizo Pérez, Mary Frances Rodríguez Van Gort, Hugo Vázquez Hernández, Laura Udaeta Collás, Joel Antonio Colunga Castro, Eduardo Domínguez Herrera, Alma Rosa María Gutiérrez Alcalá, Lilia López Vega, Víctor López Solano, Ma. Teresa Aranda Pérez.

BIOLOGÍA	Evangelina Vázquez Herrera, César Minor Juárez, Leticia Estrada Ortuño, José Luis Hernández Sarabia, Lilia Mata Hernández, Griselda Moreno Arcuri, Sara Miriam Godrillo Villatoro, Emigdio Jiménez López, Joel Loera Pérez, Fernando Rodríguez Gallardo, Alicia Rojas Leal.
INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA Y QUÍMICA	Ricardo León Cabrera, Ma. del Rosario Calderón Ramírez, Ma. del Pilar Cuevas Vargas, Maricela Rodríguez Aguilar, Joaquín Arturo Melgarejo García, María Elena Gómez Caravantes, Félix Murillo Dávila, Rebeca Ofelia Pineda Sotelo, César Minor Juárez, José Luis Hernández Sarabia, Ana María Rojas Bribiesca, Virginia Rosas González.
EDUCACIÓN FÍSICA	María Alejandra Navarro Garza, Pedro Cabrera Rico, Rosalinda Hernández Carmona, Fernando Peña Soto, Delfina Serrano García, María del Rocío Zárate Castro, Arturo Antonio Zepeda Simancas.
PERSPECTIVAS DEL CAMINO RECORRIDO	Rafael Menéndez Ramos, Carlos Valdés Ortíz, Carolina Aguayo Roussell, Ma. de Jesús Barbosa Morán, Ana Alarcón Márquez.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - MÉXICO
COORDINACIÓN GENERAL PARA LA MODERNIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN
UNIDAD DE TELESECUNDARIA

ASESORÍA DE CONTENIDOS

ESPAÑOL	María Esther Valdés Vda. de Zamora
MATEMÁTICAS	Eloísa Beristáin Márquez
INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA Y QUÍMICA	Benjamín Ayluardo López, Luis Fernando Peraza Castro
BIOLOGÍA	Rosario Leticia Cortés Ríos
QUÍMICA	Luis Fernando Peraza Castro
EDUCACIÓN FÍSICA	José Alfredo Rutz Machorro
CORRECCIÓN DE ESTILO Y CUIDADO EDITORIAL	Alejandro Torrecillas González, Marta Eugenia López Ortíz, María de los Angeles Andonegui Cuenca, Lucrecia Rojo Martínez, Javier Díaz Perucho, Esperanza Hernández Huerta, Maricela Torres Martínez, Jorge Issa González
DIBUJO	Jaime R. Sánchez Guzmán, Juan Sebastián Nájera Balcázar, Araceli Comparán Velázquez, José Antonio Fernández Merlos, Maritza Morillas Medina, Faustino Patiño Gutiérrez, Ignacio Ponce Sánchez, Aníbal Angel Zárate, Gerardo Rivera M. y Benjamín Galván Zúñiga.

ACUERDO DE COOPERACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE COLOMBIA Y LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA DE MÉXICO

Colombia ha desarrollado importantes cambios cualitativos en los últimos años como espacios generadores de aprendizaje en los alumnos. En este marco el Ministerio de Educación de Colombia firmó con la Secretaría de Educación Pública de México un **ACUERDO DE COOPERACIÓN EDUCATIVA,** con el propósito de alcanzar mayores niveles de cooperación en el ámbito educativo.

En el acuerdo, el Gobierno de México a través de la Secretaría de Educación Pública, ofrece al Gobierno de Colombia el Modelo Pedagógico de **TELESECUNDARIA**, como una modalidad educativa escolarizada apoyada en la televisión educativa como una estrategia básica de aprendizaje a través de la Red Satelital Edusat.

El Ministerio de Educación de Colombia ha encontrado en el modelo de **TELESECUNDARIA**, una alternativa para la ampliación de la cobertura de la Educación Básica Secundaria en el área rural y una estrategia eficiente para el aprendizaje de los alumnos y las alumnas.

El programa se inicia en Colombia a través de una **ETAPA PILOTO**, en el marco del **PROYECTO DE EDUCACIÓN RURAL**, por oferta desde el Ministerio de Educación de Colombia en el año 2000, realizando las adaptaciones de los materiales impresos al contexto colombiano, grabando directamente de la Red Satelital Edusat los programas de televisión educativa, seleccionando los más apropiados a las secuencias curriculares de sexto a noveno grado, organizando 41 experiencias educativas en los departamentos de Antioquia, Cauca, Córdoba, Boyacá, Cundinamarca y Valle del Cauca, capacitando docentes del área rural y atendiendo cerca de 1 200 alumnos en sexto grado. El pilotaje continuó en el año 2001 en séptimo grado, 2002 en octavo grado, y en el año 2003 el pilotaje del grado noveno.

En la etapa de expansión del pilotaje se iniciaron por oferta en el presente año 50 nuevas experiencias en el marco del Proyecto de Educación Rural. Otras nuevas experiencias se desarrollaron con el apoyo de los Comités de Cafeteros, el FIP y la iniciativa de Gobiernos Departamentales como el del departamento del Valle del Cauca que inició 120 nuevas Telesecundarias en 23 municipios, mejorando los procesos de ampliación de cobertura con calidad.

El Proyecto de Educación para el Sector Rural del Ministerio de Educación Nacional - PER, inició acciones en los diez departamentos focalizados y en ocho de ellos: Cauca, Boyacá, Huila, Antioquia, Córdoba, Cundinamarca, Bolívar y Norte de Santander se organizaron por demanda 40 nuevas experiencias del programa de Telesecundaria a partir del año 2002.

Al presentar este material hoy a la comunidad educativa colombiana, queremos agradecer de manera muy especial al **Gobierno de México**, a través de la **Secretaría de Educación Pública de México - SEP** y del **Instituto Latinoamericano para la Comunicación Educativa - ILCE**, el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos al Ministerio de Educación de Colombia.

TABLA DE CONTENIDO

NÚCLEO BÁSICO 1
HORIZONTES DE LAS MATEMÁTICAS 23

1. ¿HASTA DÓNDE SE PUEDE LLEGAR? 24
2. LISTOS PARA EL GRAN FINAL 26
3. UNA RELACIÓN TRIANGULAR 29
4. TÚ PUEDES ALCANZARLAS 31
5. ¿CÓMO ESTOY EQUIPADO? 32
6. PUNTOS FUERTES, PUNTOS DÉBILES 36
7. PROYECTO MI TRABAJO 37

NÚCLEO BÁSICO 2
NÚMEROS REALES Y SUCESIONES 39

8. ¿DE DÓNDE SURGEN OTROS NÚMEROS? 40
9. UNA RECTA LLENA 46
10. UN LUJO DE LA MENTE: LOS IRRACIONALES, EN LA PRÁCTICA, RACIONALES 55
11. DESPUÉS DE UNO VIENE OTRO 61
12. UNAS SON ARITMÉTICAS 65
13. OTRAS SON GEOMÉTRICAS 74
14. LOS INTERESES 80
15. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! 85

NÚCLEO BÁSICO 3
PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN 87

16. ¡POR FIN! ¿ES CUADRADO O NO? 88
17. JUEGO CON DOS TÉRMINOS 93
18. UNA REPRODUCCIÓN NECESARIA 97
19. IDENTIFÍCALO EN TODOS 103
20. ¿DE DÓNDE VIENE? 109
21. UNO MÁS Y OTRO MENOS 112
22. SE ENCUENTRA ENSAYANDO 116
23. ¡LO QUE NOS FALTABA! 120
24. DIETA 126
25. EL TODO POR EL TODO 129
26. PRODUCTO CRUZADO 133
27. LETRAS MÁS 138
28. LETRAS MENOS 144

29. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES...
DOMINAR LAS MATEMÁTICAS 152
30. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! 156
31. ARMANDO LAS PIEZAS 159

NÚCLEO BÁSICO 4
FUNCIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES 165

32. ACERCAMIENTOS PELIGROSOS 166
33. RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS
DE VARIACIÓN DIRECTA Y DE VARIACIÓN INVERSA 171
34. APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD 174
35. UN PRODUCTO INICIA TODO 176
36. LA MUDANZA DE LAS LETRAS 184
37. UN TRUEQUE JUSTO 189
38. DOBLE PERSONALIDAD 192
39. MI IDENTIDAD SECRETA 196
40. UN PUNTO DE PRINCIPIO A FIN 200
41. ¡VOY A TRAZAR DOS RECTAS AL MISMO TIEMPO! 208
42. BUSCANDO UNA EN OTRA 214
43. SOMOS EQUIVALENTES 219
44. LA UNIÓN DA LA SOLUCIÓN 225
45. ¡ELIMÍNALA! 231
46. BUSCA SU RECÍPROCO 235
47. ¡BUSCANDO UNA SOLUCIÓN A TRES PROBLEMAS! 240
48. ¡SOLUCIÓN ÚNICA! 245
49. ¡NO SIEMPRE SON IGUALDADES! 246
50. ¡SOLUCIONES REGIONALES! 256
51. ¡DERRIBANDO BARRAS! 267
52. DERRIBANDO BARRAS EN ECUACIONES E INECUACIONES 272
53. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES...
DOMINAR LAS MATEMÁTICAS 280
54. VA Y VIENE 283
55. PASA TU TIEMPO... SIENDO CURIOSO 286
56. ¡TÚ SIEMPRE PUEDES! 291
57. SOLUCIONES SIMÉTRICAS 295
58. SEPARACIÓN NECESARIA 300
59. ¡QUÉ EXIGENTES! 302
60. UNA SIEMPRE ES CERO 305
61. DOBLE SOLUCIÓN 307
62. LA GRAN CURVA 310
63. RESUÉLVELOS TÚ MISMO 315
64. PARA TODAS 317
65. CON ESTO NO FALLO 320

66. UNA DISCRIMINACIÓN NO RACIAL 324
67. SE NECESITAN NUEVOS NÚMEROS 330
68. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR...
ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS 335
69. EVALUACIÓN PERSONAL 337

NÚCLEO BÁSICO 5
SÓLIDOS 339

70. DOS EN UNO 340
71. CAMUFLAJE PERFECTO 344
72. EL CAMINO MÁS CORTO 348
73. ARQUITECTOS EGIPCIOS 353
74. BARQUILLOS SIN HELADO 358
75. LO QUE DA FORMA 361
76. UN PUNTO EN LA CUMBRE 364
77. PRISMAS EN REBANADAS 369
78. CUERPO CORTADO 372
79. OCUPAN UN LUGAR EN EL ESPACIO 377
80. EL ESPACIO QUE OCUPA UN BALÓN 380
81. RESUÉLVELOS TÚ MISMO 385
82. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES...
DOMINAR LAS MATEMÁTICAS 387
83. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! 390

NÚCLEO BÁSICO 6
SEMEJANZA 393

84. A IMAGEN Y SEMEJANZA 394
85. DE TAL PALO... 400
86. ¡EL CEREBRO ES TU HOMOTECIA! 405
87. ¡UTILIZANDO EL CEREBRO! 410
88. ¡LAS TIRAS MÁGICAS! 414
89. ¿EN QUÉ SE PARECEN? 420
90. ¿SERÁN SEMEJANTES? 426
91. ¿SEMEJANTES O IGUALES? 430
92. ALGO EN COMÚN 433
93. ¡ENCUENTRA TU PAREJA! 436
94. ¡DE LOS CUATRO, TÚ APARECES DOS VECES! 439
95. ¡RESUELVE EL ROMPECABEZAS! 446
96. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES...
DOMINAR LAS MATEMÁTICAS 449
97. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! 451

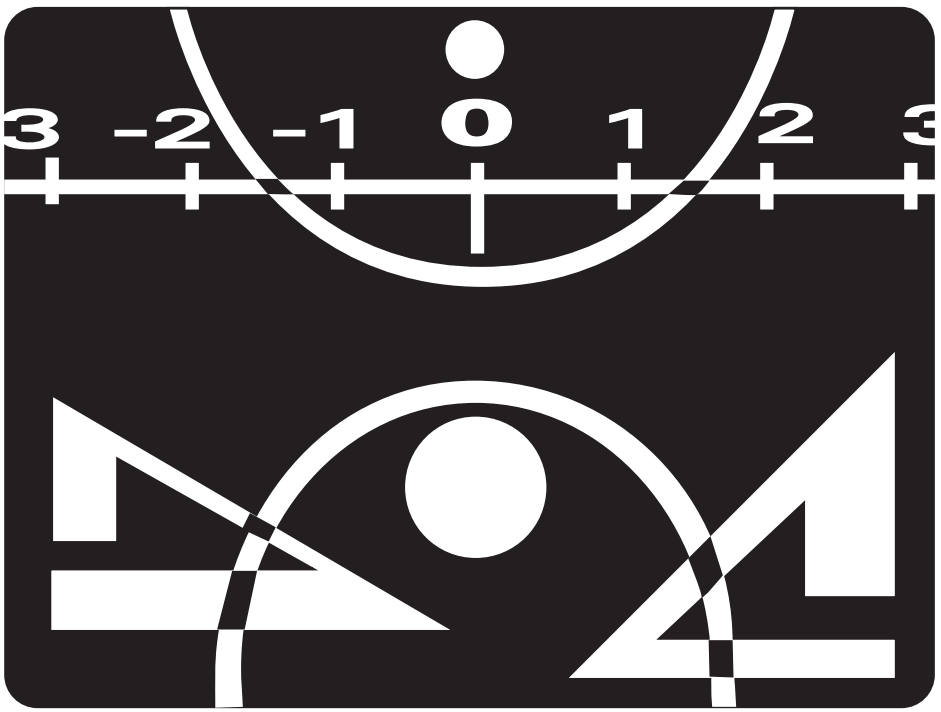
NÚCLEO BÁSICO 7
TRIGONOMETRÍA 455

98. RADIO UNO 456
99. AL DERECHO Y AL REVÉS 460
100. LAS INVERSAS 469
101. TÚ Y YO SOMOS UNO 477
102. LAS DIRECTAS 485
103. SE COMPLEMENTAN 489
104. AHORRA TIEMPO Y ESFUERZO 493
105. SIN INSTRUMENTOS 497
106. MEDIDA INDIRECTA 499
107. ENTRE CATETOS 501
108. RESUÉLVELOS TÚ MISMO 503
109. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS 505
110. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! 508

NÚCLEO BÁSICO 8
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 513

111. ¡CARA O SELLO! 514
112. MÁS PROBABLE 519
113. NO TE ANDES POR LAS RAMAS 524
114. LA TÓMBOLA 529
115. NO DISIMULES 535
116. LO VEO Y NO LO CREO 538
117. CADA VEZ MENOS PROBABLE 541
118. ARREGLANDO Y RESUMIENDO 545
119. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! 548
120. ARMANDO LAS PIEZAS 550

MATEMÁTICAS



ESTRUCTURA CURRICULAR
MATEMÁTICAS

NÚCLEO BÁSICO 1: HORIZONTES DE LAS MATEMÁTICAS

Sesiones	Conceptos básicos
1. ¿HASTA DÓNDE SE PUEDE LLEGAR?	Las matemáticas en el futuro
2. LISTOS PARA EL GRAN FINAL	Contenidos del Programa de Noveno
3. UNA RELACIÓN TRIANGULAR	Trigonometría
4. TÚ PUEDES ALCANZARLAS	Las matemáticas en el nivel de Educación Media
5. ¿CÓMO ESTOY EQUIPADO?	Evaluación diagnóstica
6. PUNTOS FUERTES, PUNTOS DÉBILES	Análisis de resultados
7. PROYECTO MI TRABAJO	Proyecto personal

NÚCLEO BÁSICO 2: NÚMEROS REALES Y SUCESIONES

8. ¿DE DÓNDE SURGEN OTROS NÚMEROS?	Un número real: $\sqrt{2}$
9. UNA RECTA LLENA	Los números reales
10. UN LUJO DE LA MENTE: LOS IRRACIONALES, EN LA PRÁCTICA, RACIONALES	Expresión decimal de racionales e irracionales
11. DESPUÉS DE UNO VIENE OTRO	Concepto de sucesión
12. UNAS SON ARITMÉTICAS	Progresiones aritméticas
13. OTRAS SON GEOMÉTRICAS	Progresiones geométricas
14. LOS INTERESES	Interés compuesto
15. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!	Evaluación personal

NÚCLEO BÁSICO 3: PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

16. ¡POR FIN! ¿ES CUADRADO O NO?	El cuadrado de un binomio
17. JUEGO CON DOS TÉRMINOS	Producto de dos binomios conjugados
18. UNA REPRODUCCIÓN NECESARIA	Producto de dos binomios con término común
19. IDENTIFÍCALO EN TODOS	Extracción del factor común
20. ¿DE DÓNDE VIENE?	Factorización del trinomio cuadrado perfecto
21. UNO MÁS Y OTRO MENOS	Factorización de una diferencia de cuadrados
22. SE ENCUENTRA ENSAYANDO	Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)\, x + ab$
23. ¡LO QUE NOS FALTABA!	Fracciones algebraicas, concepto y equivalencia
24. DIETA	Fracciones algebraicas simples
25. EL TODO POR EL TODO	Multiplicación de fracciones algebraicas
26. PRODUCTO CRUZADO	División de fracciones algebraicas
27. LETRAS MÁS	Adición de fracciones algebraicas I
28. LETRAS MENOS	Adición de fracciones algebraicas II
29. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS	Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo
30. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!	Evaluación personal
31. ARMANDO LAS PIEZAS	Panorámica de lo aprendido

NÚCLEO BÁSICO 4: FUNCIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

32. ACERCAMIENTOS PELIGROSOS	De la proporcionalidad inversa a la función $y = \frac{1}{x}$
33. RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN DIRECTA Y DE VARIACIÓN INVERSA	
34. APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD	Repartos proporcionales
35. UN PRODUCTO INICIA TODO	Ecuaciones con paréntesis
36. LA MUDANZA DE LAS LETRAS	Ejercicios de despeje
37. UN TRUEQUE JUSTO	Sustitución algebraica
38. DOBLE PERSONALIDAD	Ecuaciones con coeficientes fraccionarios
39. MI IDENTIDAD SECRETA	Ecuaciones fraccionarias
40. UN PUNTO DE PRINCIPIO A FIN	Gráfica de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
41. ¡VOY A TRAZAR DOS RECTAS AL MISMO TIEMPO!	Sistemas de ecuaciones
42. BUSCANDO UNA EN OTRA	Método de sustitución
43. SOMOS EQUIVALENTES	Método de igualación I
44. LA UNIÓN DA LA SOLUCIÓN	Método de igualación II
45. ¡ELIMÍNALA!	Método de reducción I
46. BUSCA SU RECÍPROCO	Método de reducción II
47. ¡BUSCANDO UNA SOLUCIÓN A TRES PROBLEMAS!	Sistemas de ecuaciones 3×3
48. ¡SOLUCIÓN ÚNICA!	Sistemas de ecuaciones 3×3
49. ¡NO SIEMPRE SON IGUALDADES!	Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita
50. ¡SOLUCIONES REGIONALES!	Sistemas de dos inecuaciones con dos incógnitas
51. ¡DERRIBANDO BARRAS!	Distancia entre dos puntos y valor absoluto
52. DERRIBANDO BARRAS EN ECUACIONES E INECUACIONES	Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto
53. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS	Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo
54. VA Y VIENE	Gráfica de funciones cuadráticas
55. PASA TU TIEMPO... SIENDO CURIOSO	Ecuaciones de segundo grado
56. ¡TÚ SIEMPRE PUEDES!	Solución de ecuaciones cuadráticas de la forma: $ax^2 + c = 0$
57. SOLUCIONES SIMÉTRICAS	Gráficas de funciones de la forma $ax^2 + c = y$
58. SEPARACIÓN NECESARIA	Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ I
59. ¡QUÉ EXIGENTES!	Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ II
60. UNA SIEMPRE ES CERO	Gráfica de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx$
61. DOBLE SOLUCIÓN	Solución de ecuaciones cuadráticas completas
62. LA GRAN CURVA	Gráfica de funciones cuadráticas completas
63. RESUÉLVELOS TÚ MISMO	Problemas de ecuaciones cuadráticas
64. PARA TODAS	Expresión general para la solución de ecuaciones cuadráticas
65. CON ESTO NO FALLO	Solución de ecuaciones cuadráticas por medio de la expresión general
66. UNA DISCRIMINACIÓN NO RACIAL	Discriminantes
67. SE NECESITAN NUEVOS NÚMEROS	Un nuevo número $\sqrt{-1}$
68. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS	Repaso parcial
69. EVALUACIÓN PERSONAL	Repaso de lo aprendido

NÚCLEO BÁSICO 5: SÓLIDOS	
70. DOS EN UNO	Cortes en cubos y paralelepípedos
71. CAMUFLAJE PERFECTO	Tetraedro y octaedro
72. EL CAMINO MÁS CORTO	La diagonal en cubos y paralelepípedos
73. ARQUITECTOS EGIPCIOS	Pirámides
74. BARQUILLOS SIN HELADO	Conos
75. LO QUE DA FORMA	LÍneas de pirámides y conos
76. UN PUNTO EN LA CUMBRE	Pirámides y conos
77. PRISMAS EN REBANADAS	Cortes de prismas
78. CUERPO CORTADO	Cortes de pirámides
79. OCUPAN UN LUGAR EN EL ESPACIO	Volúmenes de pirámides y conos
80. EL ESPACIO QUE OCUPA UN BALÓN	Área y volumen de la esfera
81. RESUÉLVELOS TÚ MISMO	Problemas
82. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS	Sobre los conocimientos adquiridos
83. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!	Demostración del aprendizaje logrado
NÚCLEO BÁSICO 6: SEMEJANZA	
84. A IMAGEN Y SEMEJANZA	Escalas en líneas y superficies
85. DE TAL PALO...	Razón entre volúmenes de dos cuerpos
86. ¡EL CEREBRO ES TU HOMOTECIA!	Homotecia
87. ¡UTILIZANDO EL CEREBRO!	Homotecia en dibujos a escala
88. ¡LAS TIRAS MÁGICAS!	Teorema de Tales
89. ¿EN QUÉ SE PARECEN?	Semejanza de triángulos; ángulo-ángulo (a,a)
90. ¿SERÁN SEMEJANTES?	Semejanza de triángulos; lado, ángulo, lado (l,a,l)
91. ¿SEMEJANTES O IGUALES?	Semejanza de triángulos; lado, lado, lado (l,l,l)
92. ALGO EN COMÚN	Ejercicios de semejanza
93. ¡ENCUENTRA TU PAREJA!	Cuarta proporcional
94. ¡DE LOS CUATRO, TÚ APARECES DOS VECES!	Media proporcional
95. ¡RESUELVE EL ROMPECABEZAS!	Teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos
96. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS	Repaso parcial de lo aprendido en el núcleo
97. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!	Demostración del aprendizaje logrado
NÚCLEO BÁSICO 7: TRIGONOMETRÍA	
98. RADIO UNO	Círculo unitario
99. AL DERECHO Y AL REVÉS	Funciones y razones trigonométricas seno y cosecante
100. LAS INVERSAS	Funciones y razones trigonométricas coseno y secante
101. TÚ Y YO SOMOS UNO	Funciones y razones trigonométricas tangente y cotangente
102. LAS DIRECTAS	Seno, coseno y tangente de 45º
103. SE COMPLEMENTAN	Seno, coseno y tangente de 30º y 60º
104. AHORRA TIEMPO Y ESFUERZO	Funciones en la calculadora
105. SIN INSTRUMENTOS	Seno en un triángulo rectángulo
106. MEDIDA INDIRECTA	Coseno en un triángulo rectángulo
107. ENTRE CATETOS	Tangente en un triángulo rectángulo

108. RESUÉLVELOS TÚ MISMO	Distancias inaccesibles
109. COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS	Valoración de los conocimientos adquiridos
110. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!	Demostración del aprendizaje logrado
NÚCLEO BÁSICO 8: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	
111. ¡CARA O SELLO!	Probabilidad de que ocurra uno de dos eventos
112. MÁS PROBABLE	Probabilidad de eventos combinados. Regla de la suma
113. NO TE ANDES POR LAS RAMAS	Diagrama de árbol
114. LA TÓMBOLA	La urna de Bernoulli
115. NO DISIMULES	Simulación de problemas
116. LO VEO Y NO LO CREO	Probabilidad condicional
117. CADA VEZ MENOS PROBABLE	Regla del producto
118. ARREGLANDO Y RESUMIENDO	El cálculo de la media en distribuciones con datos agrupados.
119. ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!	Demostración del aprendizaje logrado
120. ARMANDO LAS PIEZAS	Panorámica de lo aprendido

INTRODUCCIÓN

Hemos llegado al comienzo de una etapa crucial en tu vida de estudiante del Ciclo de Educación Básica Secundaria. El camino recorrido en el dominio de las Matemáticas Escolares seguramente te ha mostrado que la senda presenta muchas ramificaciones, es así como has incursionado en diferentes regiones de las matemáticas: los números, la geometría, las medidas, las funciones y el álgebra, los datos estadísticos y la probabilidad. Pero el abordaje de tales contenidos ha sido desde una perspectiva que toma en consideración tanto las relaciones como las operaciones entre los objetos de esas regiones, sin descuidar las conexiones que se dan entre ellas y con otras áreas del conocimiento, además de las articulaciones que tú mismo estableces para satisfacer intereses y necesidades y para resolver problemas provenientes del medio en el cual te desenvuelves y del tipo de proyecto pedagógico productivo al que estás vinculado.

Son muchas las situaciones problemáticas desde las cuales has encontrado sentido a los aprendizajes logrados y que te han permitido avanzar desde niveles concretos e intuitivos hasta niveles de comprensión y de conceptualización cada vez más próximos a las formas de hacer y pensar las matemáticas.

En noveno grado tendrás la oportunidad de vivenciar dichos avances al ampliar el campo de lo numérico hasta la construcción de los números reales e introduciendo la necesidad de los números complejos. En cuanto a los irracionales (subconjunto de los reales) te sorprenderá lo importante que resulta establecer una clara diferencia entre el valor intrínsecamente matemático de ellos y sus posibilidades de aplicación en la resolución de problemas del contexto sociocultural donde está la escuela. Las sesiones de aprendizaje relacionadas con estos conocimientos no tienen videos pero el panorama histórico que las enmarca es tan interesante que no los vas a extrañar.

La propuesta para el desarrollo del pensamiento algebraico aporta herramientas valiosas para modelar cierto tipo de problemas mediante expresiones algebraicas, entre ellas sistemas de ecuaciones, siendo éstas a su vez modeladas geométricamente por sus correspondientes representaciones gráficas en el plano. Aquí lo geométrico te ayuda a darle un significado a lo algebraico.

En cuanto al pensamiento geométrico los avances son considerables: los modelos de la geometría permiten ver, imaginar y visualizar conceptos, apoyan el razonamiento presente tanto en la interacción de procesos de inducción y deducción, como en las diferentes facetas de la demostración. Un aspecto nuevo en este grado tiene que ver con el desarrollo de la trigonometría, que estudia las relaciones entre los elementos de los triángulos, proporcionando un método para cuantificar dichas relaciones, utilizadas desde la antigüedad para calcular medidas imposibles de hacer directamente, o ¿cómo crees que calcularon distancias como las que hay entre la Tierra y los planetas?

El pensamiento aleatorio lo desarrollarás mediante un estudio más avanzado sobre los fenómenos probabilísticos, proveyéndote de teoría que te ayudará a una mejor comprensión del tratamiento de los sistemas de datos.

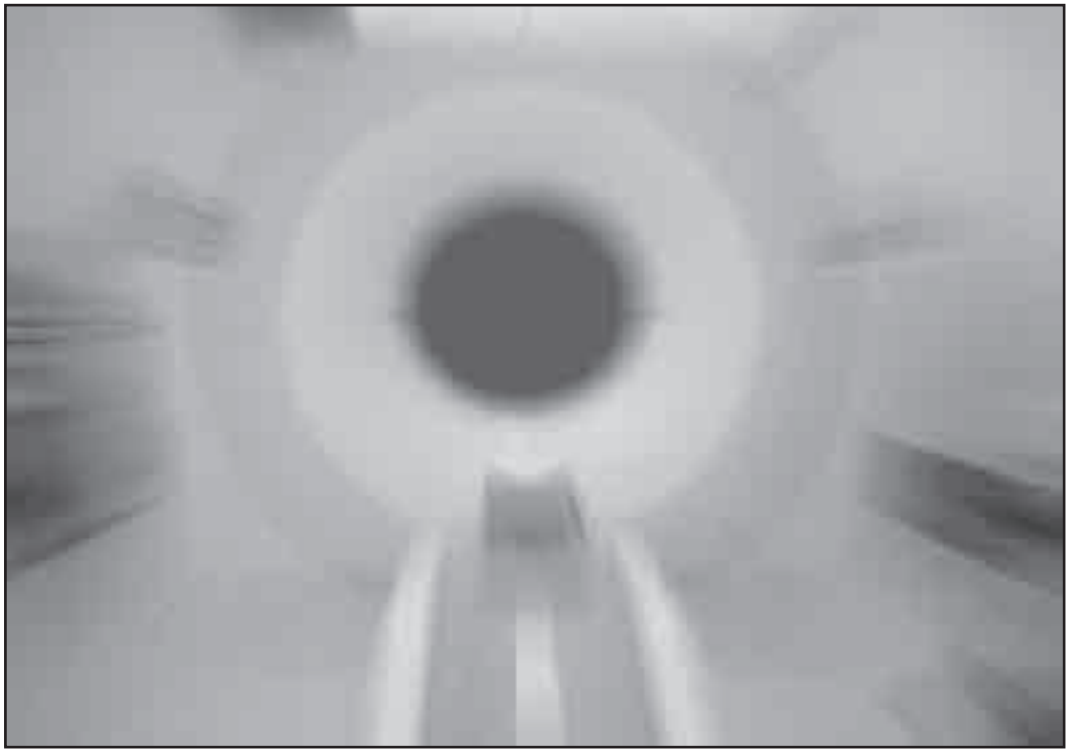
Te invitamos, pues, a seguir conquistando el maravilloso mundo de las matemáticas, a disfrutar de la precisión y sencillez de su lenguaje, de la belleza de sus razonamientos y de la estética de sus demostraciones, estas últimas las has trabajado partiendo de verificaciones empíricas hasta llegar a aquellas que ya te exigían y te exigirán, en este grado, recurrir a procedimientos y formas de pensar propias del pensamiento matemático.

Las autoras de la versión de estos materiales para Colombia, te deseamos éxitos en este noveno grado y esperamos que sientas a través de ellos el afecto y el entusiasmo que nos animó durante su elaboración. Sigamos apropiándonos de ellos y mejorándolos para que juntos le aportemos a la juventud del país la calidad educativa que requieren los retos de la época que nos tocó vivir.

Las autoras

Núcleo Básico 1

HORIZONTES DE LAS MATEMÁTICAS



"En las discusiones sobre las tecnologías de hoy, tendemos a ver como productos tecnológicos sólo aquellos que han sido desarrollados durante nuestro tiempo. Se cree que las computadoras son tecnología, pero el lápiz, el papel, el bolígrafo, los libros, el signo =, el pizarrón, el alfabeto, no lo son... Pero en realidad sí lo son: son tecnologías inventadas por el ser humano para servir de ***amplificadores y reorganizadores*** a su cognición. Si adoptamos este punto de vista, entonces la computadora pierde ese aire de ***instrumento extraño*** con el cual la vemos y pasa a formar parte de un proceso natural y desarrollo sociocultural"[1].

[1]. MORENO, Luis, *Evolución y tecnología*. Publicado en Memorias Seminario Nacional sobre uso de Nuevas Tecnologías en el área de Matemáticas. MEN, Bogotá, 2002.

1 ¿HASTA DÓNDE SE PUEDE LLEGAR?

1 - 3

Las matemáticas en el futuro

Alcance de los adelantos donde participan las matemáticas

Forma un grupo con dos compañeros(as) para comentar las posibles respuestas a estas preguntas:

Desde la experiencia y desde los conocimientos que has acumulado en todas las áreas de estudio, ¿en cuáles de ellas ha sido importante la aplicación de las matemáticas?

- ¿Cuál ha sido el papel de las matemáticas en tu formación?
- ¿Cómo participan las matemáticas en los adelantos científicos y tecnológicos?

Este video lo miraste el año pasado. Hoy seguramente encontrarás en él aportes nuevos porque tienes nuevos conocimientos y ellos te ayudan a ver aspectos que antes te pasaron desapercibidos.

¡Ponle mucha atención!

Con el mismo grupo haz la lectura del siguiente texto:

LAS MATEMÁTICAS EN EL FUTURO

Con la llegada de un nuevo milenio las expectativas de cambio de las sociedades contemporáneas se han visto afectadas en mayor o menor medida. La educación es el campo en donde hemos depositado mayores esperanzas y es el escenario desde el cual podemos ser actores en el llamado “Siglo de la información y del conocimiento”.

En los círculos académicos se ha reconocido que las matemáticas y las ciencias son formas de conceptuar y explicar el mundo. Por lo tanto, actividades cognitivas como generalizar, sistematizar y abstraer jugarán un papel cada vez más importante en la resolución de los problemas que desafíen el espíritu innovador y la creatividad en la búsqueda de respuestas a los retos provenientes del contexto, ya sea el escolar, el de la vida cotidiana, el de otras áreas del conocimiento y el de las mismas matemáticas.

Las matemáticas independientemente de la ayuda que le prestan a la actividad científica, representan los esfuerzos de la humanidad para crear y exponer con precisión las relacio-

nes abstractas que existen entre unas cantidades idealizadas y las formas del mundo. Las matemáticas buscan patrones en los ámbitos del número y de la forma; intentan demostrar y explicar las razones de estos patrones a quien quiera que se interese por ellos. Y lo hace de tal manera que se sienten fascinados tanto por la belleza de estos patrones como por su valor de verdad[1].

Es así como la creación de verdades matemáticas pone de relieve el poder de la mente humana para sondear las regularidades más profundas del universo[2].

La simplicidad y la elegancia de la verdad y de la forma de presentarla son muy importantes para quienes se ocupan del hacer matemático. Vivir estos aspectos en el desarrollo del curso es una meta que te puedes proponer.

Las matemáticas encuentran aplicaciones en otros campos situados fuera de ella y que van más allá de los cálculos relativos a recuentos, a actividades de producción y consumo, de compra, venta e intercambio y mediciones tan propios de la vida cotidiana.

Las matemáticas aplicadas son naturalmente interdisciplinares. En algunos casos, desarrollos matemáticos son gestores de desarrollos de otras disciplinas. En otros, son una herramienta o un lenguaje para las otras ciencias.

En el estudio de las otras áreas seguramente has encontrado relaciones con las matemáticas que te permiten ejemplificar sus aplicaciones.

Los avances científicos y tecnológicos significan también avances de las matemáticas, sin desconocer que algunas veces éstas se han anticipado preparando modelos que han influido en desarrollos importantes en campos de la ciencia y la tecnología. Es como si el futuro de las unas y de las otras estuviera indiscutiblemente tramado.

Amplía tu grupo uniéndolo con otro y comenten los avances acerca de la visión que hoy tienen de las matemáticas. Aporta ideas que no estuvieron presentes ni en el video ni en la lectura, pero que por su importancia enriquecen el alcance de las matemáticas en el futuro.

En forma individual, responde las siguientes preguntas:

- En tu proyecto de vida, ¿cuál es el rol que desempeñan las matemáticas?

1. GARDNER. Howard, *La educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas*, Ediciones Paidós Ibérica S.A., Barcelona, 2000.

2. *Ibid*.

- ¿Conoces algún personaje de tu comunidad para quien las matemáticas se constituyen en una herramienta básica para su trabajo? Cuéntanos su caso.

- ¿Cómo fomentarías en la institución escolar el interés y el trabajo matemático?

Comparte tus apreciaciones con el grupo y ojalá lleguen a consensos que permitan la creación y organización de actividades y de espacios especiales para las matemáticas: clubes, concursos, periódico, etc.

2

LISTOS PARA EL GRAN FINAL

2 - 3

Contenido del programa de Noveno Grado

Conocimiento de los temas de estudio de Matemáticas para el grado

¡Vas a iniciar el recorrido del tramo final de una carrera importante en tu vida!

Este curso es el último de tu Educación Básica. Terminarás de construir el primer piso del edificio de tus conocimientos y dependerá de la calidad del material usado, la resistencia que aquél tenga para soportar todos los pisos que hayas planeado construir sobre él.

Haz una lectura atenta y comentada, con tu grupo de trabajo, del texto: **Contenido del programa para 9º grado y del cuadro correspondiente.** Así tendrás un panorama de lo que será tu nueva incursión en el mundo de las matemáticas.

CONTENIDO DEL PROGRAMA DE NOVENO

Los temas que contiene el programa de Matemáticas están estructurados de manera que permiten correlaciones, tanto entre ellos como con los de otras disciplinas.

El desarrollo de nuevos contenidos se apoya en los conocimientos adquiridos en grados anteriores y, a la vez, se constituyen en una buena base para avances posteriores.

En este curso se continúa el estudio de la ***aritmética*** con la ampliación de los sistemas numéricos mediante la conceptualización de números reales y algún acercamiento a los números complejos.

Un tema muy importante de la aritmética, en estrecha relación con la geometría, es la proporcionalidad inversa y el reparto proporcional.

En ***álgebra*** se tratan temas como los productos notables y la factorización; se profundiza en las operaciones con polinomios y con fracciones algebraicas; en la solución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones lineales con dos y con tres incógnitas; se trabaja así mismo la solución de ecuaciones cuadráticas. Todo ello en el contexto de situaciones problemáticas.

En ***geometría***, se amplía el estudio de las formas geométricas, con base en sus características y propiedades; se ve la aplicación de teoremas para solucionar problemas de cálculo o construcción de figuras. De igual forma se analizan algunas propiedades de los cuerpos geométricos para calcular su área total y su volumen; también se hace un estudio de casos sencillos de cortes en prismas y pirámides.

Como una parte importante de la geometría se inicia el estudio de la ***trigonometría*** en lo que se refiere a la relación de lados y ángulos en un triángulo rectángulo y su aplicación en la solución de problemas.

En lo relativo a la ***presentación y tratamiento de la información y a la probabilidad***, se recurre al diagrama de árbol para encontrar los posibles resultados en un experimento aleatorio y a la regla del producto; igualmente, se resuelven problemas de probabilidad a partir de simulaciones. En cuanto a la estadística se considera la desviación estándar, la varianza y la correlación.

TELESECUNDARIA 9º GRADO

ARITMÉTICA	ÁLGEBRA	GEOMETRÍA	PRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN	PROBABILIDAD
▪ Relaciones de proporcionalidad ▪ Proporcionalidad directa e inversa ▪ Reparto proporcional ▪ Números reales √ Conmensurabilidad entre longitudes √ Números irracionales √ Aproximación racional de un número irracional √ El número **e** ▪ Racionalización √ Sucesiones numéricas ▪ Sucesión, como función cuyo dominio es Z+ ▪ Progresiones aritméticas y geométricas. ▪ Números Complejos.	▪ Factorización y Productos notables ▪ Fracciones algebraicas ▪ Función $\frac{1}{x}$ ▪ Sistemas de ecuaciones lineales ▪ Matrices y determinantes. ▪ Función cuadrática de la forma: $y = ax^2 + c$ $y = ax^2 + bx$ ▪ Solución de ecuaciones de la forma: $ax^2 + c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ √ Solución de ecuaciones cuadráticas completas √ Gráfica √ Discriminantes ▪ Función valor absoluto. √ Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto ▪ Funciones trigonométricas Función exponencial	▪ Cortes en cubos y paralelepípedos ▪ Tetraedro y octaedro ▪ Pirámides ▪ Conos ▪ Cortes de prismas y pirámides ▪ Volumen de pirámides y conos ▪ Área y volumen de la esfera ▪ Semejanza ▪ Escalas ▪ Homotecias ▪ Teorema de Tales ▪ Semejanza de triángulos	▪ Media con distribuciones con datos agrupados. ▪ Intervalos ▪ Marca de clase ▪ Frecuencia	▪ Probabilidad de que ocurra uno de dos eventos. ▪ Probabilidad de eventos combinados ▪ Regla de la suma ▪ Probabilidad condicional ▪ Regla del producto ▪ Diagramas de árbol ▪ La urna de Bernoulli: probabilidad de un evento con y sin reemplazo. ▪ Simulación de problemas ▪ Probabilidad condicional

Con tu mismo grupo de trabajo escudriña temas de 9º que podrías considerar continuación de tu trabajo de 8º grado e identifica aquellos que te resultan nuevos.

Considera, también, en qué temas eres fuerte y en cuáles necesitarías un apoyo o profundización para ir con paso firme a la conquista de 9º.

Es importante socializar los resultados del análisis hecho, con el maestro(a) y con todo el grupo, con la intención de hacer un plan conjunto de trabajo.

Observa atentamente el video. Seguramente encontrarás que hay temas considerados en él que fueron estudiados en 8º grado, de igual manera advertirás que algunos no son mencionados. El video te dará un panorama de continuidad entre 8º y 9º.

Forma un equipo de cuatro personas y haz un análisis crítico del video.

3 UNA RELACIÓN TRIANGULAR

3 - 3 Trigonometría

Origen y aplicación de la trigonometría

Con dos de tus compañeros(as) forma un grupo de trabajo.

Lee y analiza el siguiente problema:

- Un enorme árbol arroja una sombra de 7.22 m.
  A la vez un árbol más joven de 1.60 m de alto, proyecta una sombra de 67 cm.

  ¿Cuál es la altura del árbol más alto?
  ¿Te parece fácil medir la altura del enorme árbol?
  ¿Lo podrías hacer directamente? ¿Cómo?
  ¿Crees que la altura del árbol grande podría ser igual a la longitud de la sombra proyectada, en ese momento? Argumenta tu respuesta.
  ¿Qué estrategia propondrías para resolver este problema?

Comparte con tus compañeros(as) y el profesor(a) tus opiniones y argumentos.

Con tu grupo, lee, analiza y comenta el siguiente texto.

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia la forma de calcular los elementos de los triángulos; tiene su origen en tiempos muy remotos; los primeros babilonios la utilizaban como herramienta en la navegación, así como para medir extensiones de tierras o la distancia entre los astros que observaban en el cielo.

Es decir, se usaba para calcular todo aquello que no podía medirse directamente.

Entre los griegos antiguos la astronomía consistió fundamentalmente en descripciones y especulaciones aventuradas sobre los astros. La necesidad de hacerla una ciencia más exacta, fundada en mediciones y en una matemática que permitiera predecir con precisión los eclipses y los movimientos de los astros, para hacer los calendarios más acertados y la navegación más segura, dio origen a la trigonometría en el siglo II antes de Cristo.

Tres matemáticos griegos contribuyeron al desarrollo de la astronomía antigua: Hiparco, del siglo II antes de Cristo; Menelao, del siglo I después de Cristo, y Tolomeo, del siglo II después de Cristo. Gran parte de los teoremas de la trigonometría actual eran perfectamente conocidos por Tolomeo.

La trigonometría necesitó para su desarrollo elementos de la **aritmética** para la configuración de tablas, del **álgebra** para establecer expresiones que relacionen lados de un triángulo y ángulos, y de la **geometría**.

La trigonometría te ayudará a efectuar mediciones que no podrías hacer sobre el terreno, pero que conociendo un par de datos podrías realizarlas, con una aproximación asombrosa.

Para encontrar la medida del diámetro de la Tierra, ¿crees que esto pudo haberse hecho directamente?

Observa el video que te ampliará el panorama de lo que aprenderás en este campo de las matemáticas.

Con tu grupo:

a) Describe dos situaciones concretas en las cuales se aplique la trigonometría.

b) Dibuja un triángulo rectángulo e indica en él los catetos y la hipotenusa.

c) En otro triángulo rectángulo señala un ángulo diferente del recto e indica cuál es el cateto opuesto y cuál el adyacente.

4

TÚ PUEDES ALCANZARLAS

6 - 3

Las matemáticas en el nivel de Educación Media

Importancia de su aprendizaje en el nivel medio superior

¿Has escuchado el refrán “el que persevera, alcanza”?, pues en esta sesión aprenderás la importancia que tienen tus conocimientos actuales para ingresar en otro nivel de estudios.

Observa el video en el que verás el papel de las matemáticas en los niveles superiores.

Con tus compañeros, lee el siguiente texto:

LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL DE EDUCACIÓN MEDIA

Una vez terminado el ciclo de Básica Secundaria te conviene cursar los dos años del Nivel de Educación Media, es decir los grados 10º y 11º.

De esta manera estarás preparado para iniciar estudios superiores, ya sea una carrera técnica o una universitaria.

La elección de una carrera significa una de las decisiones más importantes en la vida. Las opciones actuales para continuar los estudios después de la secundaria son muy diversas y representan variadas alternativas de educación; en todas ellas, las matemáticas están presentes indiscutiblemente.

Las matemáticas se aprenden de manera gradual desde los primeros años de vida, cuando se construyen y establecen relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana.

Después, con los estudios formalizados de la escuela, esas experiencias se amplían, reforzando cada vez más los conocimientos anteriores. Es por eso que los programas de todos los niveles observan entre sí una relación de concordancia y continuidad, propiciando el desarrollo y el pensamiento matemático de los estudiantes.

Para avanzar en el estudio de las matemáticas es necesario tener una base sólida, la cual sólo puede darse en la medida en que los conocimientos anteriores hayan sido muy bien comprendidos. El álgebra y la geometría son básicas para la comprensión de otras ramas de las matemáticas, por lo tanto, debe hacerse énfasis en su estudio.

Las matemáticas del nivel de Educación Media son la base para el estudio de cualquier carrera y son fundamentales en todas las actividades humanas; lo mismo las utiliza el ingeniero para hacer cálculos en sus proyectos que un médico para suministrar la cantidad conveniente de anestesia a su paciente; o bien el campesino que compra una cantidad de semilla determinada en relación con el área que va a sembrar, o el pintor que cuida las proporciones de las figuras en el dibujo que realiza, etcétera.

5 ¿CÓMO ESTOY EQUIPADO?

Evaluación diagnóstica

Esta evaluación diagnóstica te permitirá valorar tu aprendizaje de las matemáticas en 8º grado. Si encuentras puntos débiles es necesario que tomes medidas que te lleven a superarlos.

Trabaja individualmente en el siguiente cuestionario:

1. Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor

$$\frac{3}{5},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{7}$$

2. Escribe una fracción que esté entre:

$$-\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}$$

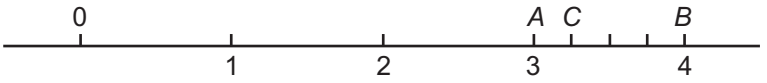
3. Expresa en forma de fracción:

$$0.25 \quad , \quad 0.01 \quad , \quad 0.125 \quad , \quad 0.203$$

4. Si en un vaso se vierte una cantidad de agua equivalente al triplo de $\frac{2}{5}$ de la capacidad de dicho vaso, ¿qué cantidad de agua se derrama?

5. Un artículo fue rebajado de $20 000 a $15 000. ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a la rebaja?

6. En la recta numérica:



El segmento *AB* se ha dividido en 4 partes de igual longitud. Escribe el número que representa *C.*

7. ¿Cuál de los siguientes números es el más pequeño?

$$0.625 \quad , \quad 0.25 \quad , \quad 0.375 \quad , \quad 0.5 \quad , \quad 0.125$$

8. Las siguientes expresiones representan el mismo número. ¿Cuál de ellas corresponde a su notación científica?

$$220 \times 10 \quad , \quad 22 \times 10^2 \quad , \quad 2.2 \times 10^3 \quad , \quad 0.22 \times 10^4$$

9. De los siguientes números el más próximo a 12 es:

$$\sqrt{100} \quad , \quad \sqrt{120} \quad , \quad \sqrt{140} \quad , \quad \sqrt{150}$$

10. Una línea recta pasa por los puntos (3,2) y (4,4)

De los siguientes puntos, ¿cuáles están sobre esa misma recta?

$$(0,0) \quad , \quad (4,3) \quad , \quad (5,6) \quad , \quad (2,0)$$

11. La siguiente es la tabla de una función lineal.

X	3	6	B
Y	5	A	15

¿Cuál es el valor de A y cuál el de B?

12. La siguiente expresión corresponde a una función de gráfica lineal

$$y = 2x + 5$$

Escribe la expresión de una recta paralela:

a) que pase por el origen

b) que pase por el punto (0,1)

13. En las siguientes ecuaciones de funciones de primer grado busca aquellas cuya representación gráfica:

a) Sean rectas paralelas. ¿Por qué?

b) Sean rectas simétricas. ¿Por qué?

$$y_1 = 3x + 5$$
$$y_2 = 3x - 10$$
$$y_3 = -3x + 5$$
$$y_4 = -3x + 2$$
$$y_5 = -2x + 5$$

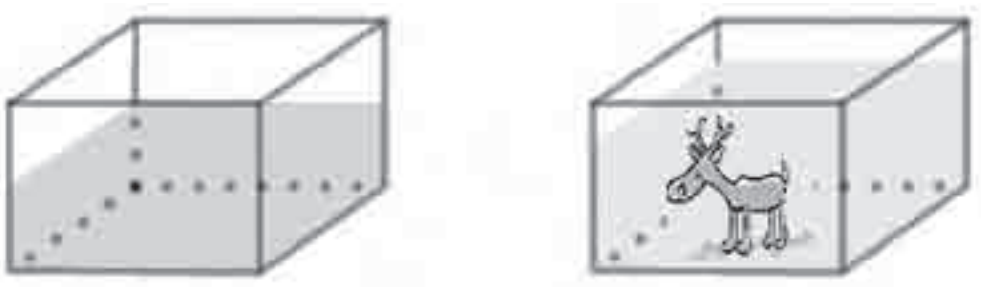
14. La ecuación $y = x^2 - 6x + 9$ tiene como gráfica una parábola.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?

b) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?

c) ¿Hacia dónde abre la parábola?

15. Un niño que tiene un juguete de bronce quiere conocer su volumen. Dada su forma irregular no sabe cómo hacerlo. Su amigo le aconseja sumergirlo en un recipiente de forma de prisma que contiene agua.



Las dimensiones de la base del recipiente son 20 cm de largo y 14 cm de ancho. Al sumergir el juguete el nivel del agua sube 4 cm.

¿Cuál es el volumen del juguete? ¿Por qué?

16. Margarita debe tomar dosis de 5 cm^3, de un antibiótico. El frasco contiene 0.25 ℓ de este medicamento. ¿Cuántas dosis se alcanza a tomar, si consume todo el contenido del frasco?

17. Explica por qué dos triángulos que tienen dos lados de igual medida y el ángulo comprendido entre ellos, también de igual medida, son congruentes. Ilustra con un dibujo.

18. Los lados de un cierto triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Qué características tiene este triángulo? ¿Cómo se llaman sus lados?

19. De las siguientes sucesiones

1, 4, 16, 25 ...
0, 1,5 3, 4,5 ...
3, 9, 27, 81 ...
12, 9, 6, 3 ...

¿Cuáles son de crecimiento aritmético y cuáles de crecimiento geométrico?

¿Cuál es la razón, en cada caso?

20. Al lanzar un dado, cuál es la probabilidad esperada de obtener

a) Un número mayor que 4

b) Un número impar.

c) Un número impar o un múltiplo de 2

d) Un número mayor que 4 y menor que 5

e) Un número mayor que 5 o menor que 3

Una vez hayas terminado tu trabajo consérvalo para analizarlo en la siguiente sesión.

6 PUNTOS FUERTES, PUNTOS DÉBILES

Análisis de resultados

Una mirada a los conocimientos de 8º grado

En grupos de tres compañeros, intercambien sus cuadernos.
Analicen y resuelvan cada uno de los ejercicios. Cuando no haya consenso consulten los materiales de 8º grado o al profesor(a).
Hagan las correcciones que sean necesarias al trabajo de sus compañeros(as).

Usen una tabla como la siguiente para que cada uno de los integrantes del grupo haga un inventario de los aciertos en su cuestionario.

TEMA	NÚMERO DE LA PREGUNTA	NÚMERO DE ACIERTOS
Operaciones con números racionales.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	
Funciones	10, 11, 12, 13, 14	
Geometría y medición	15, 16, 17, 18	
Manejo de datos y probabilidad	19, 20	

De acuerdo con el número de aciertos que obtuviste, evalúa tu desempeño según la siguiente escala:

ESCALA ESTIMATIVA

Excelente	20 – 19
Bien	18 – 16
Regular	15 – 12
Insuficiente	11 o menos

La importancia de comparar tu desempeño frente a esta escala radica en que puedes identificar aquellos temas que requieren actividades de refuerzo. Tu profesor(a) te puede guiar para superar estas dificultades.

7 PROYECTO MI TRABAJO

Proyecto personal

Elaboración del proyecto

Una meta que te has propuesto es terminar el nivel de Educación Básica. Lograrlo requiere una cierta planeación que puedes materializar en la elaboración de tu proyecto personal.

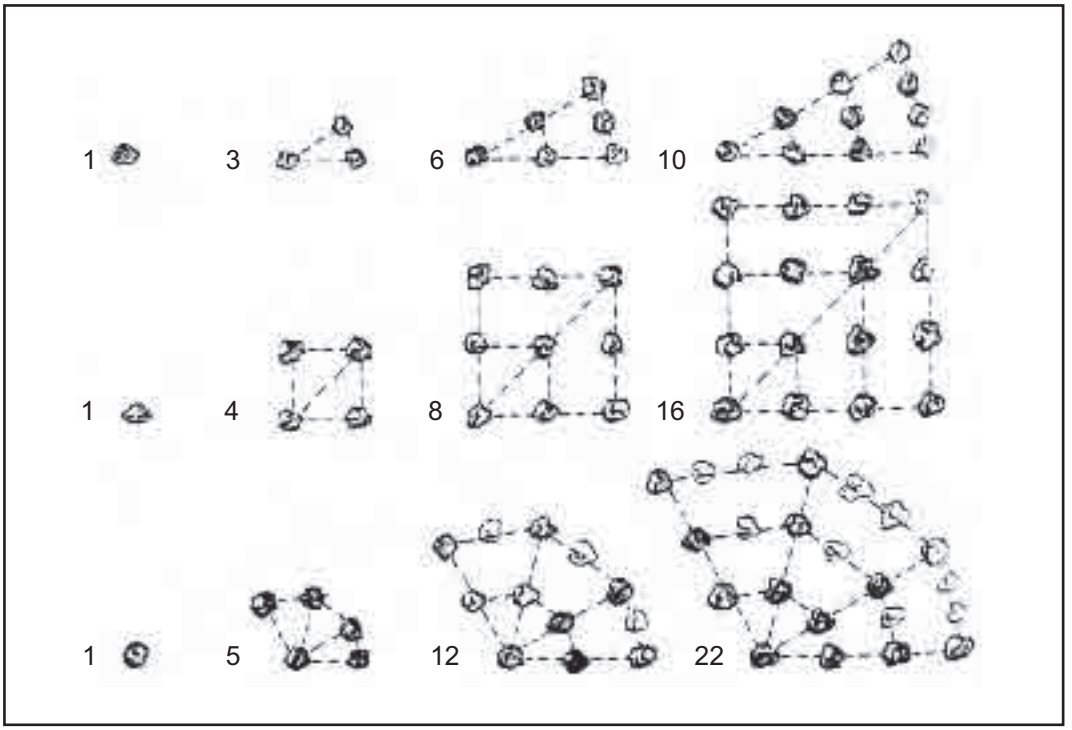
Para la elaboración de tu proyecto te sugerimos unas preguntas válidas para el desarrollo de cualquier proyecto. Escoge aquellas para las que sus respuestas expresen los horizontes y el sentido que quieras darle a tu proyecto personal:

PREGUNTAS	COMPONENTES
¿Qué se quiere hacer?	Naturaleza del proyecto
¿Por qué se quiere hacer?	Origen del proyecto
¿Para qué se quiere hacer?	Objetivos generales y específicos
¿Cuánto se quiere hacer?	Metas
¿Dónde se quiere hacer?	Localización - ubicación
¿Cómo se quiere hacer?	Metodología, técnicas y procedimientos
¿Cuándo se quiere hacer?	Cronograma
¿A quiénes va dirigido?	Beneficiarios
¿Quiénes lo van a hacer?	Recursos humanos
¿Con qué se va a hacer?	Recursos materiales
¿Con qué se va a costear?	Recursos financieros
¿Cómo evaluamos?	Logros identificados

Elabora tu proyecto y socialízalo con tus compañeros(as) y tu profesor(a). Comenta con ellos cuáles de las preguntas propuestas te sirvieron para estructurar tu proyecto.

Núcleo Básico 2

NÚMEROS REALES Y SUCESIONES



Los matemáticos griegos de la Escuela de Pitágoras descubrieron, en el siglo V a.C., que además de los números naturales y de los fraccionarios existía otro tipo de números. Hasta entonces, se había pensado que todo el Universo se regía por los números conocidos, pero se dieron cuenta, con gran sorpresa, cómo hay pares de longitudes de segmentos cuyo cociente no es expresable por medio de una fracción, tal es el caso de la diagonal de un cuadrado y su lado. Este problema desconcertó tanto a estos matemáticos que lo asumieron como un ***caos*** y a las relaciones numéricas de este tipo las llamaron ***álogos***, de donde seguramente surgió el nombre de ***irracionales***, o sea, no expresables como la razón de dos racionales.

Ya se ha trabajado con números de este tipo. Tal es el caso de π , que aparece cuando se trata de medir la longitud de la circunferencia, tomando como unidad la longitud del diámetro.

En este núcleo nos aproximaremos al conocimiento de otros números irracionales y tu trabajo será tan interesante que no extrañarás los videos.

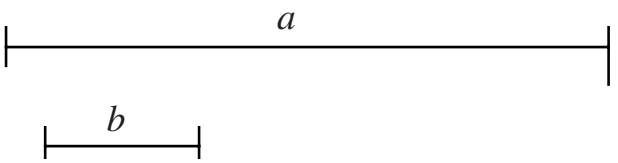
8 ¿DE DÓNDE SURGEN OTROS NÚMEROS?

Números reales

Construcción de algunos números reales

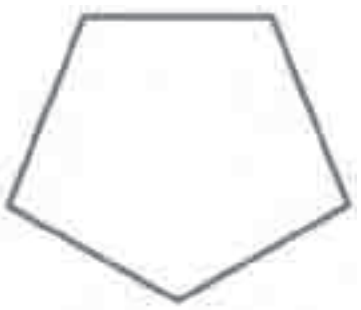
Con la longitud de un lado del cuadrado puedes expresar la longitud total de su contorno o perímetro. Es decir, el segmento de medida ℓ es ***conmensurable*** con el segmento de medida 4ℓ**.**

Con tu grupo de trabajo dibuja en tu cuaderno segmentos como los dados a continuación:



1. ¿Puedes expresar la longitud de a tomando como patrón el segmento b?
   ¿A qué es igual la longitud de a? ¿Son conmensurables a y b?

2. Expresa el perímetro del pentágono tomando como patrón de medida la longitud de su lado.

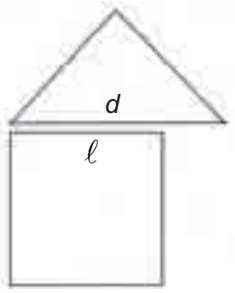


   ¿Es conmensurable el perímetro del pentágono con la longitud del lado?

3. ¿Es conmensurable la longitud de la diagonal de un cuadrado con la longitud de su lado?

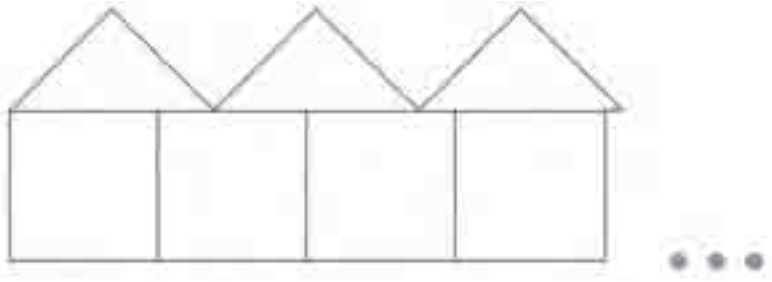
Para iniciar dibuja y recorta dos cuadrados congruentes. En uno de ellos traza la diagonal y recorta por ella.

Compara la longitud del lado del cuadrado con la longitud de la diagonal.



¿Puedes establecer una relación entre estas dos longitudes?

Elabora varios modelos como el anterior hasta que puedas encontrar que un múltiplo de la longitud del lado coincida con algún múltiplo de la longitud de la diagonal.



¿Cuántas veces la longitud ℓ coincide aproximadamente con cuántas veces la longitud *d*?

En la expresión

$$m\,\ell \cong n\,d$$

¿Qué valores encontraste para m y n?

Compara tus resultados con los encontrados por otros grupos.

Con tu grupo, haz la siguiente lectura.

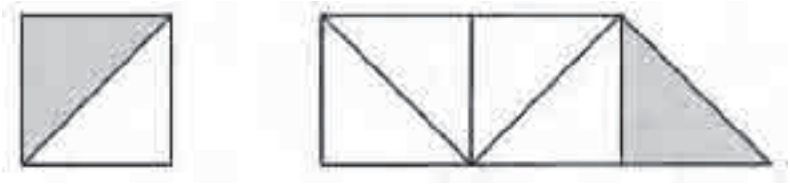
UN NÚMERO REAL: $\sqrt{2}$

Decimos que dos magnitudes son ***conmensurables*** cuando una de ellas puede expresarse como un múltiplo o submúltiplo de la otra.

Veamos un ejemplo:

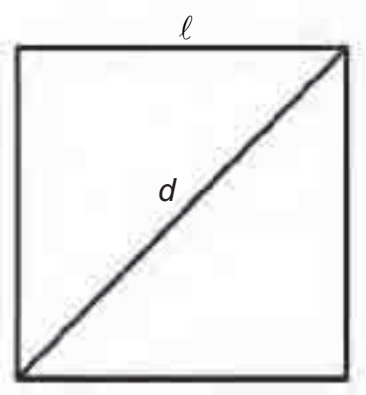
Si tomamos como patrón de medida el cuadrado para medir el área del cuadrilátero vemos que el cuadrado se puede superponer dos veces y queda sin cubrir una región triangular.

Encontramos que el área del cuadrilátero no puede recubrirse exactamente con el patrón escogido. Es decir, el área del cuadrilátero no se puede expresar como un número entero de veces el área del cuadrado patrón. Recurrimos, entonces, a un submúltiplo del área de éste, que es el área del triángulo sombreado.



Si llamamos A el área del triángulo se tiene que el área del cuadrilátero es igual a $5A$.

Veamos ahora qué ocurre cuando intentamos medir la diagonal de un cuadrado utilizando como patrón de medida la longitud del lado de éste.



El teorema de Pitágoras nos permite encontrar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} l^2 + l^2 &= d^2 \\ 2\,l^2 &= d^2 \\ \sqrt{2\,l^2} &= d \\ \sqrt{2}\,l &= d \end{aligned}$$

¿Pero, qué tipo de número es $\sqrt{2}$? ¿Será un racional?

- Tratemos de hacer una demostración.

Si $\sqrt{2}$ es un racional, puede escribirse en forma de fracción

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Siendo $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible, en cuyo caso a y b son primos relativos.

El tipo de demostración que vamos a hacer se llama ***reducción al absurdo***, pues partiendo de una fracción irreducible, vamos a llegar a una ***contradicción***.

Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ se tiene que $\sqrt{2}\,b = a$

Elevamos al cuadrado para suprimir el radical

$$2\,b^2 = a^2$$

Resulta entonces que a^2 es un número par, puesto que es múltiplo de 2.

Pero si a^2 es par, también a es par, pues el cuadrado de un número impar es siempre impar.

Si aceptamos que a es par, podemos expresarla como $a = 2n$, donde n es un entero.

Luego: $a^2 = 4n^2$

Si se sustituye este valor en:

$$2b^2 = a^2$$

Se obtiene:

$$2b^2 = 4n^2$$

En este caso:

$$b^2 = 2n^2$$

De donde se puede deducir que b también es número par.

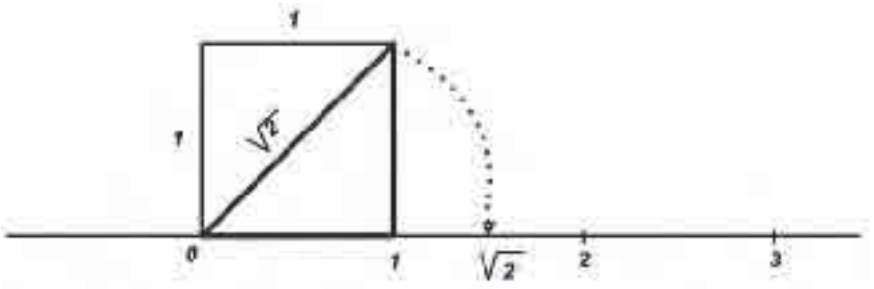
¡He aquí la contradicción! Por hipótesis habíamos dicho que la fracción $\frac{a}{b}$ era irreducible.

La contradicción viene de que $\sqrt{2}$ no puede expresarse en forma de fracción. Lo que significa que $\sqrt{2}$ ***no es un número racional***.

En nuestra situación, esto significa que no es posible medir la longitud de la diagonal utilizando como patrón de medida la longitud del lado del cuadrado. Es decir, la relación entre estas dos longitudes no es de conmensurabilidad.

En este caso, se dice que la relación es de ***inconmensurabilidad***.

Miremos que $\sqrt{2}$ a pesar de no ser un número racional lo podemos representar como un punto en la recta.



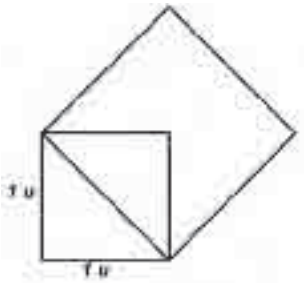
Si sobre la recta en la cual vamos a representar los números dibujas un cuadrado de lado 1 y cuya diagonal mide $\sqrt{2}$, puedes proyectarla mediante el uso del compás sobre dicha recta. El punto que se determina sobre ella representa $\sqrt{2}$.

¿Entre qué números está $\sqrt{2}$? ¿Está antes o después de 1.5?

Si usas la calculadora, ¿qué valor obtienes para $\sqrt{2}$?

Con tu equipo, realiza en tu cuaderno:

1. Dibuja un cuadrado de lado 1 unidad, la que escojas. Traza una diagonal y construye sobre ella otro cuadrado.



¿Cuál es el perímetro del cuadrado construido sobre la diagonal?

¿Cuál es la relación entre las áreas de los dos cuadrados?

¿Cómo obtienes un cuadrado cuya área sea el doble del área de un cuadrado dado?

2. Dado un cuadrado cuyo lado mide 5 cm

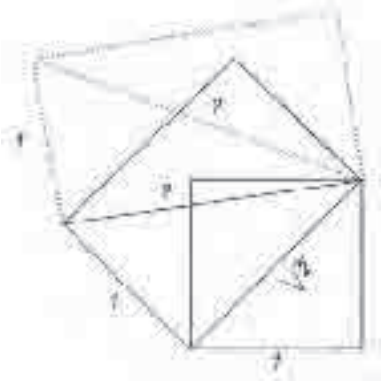
¿Cuál es su área?

¿Cuál es la longitud de su diagonal?

¿Cuál sería el lado de otro cuadrado cuya área sea el doble de éste?

Ilustra tu problema con un dibujo.

Con un compañero(a) lánzate a realizar construcciones interesantes.



Inicialmente dibuja un cuadrado de lado 1 unidad.

Traza la diagonal y sobre ella traza un rectángulo cuyos lados sean $\sqrt{2}$ (la diagonal) y 1 unidad.

Encuentra la diagonal de este rectángulo.

¿Cuánto mide?

Sobre esta nueva diagonal traza otro rectángulo cuyas dimensiones serán la diagonal del anterior y 1 unidad. ¿Cuál es la diagonal de este nuevo rectángulo?

Continúa trazando rectángulos hasta que encuentres uno cuya diagonal sea $\sqrt{10}$.

¿Qué números reales representan las diagonales de los rectángulos? ¿Es alguno de ellos racional?

CLAVE

- Diagonal del cuadrado: $\sqrt{2}$ unidades
- Diagonal del primer rectángulo: $\sqrt{3}$ unidades
- Diagonal del segundo rectángulo: $\sqrt{4}u = 2\,u$.
- Las diagonales de los rectángulos representan los números:
  - $\sqrt{3}, 2, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9} = 3, \sqrt{10}\ldots$
  - $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{9} = 3$, son racionales.

9 UNA RECTA LLENA

Los números reales

Identificación y representación de los números reales

Tus conocimientos acerca de los números te han llevado a utilizar estrategias para representar números naturales, números enteros y números racionales como puntos sobre

una recta. Sin embargo, en la sesión anterior encontraste puntos que representan números diferentes de los anteriores. ¿Te lleva este hecho a encontrarle sentido e interés a una pregunta como la siguiente?

¿Cabrán todos los números irracionales en los huecos que sobre la recta dejan los números racionales?

Con tu equipo de trabajo participa en un conversatorio basado en las siguientes preguntas.

1. ¿A cuáles números se les llama ***naturales***?

   ¿Cuál es el primer número natural?

   ¿Hay un último número natural?

   Dibuja una recta y sobre ella representa algunos de estos números.

2. ¿Cuáles son los números ***enteros***?

   ¿Cómo relacionas los números enteros con los números naturales?

   Sobre la recta anterior representa algunos números enteros.

3. Además de los números naturales y de los enteros has trabajado con los ***números racionales***, ¿cómo se caracterizan éstos?

   Representa algunos de ellos sobre la misma recta.
   Escoge dos de éstos, por ejemplo $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y busca otro racional que esté entre ellos y represéntalos en la recta.

¿Crees que puedes repetir esta búsqueda de números racionales muchas veces?

¿Se agotarán todos los puntos de la recta con representaciones de números racionales?

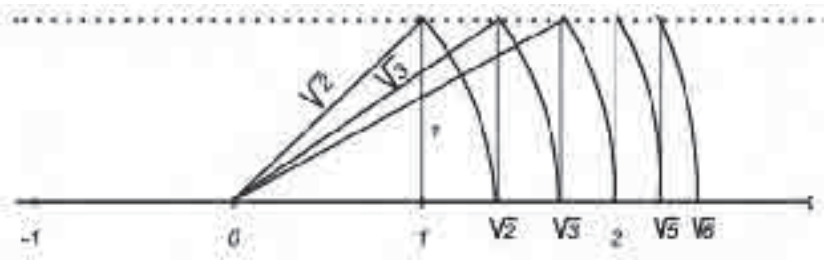
4. Seguramente habrás recordado que en la sesión anterior representaste $\sqrt{2}$, que precisamente no es un número racional, como un punto de la recta.

Representa sobre la recta que has usado números como:

$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$

5. El siguiente procedimiento permite localizar algunos ***números irracionales*** sobre una recta.

Localiza algunos otros.



Con tus compañeros(as) lee y analiza el siguiente texto.

LOS NÚMEROS REALES

La invención de los números ha estado asociada a la resolución de los problemas con los que se han enfrentado los humanos. Cuando hubo necesidad de contar y enumerar, se crearon los números naturales. Con ellos se pueden realizar operaciones como sumar y multiplicar con la seguridad de que el resultado de estas operaciones siempre es un natural. Pero al efectuar sustracciones puede suceder que no haya un número natural que exprese su resultado. Para satisfacer esta necesidad, entre otras, se construyen los números enteros. Este es el significado que tienen las deudas y los saldos rojos que aparecen en los extractos bancarios. Sin embargo, los enteros no son suficientes para resolver, por ejemplo, problemas de medición, así surgen los fraccionarios, con los cuales se puede expresar la medida de una llave de $\frac{3}{4}$ de pulgada, y muchos otros datos de la ciencia y la tecnología.

El sistema numérico se ha ido enriqueciendo con nuevos números. Ya se tienen ***los naturales, los enteros y los fraccionarios*****.** Este es, entonces, el sistema numérico que denominaremos ***números racionales****.*

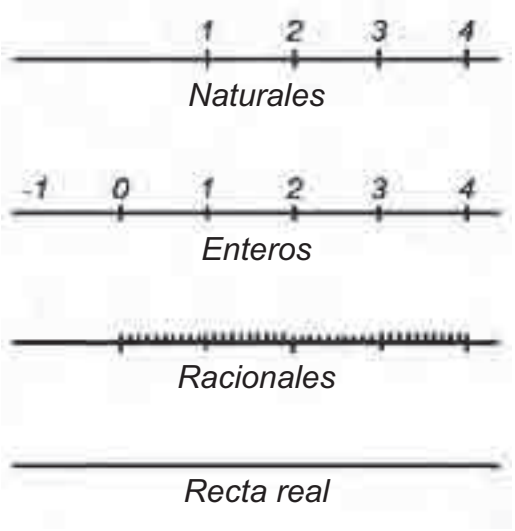
Pero la historia no termina aquí, como ya viste, nuevos problemas llevan a la construcción de otros números, como en el caso de expresar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 unidad: $\sqrt{2}$ unidades. O también la relación de inconmensurabilidad entre la longitud de una circunferencia y su diámetro: π .

Así aparecen los llamados ***números irracionales****.*

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se llama:

CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Se representa por ***R***. Tanto los números racionales como los irracionales son números reales.



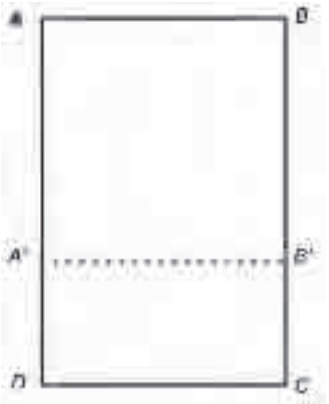
Cada nuevo conjunto numérico ocupa más puntos de la recta. Los números reales la llenan por completo, por lo que se le llama ***recta real*.**

Cuando se determina un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta.

NÚMEROS IRRACIONALES ASOCIADOS AL ARTE, LA CIENCIA Y LA NATURALEZA

El número de oro: Φ

Es el primer número irracional encontrado por los pitagóricos. En la búsqueda de figuras armoniosas se construyó un rectángulo de proporciones especiales:



Al construir el cuadrado $ABB'A'$ queda el rectángulo $A'B'CD$. Las longitudes de los lados de este rectángulo y las del rectángulo inicial $ABCD$ determinan la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{A'D}{DC}$$

Los rectángulos que cumplen esta condición de proporcionalidad son llamados ***rectángulos áureos***.

¿Cómo construir uno de ellos? Supongamos que longitud $AB = 1$ unidad.

Y, ¿cómo encontrar cuánto mide $\overline{AD}$?

Si reemplazamos en la proporción la longitud de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ así:

$AB = 1\,u \quad AD = x$ entonces $AB = A'D = x - 1$ se tiene

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$$
$$1 = x(x-1)$$
$$0 = x^2 - x - 1$$

Más adelante, en este libro, conocerás cómo resolver este tipo de ecuaciones. Por ahora te contamos que el valor hallado para x es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ unidades}$$

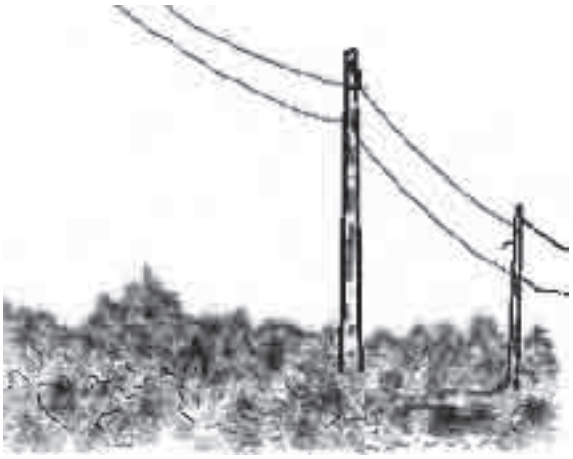
Utiliza la calculadora para hallar un valor aproximado de x. Escoge para $\overline{AB}$ la longitud de 1 dm y construye el rectángulo correspondiente.

El número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es llamado **número de oro**, o **áureo** y se designa por la letra griega Φ *(fi)*

Rectángulos áureos han sido utilizados en el arte, tal es el caso del rectángulo idealizado en el cual se inscribiría la fachada del Partenón de Atenas.

El número e

Este número aparece en la expresión matemática de la curva llamada ***catenaria***, que describe una cadena o cualquier cable o hilo flexible que pende sujeto por sus extremos.



También aparece en ciertos procesos de crecimiento de una población animal o vegetal, como es el caso del crecimiento del molusco *Nautilus*. Igualmente se encuentra asociado a las expresiones de capitalización compuesta y son la base de los llamados logaritmos naturales.

Trabaja individualmente en tu cuaderno.

1. Representa sobre la recta real $\sqrt{26}$

   Ten en cuenta que

   $$26 = 25 + 1$$

   Compara esta expresión con

   $$c^2 = a^2 + b^2$$

Donde c es la hipotenusa y a, b los catetos de un triángulo rectángulo.

¿Cuánto mide cada uno de los catetos de este triángulo?

¿Cuánto mide la hipotenusa?

¿Cómo procederías para que la longitud de la hipotenusa te sirva para obtener la representación de $\sqrt{26}$ sobre la recta real?

Haz la construcción.

2. Representa sobre la recta real $\sqrt{17}$

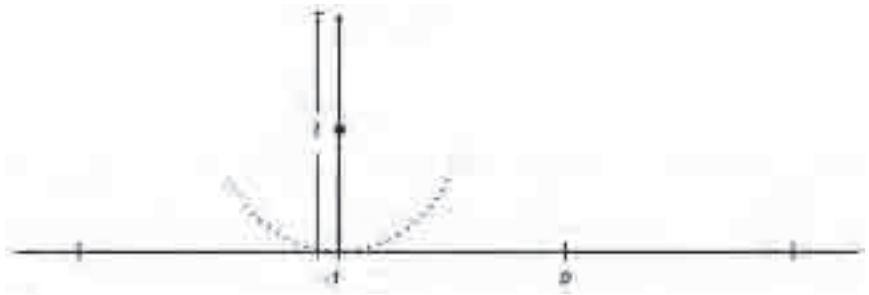
3. De los siguientes números, ¿cuáles son irracionales?

$\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{12}$, $5\sqrt{5}$, $2\sqrt{36}$, 2π , e , Φ , 3Φ

4. Representa Φ sobre la recta real.

   A continuación, te invitamos a seguir el procedimiento realizado por Euclides.

   – Dibuja una recta y sobre ella señala los puntos *–2 , –1, 0 , 1 , 2 , 3*. Por el punto *–1* traza una perpendicular de igual longitud a la unidad que tomaste para graduar la recta.



   – Por el punto medio del segmento vertical traza una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$.

   – Une el punto 0 de la recta con el centro de la circunferencia y prolonga la línea hasta cortar, de nuevo, la circunferencia.

La distancia de 0 hasta este punto de corte representa el número Φ. Ahora puedes transportar esta distancia, con el compás a la derecha de 0, y el punto de corte con la recta es el que le corresponde a Φ.

5. Utiliza el método anterior para construir un rectángulo áureo sabiendo que el lado corto mide 8 cm.

   ¿Cuál es la longitud aproximada del lado largo del rectángulo?

   ¿Cuál es la razón entre el lado largo y el lado corto de este rectángulo?

   ¿Cuánto mide el lado largo de un rectángulo áureo cuyo lado corto mide 40 cm?

CLAVE

5. ℓ ℓ largo $\cong$ 12.9 cm

$$= \frac{12.9}{8} \cong 1.61$$

$\ell' \cong 64.7$ cm

CLAVE

4.

3. $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $5\sqrt{5}$, 2π, 2π, e , Φ 3Φ

2.

1. $a = 5,\ b = 1,\ c = \sqrt{26}$

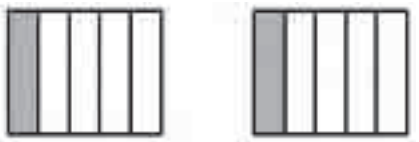
10 UN LUJO DE LA MENTE: LOS IRRACIONALES, EN LA PRÁCTICA, RACIONALES

Expresión decimal de racionales e irracionales

La aproximación, una estrategia práctica

Entre los significados asociados a una fracción está el de considerarla como cociente. Esto nos induce a realizar la división y a encontrar así otra expresión para el mismo cociente, por ejemplo:

"Repartir 2 entre 5"



$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = \rightarrow 2 \;\; \begin{array}{|l} 5 \\ \hline 0.4 \end{array} \rightarrow 0.4$$

Con tu grupo de trabajo:

1. Realiza las divisiones para encontrar la expresión decimal de cada fracción.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{125}, \frac{29}{6}$$

¿Qué observas en las expresiones decimales de estos cocientes?

Al comparar la expresión decimal de $\frac{1}{4}$ con la de $\frac{2}{3}$, ¿qué diferencia encuentras?

Seguramente has observado que, mientras en algunas divisiones, después de ciertas cifras decimales en el cociente el residuo es 0, en otras hay cifras que se repiten, sin parar, en el cociente, porque el residuo, diferente de 0 obliga a seguir la división. Este hecho permite clasificar las expresiones decimales de las fracciones en ***decimales exactas*** y en ***decimales periódicas***.

Clasifica las expresiones decimales que hallaste según este criterio.

2. Encuentra la expresión decimal periódica de las siguientes fracciones. En algunos casos te puedes demorar, no te desanimes porque finalmente descubrirás el periodo.

$$\frac{4}{3} \quad , \quad \frac{21}{90} \quad , \quad \frac{23}{99} \quad , \quad \frac{3}{7} \quad , \quad \frac{4}{11} \quad , \quad \frac{1}{990}$$

¿Cuál es el periodo, o cifras que se repiten, en cada una de las expresiones decimales que encontraste?

Una forma de escritura que permite evitar la repetición del periodo es señalarlo en la expresión decimal con un pequeño arco:

$$\frac{1}{3} = 0.\overset{\frown}{3}$$

$$\frac{29}{6} = 4.8\overset{\frown}{3}$$

$$\frac{23}{99} = 0.\overset{\frown}{23}$$

$$\frac{21}{90} = 0.2\overset{\frown}{3}$$

$$\frac{3}{7} = 0.\overbrace{428571}$$

Con todos los compañeros(as) y el maestro(a) haz comentarios acerca de nuestros conocimientos sobre las representaciones de los números racionales.

Sigue con tu grupo de trabajo.

¿Cómo encontrar la expresión fraccional cuando se conoce la expresión decimal de un racional?

1. Expresiones decimales finitas como:

0.4 *0.25* *1.2*

se pueden traducir desde su lectura a fracciones

0.4 → "cuatro décimas" → $\frac{4}{10}$

0.25 → "veinticinco centésimas" → $\frac{25}{100}$

1.2 → "doce décimas" → $\frac{12}{10}$

¿Empiezan estos periodos siempre en el lugar de las décimas?

¿Te permiten los resultados clasificar las expresiones decimales en periódicas puras y en periódicas mixtas?

El siguiente cuadro resume algunos de tus hallazgos en este trabajo.

Expresión fraccional del número racional	***Expresión decimal***	
	Periódica pura	***Periódica mixta***
$\frac{1}{3}$	0.333...	
$\frac{2}{3}$	0.666...	
$\frac{29}{6}$		4.8333...
$\frac{4}{3}$	1.333...	
$\frac{21}{90}$		0.2333...
$\frac{23}{99}$	0.232323...	
$\frac{3}{7}$	0.428571428571...	
$\frac{4}{11}$	0.3636...	
$\frac{1}{990}$		0.001010...

Con tus compañeros(as) lee la siguiente historia, que te permitirá hacer reflexiones interesantes sobre el uso de los irracionales en la solución de problemas prácticos.

ROMPECABEZAS CUADRADO

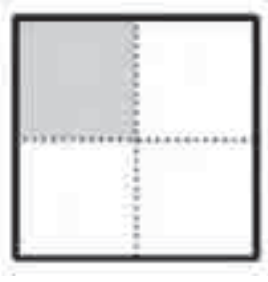
Hace mucho tiempo, había un granjero cuya finca tenía forma cuadrada. Cada lado del cuadrado medía exactamente cien pasos de largo.

Un día llamó a la casa del granjero un hombre cansado, cubierto de polvo, pidiendo algo de comer. El granjero, que era muy bondadoso, le ofreció un abundante almuerzo.

Una vez que hubo terminado de comer, el forastero dijo estas palabras: "Granjero, yo soy tu rey. Como recompensa por tu bondad al ofrecerme comida, creyendo que yo no era sino un humilde extranjero, te concedo que dobles la extensión de tu finca. Pero cuando hayas añadido el nuevo terreno, tu granja deberá seguir teniendo la forma de un cuadrado".

El granjero se puso contentísimo, pues ahora podría sembrar el doble de superficie. Sin pensarlo dos veces, salió a medir su nuevo terreno para poder después cercarlo. Pero en seguida se dio cuenta de que había un problema.

En un principio parecía fácil doblar su terreno cuadrado. Parecía que, dado que cada lado del cuadrado medía cien pasos de largo, cada lado del nuevo cuadrado habría de medir doscientos pasos de largo, es decir, dos veces la longitud de los anteriores lados. Pero no resultó.

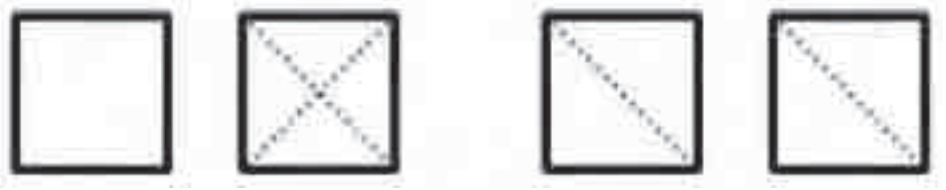


¿Por qué crees que no es esta la solución? ¿Qué ocurre con el área de un cuadrado cuando se duplica el lado?

Busca una solución para el problema del granjero.

Haz de cuenta que vas a construir un rompecabezas cuadrado. Para ello te damos algunas pistas: recorta dos cuadrados congruentes, el reto está en hacer con ellos un solo cuadrado de tal manera que puedas encontrar la relación entre el lado del nuevo cuadrado y el lado del cuadrado inicial, que representa la finca del granjero.

Pistas a la vista.



Si el terreno cuadrado del granjero tenía cien pasos de lado, ¿cuántos pasos de lado tendrá el nuevo cuadrado?

a) Mide sobre los modelos la longitud del lado del cuadrado inicial y la del cuadrado que tiene el doble de área.

b) Ya conoces cuál es la relación entre el lado de un cuadrado y su diagonal.

¿Son estas dos longitudes conmensurables?
¿Por qué?

c) Utiliza la relación que encontraste en b) para expresar la longitud del lado del nuevo cuadrado del granjero.

c) Seguramente has encontrado la expresión teórica para el lado del nuevo terreno del granjero:

$$\sqrt{2} \times 100 \text{ pasos}$$

Pero esta expresión no es muy clara para el rey.

¿Qué propones para que en la realidad este dato le sirva tanto al rey como al granjero para medir la longitud del lado del terreno?

¿Buscarías una aproximación racional para $\sqrt{2}$?

¿Cuál? ¿Usarías la calculadora?

Aquí tienes algunas cifras decimales de $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950...$

que le pueden ayudar al rey a tomar una decisión.

Si el lado del terreno mide:

140 pasos, el rey está muy tacaño.

141 pasos, el rey no sabe medir fracciones de paso.

141.5 pasos, es razonable y fácil de medir.

141.42 pasos, es muy estricto y difícil de medir en la práctica.

Tomar otras cifras decimales, en este caso no sería práctico.

> Fíjate cómo en situaciones como ésta, donde aparece un número irracional, para fines prácticos es necesario tomar una aproximación racional, la más conveniente, según el caso.

Resuelve tú solo.

1. Toma una hoja tamaño carta. Mide la longitud de sus dos lados y de la diagonal.
2. Usa el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de la hoja tamaño carta.

   Usa la calculadora.

   Compara el valor encontrado en 1 con el encontrado en 2.
3. Una señora tiene un mantel de forma circular y de diámetro 2 m, quiere ponerle un borde liso, por el orillo. ¿Qué cantidad de adorno debe comprar?

   Para solicitarlo, ¿cuál de las siguientes expresiones es la más apropiada y por qué?

   a) 4 metros.

   b) 2π metros

   c) 6.28 metros

   d) 6.50 metros

11 DESPUÉS DE UNO VIENE OTRO

Concepto de sucesión

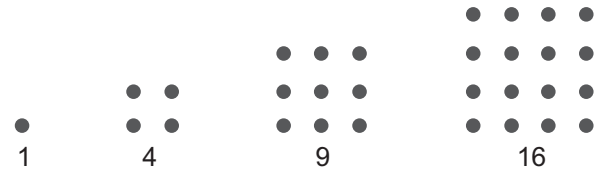
Sucesiones numéricas

Conocemos infinidad de sucesiones. Nos gusta ordenar las cosas que tenemos amontonadas para manejarlas mejor. Así los días de la semana se suceden uno a uno: lunes, martes, miércoles ... y semana tras semana tenemos, por ejemplo, todos los días del año.

Nos interesamos por las sucesiones matemáticas, de las cuales conoces muchas. La más importante en este campo es la de los números de contar: 1, 2, 3, 4 ...

Trabaja con tus compañeros(as) de equipo.

1. ¿Cuántos punticos para cada cuadrado?



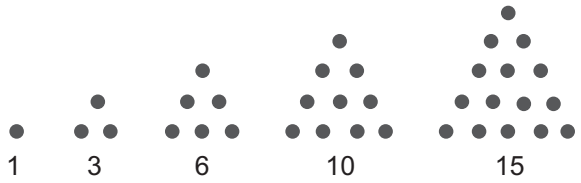
Si observas las construcciones hechas con puntos, igual número de filas que de columnas en cada caso, ¿podrías dibujar el siguiente elemento de estos arreglos?, ¿cuántos puntos tendrá?, y ¿el siguiente, del que has hecho, cuántos puntos tendrá?

Dibuja y cuenta los puntos.

¿Cómo llamarías a los números que cuentan los puntos de cada arreglo de este ejercicio?

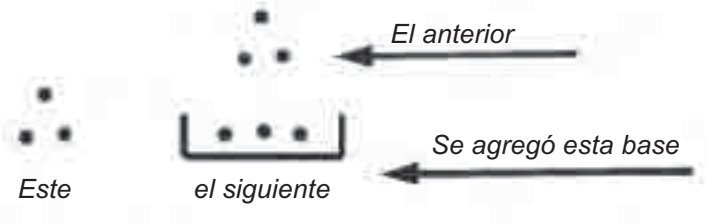
1, 4, 9, 16, ...

2. ¿Cuántos puntos forman cada arreglo?



Dibuja los dos arreglos que seguirían en esta construcción. ¿Cuántos puntos emplearás en el siguiente? Y ¿cuántos en el siguiente del siguiente?

Si observas con detenimiento estos arreglos, puedes observar que el siguiente se construye, por ejemplo, colocando una base más amplia que la anterior.



Puedes predecir, ¿cuántos puntos habrá en la base de la novena de estas construcciones?, ¿por qué?

Si observas la forma de estas construcciones, ¿cómo podrías llamar a los números?

1, 3, 6, 10, 15 ...

3. Se presentan las siguientes cadenas de números:

$$1 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{3} \;;\; \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1} \;;\; \sqrt{2} \;;\; \sqrt{3} \;;\; \sqrt{4} \;;\; \cdots$$

Para cada una escribe los 5 siguientes elementos de la cadena.

Describe, para cada una, ¿cómo crees que se construye cada uno de los números que la conforman?

Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as). Aclara las dudas que puedas tener.

Con tus compañeros(as) lee y analiza las siguientes notas conceptuales:

CONCEPTO DE SUCESIÓN

Las **sucesiones** son cadenas de números **ordenados**, uno tras otro. A cada uno de estos números se llama **término**. Es importante ponerle una etiqueta a cada término según el lugar que ocupe en la sucesión.

Así, por ejemplo, en la sucesión de los **números cuadrados**:

Sucesión: 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36; ...

Término: 1^o , 2^o , 3^o , 4^o ...

Se designa a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; ...

Esta designación de los términos de la sucesión se lee: a sub uno, a sub dos, a sub tres ... y corresponden a los términos primero, segundo, tercero, ...

Al término n-ésimo de la sucesión y se nota: a_n

a_n ⟶ término n-ésimo.

En las sucesiones es importante buscar una expresión para el término n-ésimo o ***general***.

Para algunas sucesiones esto es sencillo, para otras no.

Veamos unos ejemplos:

- Sucesión de **números cuadrados**: *1, 4, 9, 16, 25, 36, ...*

  $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, ... , $a_7 = 7^2 = 49$,

  $a_n = n^2$ esta es la expresión general del término n-ésimo de la sucesión

  ¿Cuál es a_{25} de esta sucesión? ¿Cómo encuentras este término sin escribir la sucesión hasta él?

- Sucesión de **fraccionarios con numerador 1**

  $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5}$ ...

  $a_1 = \frac{1}{1} = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$ ... $a_n = \frac{1}{n}$

¿A qué es igual a_{51}?

- Sucesión de los **números triangulares**.

  1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21...

  $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$ ...

  En esta sucesión, ¿cómo obtener una expresión para construir el término n-ésimo?

  Veamos cómo se construye esta sucesión:

  $a_1 = 1$

  $a_2 = 1 + 2 = 3$; como es el segundo término le sumamos 2 al 1º.

  $a_3 = 3 + 3$; el 3er. término se obtiene sumando 3 al 2º.

  $a_4 = a_3 + 4 = 6 + 4 = 10$

  $a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15$; es $a_4 + 5 = 10 + 5$

  Así $a_n = a_{n-1} + n$.

  Decimos en este caso que el término n-ésimo se construye *por recurrencia*: recurrimos al anterior: n–1 y le sumamos n.

Con tus compañeros(as) resuelve y explica.

1. Escribe cinco términos más de la sucesión:

$$\frac{1}{2} \ , \ \frac{2}{3} \ , \ \frac{3}{4} \ , \ \frac{4}{5} \ , \ \frac{5}{6}, \ldots$$

   ¿Cómo es a_{50} **en esta sucesión?**

   ¿Puedes escribir una expresión para a_n?

2. ¿Conoces la sucesión de los números primos?

   Escribe los primeros 10 números primos.

¿Crees poder escribir una expresión general para esta sucesión?

Comparte tus hallazgos con tus demás compañeros(as).

Trabaja individualmente en tu cuaderno.

1. Escribe los tres términos siguientes de la sucesión:

$$5 \;;\; 8 \;;\; 11 \;;\; 14 \;;\; 17 \ldots$$

¿Qué regularidad encuentras en la construcción de los términos de esta sucesión? ¿Podrías hacerlo por recurrencia para el término n-ésimo?

2. Escribe los seis primeros términos de la sucesión para la cual $a_n = \frac{1}{n^2}$

Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as). Si tienes dudas consulta con tu profesor(a).

12 UNAS SON ARITMÉTICAS

Progresiones aritméticas

Suma de los *n* términos de una progresión aritmética

Unas sucesiones muy interesantes y sencillas son las llamadas **progresiones aritméticas**. Encontramos muchas de ellas en la vida cotidiana. Por ejemplo, en las ciudades el valor de una carrera de taxi. Te subes a él y el banderazo inicial tiene un costo y, luego, por una cantidad fija de metros recorridos hay un incremento fijo. Así que el valor total de la carrera depende de lo lejos que vayas.

Aprenderás de estas sucesiones si resuelves algunos problemas sencillos.

Con tu grupo de trabajo, resuelve los siguientes problemas.

1. Don Ramón alquila bicicletas a los niños de su comunidad. El alquiler de la bicicleta por la primera hora vale $2 000 y por cada hora más $600. ¿Cuál es el valor del alquiler por 2, 3, 4, **...** *n* horas?

   Haz una tabla en tu cuaderno.

ALQUILER DE BICICLETAS

Número de horas	Valor	Total
1ª	*2 000*	*2 000*
2ª	*2 000 + 600*	*2 600*
3ª	*2 000 + 600x(2)*	*3200*
⋮	⋮	⋮

   Para alquilar la bicicleta por 4 horas, ¿cuánto más hay que pagar por encima de los $2 000 iniciales de la 1ª hora?

   ¿Cómo calcularías el costo del alquiler durante un número *n* de horas? Piensa en el costo de la primera hora más el incremento de $600 por las *n* – 1 horas adicionales. (¿Por qué restamos 1 a *n*?).

2. En un edificio de muchos pisos, el primer piso tiene una altura de 5 metros, del segundo en adelante la altura por piso es de 3.5 m. ¿A qué altura están los pisos 2º, 3º, 4º, 5º, *n*-ésimo?

   Escribe tus cálculos en términos de una sucesión

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 5 && = 5 \\
a_2 &= 5 + 3.5 && = 8.5 \\
a_3 &= 5 + 3.5 \times (2) && = 12 \\
a_4 &= 5 + 3.5 \times (3) && = \\
&\vdots \\
a_n &= &&
\end{aligned}
$$

3. Juliana tiene para su mesada $45 000, de la cual gasta $3 000 diariamente. ¿Cuánto le queda a Juliana al final de cada día?

Elabora una tabla donde hagas la cuenta del dinero de Juliana diariamente.

Al final del

1er. día :	$a_1 = 45\,000$			
2º día:	$a_2 = 45\,000 - 3\,000$	$= 42\,000$		
3er. día:	$a_3 = 45\,000 - 3\,000(2)$	$= 39\,000$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-ésimo día:				

4. Analiza las sucesiones que construiste en los problemas anteriores.

   a) Calcula cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos.

   $a_2 - a_1$ $a_3 - a_2$ $a_4 - a_3$

   ¿Qué puedes concluir?

   En el caso de la altura de los pisos del edificio:

   $a_2 - a_1$ $a_3 - a_2$ $a_4 - a_3$

   ¿Sucede lo mismo para cualquier par de términos consecutivos?

   En el problema de los gastos de Juliana:

   $a_2 - a_1$ $a_3 - a_2$ $a_4 - a_3$

   ¿Por qué es diferente lo que ocurre en esta sucesión?, ¿cómo son estas diferencias?

   b) ¿Cómo explicarías la construcción de estas sucesiones?

   ¿Tienes una estrategia general para la construcción de términos sucesivos de estas sucesiones?

En una reunión plenaria discute con tus compañeros(as) y el profesor(a) tus resultados e hipótesis acerca de las sucesiones aritméticas que has trabajado en los problemas.

Con tu grupo, lee y analiza este texto.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Se llama **progresión aritmética** a sucesiones como las que originaron los problemas que resolviste en la sesión anterior.

En ellos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ se obtuvo sumando a cada término una cantidad fija ***d*** llamada ***diferencia***.

Así :

$$a_2 = a_1 + d \quad ; \quad a_3 = a_2 + d \quad ; \quad a_4 = a_3 + d$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Y, en general, se tiene que:

$$a_n - a_{n-1} = d$$

En algunos casos esta diferencia es positiva, en otros casos negativa, pero siempre es la misma diferencia.

Sobre una progresión aritmética se puede conocer todo si sabemos el primer término a_1 y la diferencia *d.*

Veamos por qué:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times d$$

$$a_4 = a_1 + 3 \times d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$$

Fíjate que cuando buscamos, por ejemplo, el término cuarto lo obtenemos sumando a a_1 , *n*-veces menos una vez, la diferencia *d*.

> La expresión $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$ corresponde al término *n*-ésimo de toda sucesión aritmética.

Esta expresión permite conocer todo lo que queramos de una progresión aritmética.

Veamos algunos problemas.

1. Si a_1 de una cierta progresión es 6 y la diferencia es 1.5, escribe los 10 primeros términos de la sucesión.

$$a_1 = 6 \quad , \quad d = 1.5$$

$$a_2 = a_1 + (2 - 1)\, d = 6 + 1.5 = 7.5$$

$$a_3 = a_1 + (3 - 1)\, d = 6 + 2 \times 1.5 = 9$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1)\, d = 6 + 3 \times 1.5 = 10.5$$

Comprueba que esta sucesión es:

$$6\ ,\ 7.5\ ,\ 9\ ,\ 10.5\ ,\ 12\ ,\ 13.5\ ,\ 15\ ,\ 16.5\ ,\ 18\ ,\ ...$$

En esta sucesión $a_n = 6 + (n - 1)\ 1.5$

¿Cuál es el término a_{20} de esta progresión aritmética?

Para hallar a_{20} reemplazamos *n* por 20 en la expresión general de a_n.

$$a_n = 6 + (n - 1)1.5$$

$$a_{20} = 6 + (20 - 1)1.5 \ = 6 + 19 \times 1.5 = 6 + 28.5$$

$$a_{20} = 34.5$$

2. Paula quiere ahorrar semana a semana, cada vez un poco más esta semana ahorra $2 000, la próxima $2 200, en la subsiguiente $2 400 y así sucesivamente.

   Acaba de echar en su alcancía $4 200 de esta semana pero ha olvidado cuántas semanas lleva ahorrando. ¿Cómo saber el número de semanas en que ha ahorrado?

$a_1 = 2000 \qquad d = 200 \qquad a_n = 4\ 200$

Si $a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$

$$4\ 200 = 2\ 000 + (n - 1)\ 200$$

Entonces se puede saber cuánto es *n* – 1.

$$n-1=\frac{4\,200-2\,000}{200}$$

$$n-1=\frac{2\,200}{200}=11$$

$$n=11+1=12$$

Paula ha ahorrado durante 12 semanas.

3. ¿Cómo construir una progresión aritmética cuando se conoce: el primer término, por ejemplo 1 000, el último término, 17 000 y además se quiere que la sucesión tenga 9 términos?

   ¿Qué dato de la progresión no conocemos?

   Tenemos $a_1 = 1\,000$, $a_n = 17\,000$, $n = 9$

   No conocemos la diferencia:

   $$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

   Reemplazando en la expresión general para a_z tenemos

   $$17\,000 = 1\,000 + (9-1)\,d$$

   De donde podemos despejar d

   $$d=\frac{17\,000-1\,000}{9-1}=\frac{16\,000}{8}=2\,000$$

   La sucesión será, entonces

   $1\,000\ ,\ 3\,000\ ,\ 5\,000\ ,\ 7\,000\ ,\ 9\,000\ ,\ 11\,000\ ,\ 13\,000\ ,\ 15\,000\ ,\ 17\,000$

   Si analizamos lo que se ha hecho es encontrar 7 términos entre 1 000 y 17 000, de tal manera que con a_1 y a_n se produjera una progresión aritmética.

   Esta operación se denomina interpolación. Este problema consistió en interpolar 7 medios diferenciales entre $1\,000$ y $17\,000$.

   Definimos, entonces:

> Interpolar consiste en encontrar la diferencia d en una progresión aritmética de la cual se conoce el primer término, el último y el número total de ellos.

Con tus compañeros(as) de equipo, resuelve:

1. De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones aritméticas? Explica por qué sí o por qué no, en cada caso.

   a) $3 \; ; \; 8 \; ; \; 13 \; ; \; 18$ **...**

   b) $1 \; ; \; 3 \; ; \; 6 \; ; \; 10 \; ; \; 15 \; ;$ **...**

   c) $\frac{2}{5} \; ; \; \frac{3}{5} \; ; \; \frac{4}{5} \; ; \; \frac{5}{5} \; ; \; \ldots$

   d) $-20 \; ; \; -18 \; ; \; ; \; -16 \; ; \; -14 \; ;$ **...**

2. ¿Cuál es el término 25 de la progresión aritmética cuyos tres primeros términos son:

   $3 \quad ; \; 4.5 \; ; \; 6 \; ;$ **...**

3. Interpola 5 medios diferenciales entre 8 y 32. ¿Cuánto vale *d*?
   Escribe la progresión que resulta.

4. Inventa una progresión aritmética de 5 términos.

Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros(as).

Con tus compañeros(as) de grupo, analiza más hechos sobre las progresiones aritméticas.

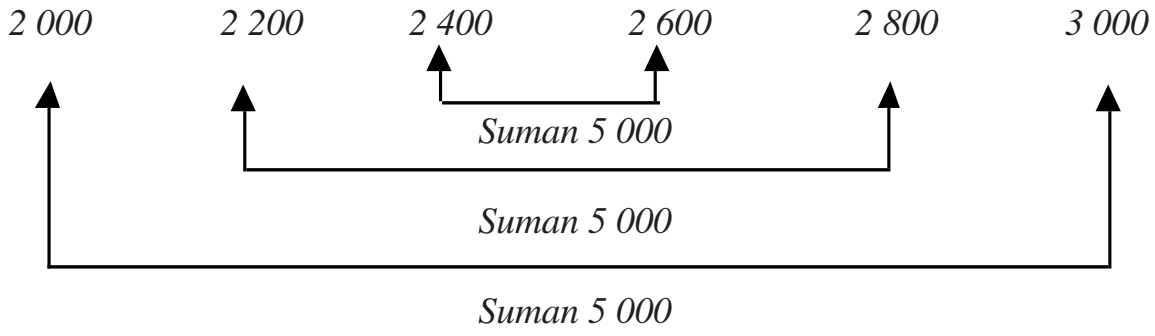
Recuerda que Paula ahorra semanalmente $200 más que la semana anterior. Comenzó con $2 000 en la primera semana. ¿Cuánto habrá ahorrado en las primeras seis semanas?

Paula ha ahorrado en 6 semanas:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$
$$2\,000 + 2\,200 + 2\,400 + 2\,600 + 2\,800 + 3\,000$$

Esta suma no es muy larga ... ¿Pero existirá una forma de hacerla más fácilmente?

Observa y analiza:



¡La suma del primero y el último término es igual que la suma del segundo y el penúltimo e igual a la del tercero y el antepenúltimo!

¿Por qué sucede esto?

$2\,000 + 3\,000 = 5\,000$

Se suma 200 ↓ ↓ Se resta 200

$2\,200 + 2\,800 = 5\,000$

Se suma 200 ↓ ↓ Se resta 200

$2\,400 + 2\,600 = 5\,000$

} La suma no varía

Ahora podemos idear un truco que facilite sumar los términos de una sucesión.

Con nuestro ejemplo, llamemos S a la suma de los seis términos

$$S = 2\,000 + 2\,200 + 2\,400 + 2\,600 + 2\,800 + 3\,000$$

Ahora invertimos el orden de los sumandos

$$S = 3\,000 + 2\,800 + 2\,600 + 2\,400 + 2\,200 + 2\,000$$

Una vez que tenemos la suma de los términos de a_1 a a_6 y de a_6 a a_1, las sumamos.

$$S = 2\,000 + 2\,200 + 2\,400 + 2\,600 + 2\,800 + 3\,000$$

$$S = 3\,000 + 2\,800 + 2\,600 + 2\,400 + 2\,200 + 2\,000$$

$$2S = 5\,000 + 5\,000 + 5\,000 + 5\,000 + 5\,000 + 5\,000$$

$$2S = 6 \times 5\,000 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{6 \times 5\,000}{2}$$

$$S = 15\,000$$

Fíjate que las sumas parciales de 25 suman tanto como $a_1 + a_n$, la suma del primer y el último término, y en total tenemos 6 de estas sumas, tantas como el número total de términos.

Si generalizamos, tenemos:

$$2S = (a_1 + a_n)\, n$$

De tal manera que la suma de la progresión aritmética se expresa como

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

esta expresión nos permite calcular fácilmente la suma total de una progresión aritmética.

¿Cuánto ahorró Paula en 12 semanas?

$$S = \frac{(a_1 + a_{12})}{2} \times 12$$

$$S = \frac{2\,000 + 4\,200}{2} \times 12$$

$$S = \frac{6\,200}{2} \times 12 =$$

$$S = 6\,200 \times 6 = 37\,200$$

Si quieres comprobarlo escribe la progresión y haz la suma.

Con tu grupo realiza:

1. La tabla de multiplicar de 7 puede escribirse como la progresión aritmética:

   7 ; 14 ; 21 ; ... 70

   ¿Cuánto suma esta progresión?

2. Encuentra la suma de los primeros 20 términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) *1 , 2 , 3 , 4, ...*

b) *100 , 95 , 90 , 85 , ...*

Discute tus resultados con tus compañeros(as) y el profesor(a).

Si es necesario, consulta la clave.

CLAVE

1. 385 , 2. a) 210 ; b) 1 050.

13 OTRAS SON GEOMÉTRICAS

Progresiones geométricas

Suma de los *n*-términos de una progresión geométrica

En las sucesiones numéricas es muy interesante comparar sus términos, analizar su crecimiento, encontrar si existen o no regularidades entre ellos, hacer predicciones sobre cómo encontrar nuevos términos, encontrar expresiones generales para ellos, cuando esto es posible ...

Con tu grupo de trabajo realiza.

1. Observa y analiza la siguiente sucesión:

   2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

¿Es ésta una progresión aritmética? ¿Existe la misma diferencia entre dos términos sucesivos cualesquiera? Por ejemplo, entre a_2 y a_1 ,entre a_3 y a_2 , entre a_4 y a_3 ...

¿Cómo obtienes 4 a partir de 2?, ¿cómo obtienes 8 a partir de 4?, ¿cómo obtienes 16 a partir de 8?

Encuentra las razones:

$$\frac{a_2}{a_1} \; ; \; \frac{a_3}{a_2} \; ; \; \frac{a_4}{a_3} \; ; \; \frac{a_5}{a_5} \; ; \; \ldots$$

¿Qué puedes concluir?

2. Analiza esta otra sucesión

$$32 \; , \; 16 \; , \; 8 \; , \; 4 \; , \; 2 \; , \; ...$$

¿Es ésta una progresión aritmética?

Encuentra las razones

$$\frac{a_2}{a_3} \; ; \; \frac{a_3}{a_4} \; ; \; \frac{a_4}{a_5} \; ; \quad \cdots$$ ¿Qué observas?

¿Cómo obtienes un término de esta sucesión partiendo del anterior?

3. ¿Qué podrías decir de la siguiente sucesión?

$1 \; , \; 5 \; , \; 25 \; , \; 125 \; , \; 625, \; ...$

¿Podrías escribir los dos siguientes términos de ella?

Compara tu trabajo con el de otros compañeros(as).

Con tus compañeros(as), lee y analiza el siguiente texto.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Cuando en una sucesión a_1 ; a_2 ; a_3 ... a_n, cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, decimos que se tiene una **progresión geométrica**.

Por ejemplo:

$$2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ 32\ ,\ ...$$

Es una progresión geométrica porque cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2.

$$4 = 2 \times 2\ ;\ 8 = 4 \times 2\ ;\ 16 = 8 \times 2\ ;\ 32 = 16 \times 2$$

El número fijo por el cual se multiplica un término para obtener el siguiente se llama ***razón de la progresión***: r. Así: $a_2 = a_1 r\ \ ;\ \ a_3 = a_2 r\ \ ;\ \ a_4 = a_3 r$ ...,

¿Cómo averiguar si una sucesión es una progresión geométrica?

¡Es muy sencillo!, se comprueba si el cociente entre dos términos consecutivos es constante:

$$\frac{a_2}{a_1} = r\ \ ;\ \ \frac{a_3}{a_2} = r\ \ ;\ \ \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

¿Cómo expresar un término general de una progresión geométrica?

Veamos cómo se construyen los términos en una progresión geométrica:

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = a_1 r.r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = a_2 r.r = a_1 r.r.r = a_1 r^3$$

$$a_5 = a_4 r = a_3 r.r = a_2 r.r.r = a_1 r.r.r.r = a_1 r^4$$

De la construcción de estos primeros términos se observa cómo se pueden expresar como el producto del primer término a_1 por una potencia de la razón de la progresión.

Esta potencia es inferior en una unidad al número del término expresado. Por ejemplo:

$$a_5 = a_1\ r^{\,4}$$

Así el término *n*-ésimo se expresa:

$$a_n = a_1\ r^{\,n-1}$$

Ejemplo:

En la progresión: $2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ ...$ ¿cuál es el término a_6?, ¿cuál es el término a_{10}?

Encontremos r: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$

Busquemos a_6

$$a_6 = a_1 r^5 = 2 \times 2^5 = 2 \times 32 = 64$$

Busquemos a_{10}

$$a_{10} = a_1 r^9 = 2 \times 2^9 = 2 \times 512 = 1\ 024$$

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

En las progresiones geométricas también resulta interesante y práctico encontrar una expresión general que permita sumar sus términos.

¿Cómo calcular $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$, cuando la sucesión es una progresión geométrica?

Recurramos a unos cuantos trucos:

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad por r.

$$S \times r = a_1 r + a_2 r + ... + a_{n-1} + a_n r$$

Fíjate que en esta expresión $a_1 r = a_2$; $a_2 r = a_3$, ... ,

$$a_{n-1} r = a_n$$

Así que reemplazando estos valores se obtiene:

$$S \times r = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n r$$

Restamos en los dos miembros de esta igualdad S

$$\begin{aligned} S \cdot r &= \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + a_4 + ... + a_n r \\ S &= \cancel{a_1} + \cancel{a_2} + a_3 + \ldots + a_n \\ \hline S \cdot r - S &= -a_1 + a_n r \end{aligned}$$

Al factorizar y ordenar, se obtiene:

$$S\,(r-1) = a_n\,r - a_1$$

Despejando la suma S:

$$S = \frac{a_n r - a_1}{(r-1)}$$

Comprobemos la expresión para sumar los 5 primeros términos de: $2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16,\ 32$, ... , donde $a_1 = 2\ ,\ a_n = 32\ \ y\ \ r = 2$

$$S = \frac{32 \times 2 - 2}{(2-1)} = 62$$

Verifica si se cumple que:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

Concluimos que:

> En una progresión geométrica cuya razón es *r*, la expresión para el término general es:
>
> $$a_n = a_1\,r^{\,n-1}$$
>
> Y la suma de sus *n* primeros términos es:
>
> $$S = \frac{a_n r - a_1}{(r-1)}$$

Con tus compañeros(as) de grupo resuelve:

1. ¿Cómo defines una progresión geométrica?

2. ¿Qué estrategia usas para determinar si una progresión es geométrica o no?

3. Escribe los cinco primeros términos de las progresiones geométricas correspondientes si:

a) $a_1 = 3$ y $r = 4$

b) $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$

4. En una progresión geométrica $a_1 = 5 \ y \ a_2 = 15$, ¿cuál es la expresión para hallar cualquier término a_n?

5. Calcula la suma de los 6 primeros términos de una progresión geométrica, para la cual $a_1 = 2 \ y \ r = 3$.

6. ¿Quién crece más rápido:

   a) Una progresión aritmética, donde $a_1 = 1$ y la diferencia es 2

   b) Una progresión geométrica, donde $a_1 = 1$ y la razón es 2?

   Escribe los 10 primeros términos de cada progresión, compara término a término. Halla las respectivas sumas de los 10 primeros términos y compáralas. ¿Qué concluyes?

Socializa y discute tu trabajo y el de tus compañeros(as).

Resuelve individualmente en tu cuaderno.

En un cultivo de amebas se han contabilizado 40 de ellas. Bajo ciertas condiciones del cultivo se produce bipartición (cada una se separa en 2) cada 4 horas. ¿Cuántas amebas hay en el cultivo al cabo de 24 horas?

Compara la solución a tu problema con la encontrada por otros compañeros(as). Si necesitas, consulta la clave.

CLAVE

2 560 amebas (se produjeron 6 biparticiones)

14 LOS INTERESES

Interés simple e Interés compuesto
Los ahorros y las deudas

En la vida cotidiana las transacciones de dinero como cuentas de ahorro, certificados de depósito a término, préstamos, compras a crédito, entre otras, exige que las personas conozcan temáticas como interés, tasas de interés, intereses, plazos, cuotas, para que cuando se requiera una de esas transacciones, de acuerdo con las condiciones deseadas, la elección que se haga sea la más favorable, y, en caso de asumir responsabilidades, éstas sean perfectamente conocidas.

Con tu grupo de trabajo, busca dar respuestas a la siguiente situación.

María coloca en una cuenta de ahorros $100 000. La entidad bancaria ofrece una tasa de interés del 3% mensual, que quiere decir que por cada $100 ahorrados se reciben $3 de interés. María acuerda retirar cada mes los intereses obtenidos y dejará su dinero durante 6 meses, en la entidad.

a) ¿Cuánto dinero recibe María mensualmente?

b) ¿Cuánto recibe por este concepto durante los 6 meses?

c) María quiere, al final de los 6 meses, calcular en cuánto dinero se ha convertido su capital ahorrado. ¿Cómo puede hacer este cálculo?

a) La tasa de interés que ofrece la entidad es 3%. Así $100 producen en un mes:

$$\$100 \times 3\% \quad = \quad 100 \times \frac{3}{100} = \$3$$

¿Cuánto recibe María de intereses por sus $100 000 en el primer mes?

¿Cómo procedes para hacer este cálculo?

b) Ya calculaste cuánto recibe María por concepto de intereses en un mes. ¿Cómo calculas el dinero que recibirá María en 6 meses?

c) ¿En cuánto estima María que se ha convertido su capital ahorrado? ¿Cómo lo calculará?

Recuerda: María tenía inicialmente $100 000 y recibe intereses producidos en los 6 meses que ha dejado su dinero en la entidad.

Compara tus respuestas con las obtenidas por tus compañeros(as).

Con tus compañeros(as) lee y analiza el siguiente texto, que es una adaptación del tema tratado en 9o. grado, de la Renovación Curricular:

INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO

Las actividades comerciales se basan en el pago adicional de una cierta cantidad de dinero por periodo o unidad de duración a la cual llamamos interés por el uso del dinero, en algunos casos prestado, en otros depositado. La mayor parte de los ingresos de bancos y entidades financieras provienen de los intereses sobre préstamos, como los de vivienda, de compra de artículos, etc. También las entidades como bancos o corporaciones reciben dinero de los usuarios y por su uso pagan intereses, como en cuentas de ahorro o certificados a término.

INTERÉS SIMPLE

Cuando el capital dado en préstamo o en ahorro es el único que gana interés, se habla de interés simple. Es el caso del ahorro de María del problema que resolviste inicialmente. Al retirar los intereses mensuales esta suma no aumenta el capital inicial para que, como un nuevo capital, produjera intereses también mayores.

Analicemos el desarrollo de la operación financiera de María, la cual nos dará pistas para encontrar expresiones generales que puedan ser usadas en la solución de problemas similares.

No. de periodos (meses)	***Capital al comienzo de cada periodo (capital que gana intereses)***	***Intereses producidos en cada periodo (cada mes)***	***Capital al final de cada periodo***
1	$100\,000 = C_o$	$100\,000 \times 0.03 = 3000 = I$	$C_1 = 100\,000 + 3\,000 = 103\,000 = Co + I$
2	$100\,000 = C_o$	$100\,000 \times 0.03 = 3000 = I$	$C_2 = 103\,000 + 3\,000 = 106\,000 = C_o + I$
3	$100\,000 = C_o$	$100\,000 \times 0.03 = 3000 = I$	$C_3 = 106\,000 + 3\,000 = 109\,000 = C_o + I$
4	$100\,000 = C_o$	$100\,000 \times 0.03 = 3000 = I$	$C_4 = 109\,000 + 3\,000 = 112\,000 = C^o + I$

5	$100\,000 = C_o$	$100\,000 \times 0.03 = 3\,000 = I$	$C_3 = 112000 + 3\,000 = 115\,000 = Co + I$
6	$100\,000 = C_o$	$100\,000 \times 0.03 = 3\,000 = I$	$C_4 = 115000 + 3\,000 = 118\,000 = Co + I$

Este análisis nos permite encontrar una expresión para el capital al final de un número fijo de periodos *n*, que gana un interés *I* para ese periodo.

$$C_n = C_o + n\,i$$

Pero debemos explicitar cómo calcular i, interés producido en cada periodo, cuando conocemos C_o y la tasa de interés ofrecida por periodo.

$$In = C_o\,i$$

$$Cn = C_o + n\,C_o I = C_o\,(1 + ni)$$

Comprueba si la expresión obtenida nos ayuda a calcular en cuánto se convirtió el ahorro de María después de 6 meses.

$$C_6 = C_o\,(1 + 6 \times \frac{3}{100})$$

$$C_6 = 100\,000\,(1 + 6 \times 0.03)$$
$$= 100\,000\,(1 + 0.18)$$
$$= 100\,000\,(1.18) = 118\,000$$

Compara con el valor de C_6, en la tabla y con el valor que obtuviste en c) del problema inicial.

Veamos la sucesión resultante al organizar los capitales parciales al final de cada periodo.

$$C_o\ ,\ C_1\ ,\ C_2\ ,\ C_3\ ,\ C_4\ ,\ C_5\ ,\ C_6$$

$$100\,000\ ,\ 103\,000\ ,\ 106\,000\ ,\ 109\,000\ ,\ 112\,000\ ,\ 115\,000\ ,\ 118\,000$$

¿Es esta una progresión aritmética? ¿Cuál es la diferencia?

$$a_2 - a_1 = C_1 - C_o = 103\,000 - 100\,000 = 3\,000$$

$$a_3 - a_2 = C_2 - C_1 = 106\,000 - 103\,000 = 3\,000$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_7 - a_{6=} C_6 - C_5 = 118\,000 - 115\,000 = 3\,000$$

La diferencia es $I = C_o\ i$

En general la progresión es:

$$C_o\ ,\ C_o\ (1 + i)\ ,\ C_o\ (1 + 2i)\ ,\ \ldots,\ C_o\ (1 + ni)$$

y la diferencia es: $C_o\ i,\quad ;\ C_o$ = *Capital inicial*

i = *tasa de interés.*

INTERÉS COMPUESTO

¿Qué ocurre si los intereses producidos en cada periodo no se retiran, sino que éstos van aumentando el capital inicial y sobre éste se calculan los intereses en el siguiente periodo de tiempo?

En este caso se dice que los intereses se capitalizan, y que la operación financiera es a ***interés compuesto***.

Veamos, en nuestro ejemplo, cuando María decide capitalizar los intereses, es decir no los retira durante los meses en que va a ahorrar.

No. de meses	Capital al comienzo de cada mes	Intereses producidos en cada mes	Capital al final de cada mes
1	*100 000* C_o	*100 000 × 0.03 = 3 000* $I_1 = C_o\ i$	*100 000 + 3 000 = 103 000* $C_1 = C_o\ (1 + i)$
2	*103 000* $C_1 = C_o\ (1 + i)$	*103 000 × 0.03 = 3 090* $I_2 = C_o\ (1 + i)\ i$	*103 000 + 3 090 = 106 090* $C_2 = C_o\ (1 + i)^2$
3	*106 050* $C_2 = C_o\ (1 + i)^2$	*106 090 × 0.03 = 3 182.70* $I_3 = C_o\ (1 + i)^2\ i$	*106 090 + 3 182.70 = 109 272.70* $C_3 = C_o\ (1 + i)^3$
4	*109 272.70* $C_3 = C_o\ (1 + i)^3$	*109 272.70 × 0.03 = 3 278.18* $I_4 = C_o\ (1 + i)^3\ i$	*109 272.70 + 3 278.18 = 112 550.88* $C_4 = C_o\ (1 + i)^4$
5	*112 550.88* $C_4 = C_o\ (1 + i)^4$	*112 550.88 × 0.03 = 3 376.52* $I_5 = C_o\ (1 + i)^4\ i$	*112 550.88 + 3 376.52 = 115 927.40* $C_5 = C_o\ (1 + i)^5$
6	*115 927.40* $C_5 = C_o\ (1 + i)^5$	*115 927.40 × 0.03 = 3 477.82* $I_6 = C_o\ (1 + i)^5\ i$	*115 927.40 + 3 477.82 = 119 415.22* $C_6 = C_o\ (1 + i)^6$

Las expresiones que permiten calcular los intereses y el capital en un periodo cualquiera ***n*** son:

$$I_n = C_o\ (\ 1 + i)^{n-1}.\ i$$

$$C_n = C_o\,(\,1 + i)^n$$

Es interesante analizar la sucesión que se obtiene del capital al final de cada periodo:

$$C_o\,(\,1 + i)\;,\; C_o\,(\,1 + i)^2,\; C_o\,(\,1 + i)^3\;,\;\ldots\;,\; C_o\,(\,1 + i)^n\;,\;\ldots$$

Esta sucesión es una progresión geométrica, ¿cuál es la razón? Busquémosla:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{C_0(1+i)^2}{(1+i)} = 1 + i$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{C_0\,(1+i)^3}{C_0\,(1+i)^2} = 1 + i$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{C_0\,(1+i)^n}{C_0\,(1+i)^{n-1}} = 1 + i$$

Compara, para el ejemplo que hemos desarrollado, los intereses simples y los intereses compuestos que produjera el dinero de María colocado en una u otra opción de ahorro. ¿Qué opinas? Discútelo con tus compañeros(as) y el profesor(a).

Con tu equipo, resuelve el siguiente problema:

Una persona solicita a una entidad un préstamo de $500 000, por tres meses. Ofrece una tasa de 3.5% mensual.

¿Cuánto dinero cancelará la persona por el préstamo si:

a) Le cobran interés simple durante los tres meses?

b) Le cobran interés compuesto, durante los tres meses?

Compara tus respuestas con las que encuentren tus compañeros(as).

Trabaja individualmente, en tu cuaderno.

Un certificado a término ofrece una tasa de 2.4% mensual.

¿En cuánto se convierte un capital de $2 000 000 colocados por tres meses si no se retiran los intereses cada mes?

Compara con la clave si es necesario.

CLAVE

$C = 2\,147\,483.64$

15 ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

Demostración del aprendizaje logrado

Evaluación personal de los avances logrados

Esta sesión te propone situaciones que te permitirán valorar tus conocimientos acerca de los números reales y sus operaciones.

1. En las siguientes igualdades se ha incurrido en algunos errores. Encuéntralos y explica.

   a) $\sqrt{81} = 9$ *b)* $\sqrt{0.49} = 0.7$ *c)* $\sqrt{0.9} = 0.3$

   d) $(\sqrt{11})^2 = 11$ *e)* $\sqrt{(-5)^2} = 5$ *f)* $\sqrt{0.01} = 0.1$

2. Escribe los números siguientes en la forma $a\sqrt{b}$, donde a y b son números enteros y a es el número más grande posible.

   $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{32}$

3. Realiza las operaciones indicadas

   a) $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$

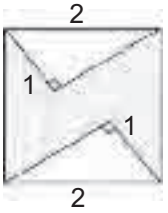
   b) $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{180} + 17\sqrt{5}$

4. Una mesa redonda tiene un radio de 56.4 cm.

   Si $3.14 < \pi < 3.15$, encuentra entre qué números está el área de la mesa.

   ¿Es esta área mayor o menor que 1 m^2?

5. Determinar el área de la parte sombreada del cuadrado de lado 2 unidades.



   Si $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$, ¿Entre qué números está esta área?

   En reunión especial, con tus compañeros(as) y el maestro(a) discute los resultados de tu evaluación.

6. Analiza las siguientes sucesiones:

   a) $1.2 \ , \ 1.4 \ , \ 1.6 \ , \ ...$

   b) $1.2 \ ; \ 12 \ ; \ 120 \ ; \ ...$

   c) $1.2 \ ; \ 2.4 \ ; \ 4.2 \ ; \ 16.8 \ ; \ ...$

   d) $1.2 \ ; \ 2.4 \ ; \ 3.6 \ ; \ 4.8 \ ...$

   e) $3 \ , \ 6 \ , \ 12 \ , \ 24 \ , \ ...$

- ¿Cuáles de ellas son progresiones aritméticas?

Encuentra para cada una, la diferencia, los dos siguientes términos y el término general.

Calcula para cada una S_5 (la suma de los 5 primeros términos)

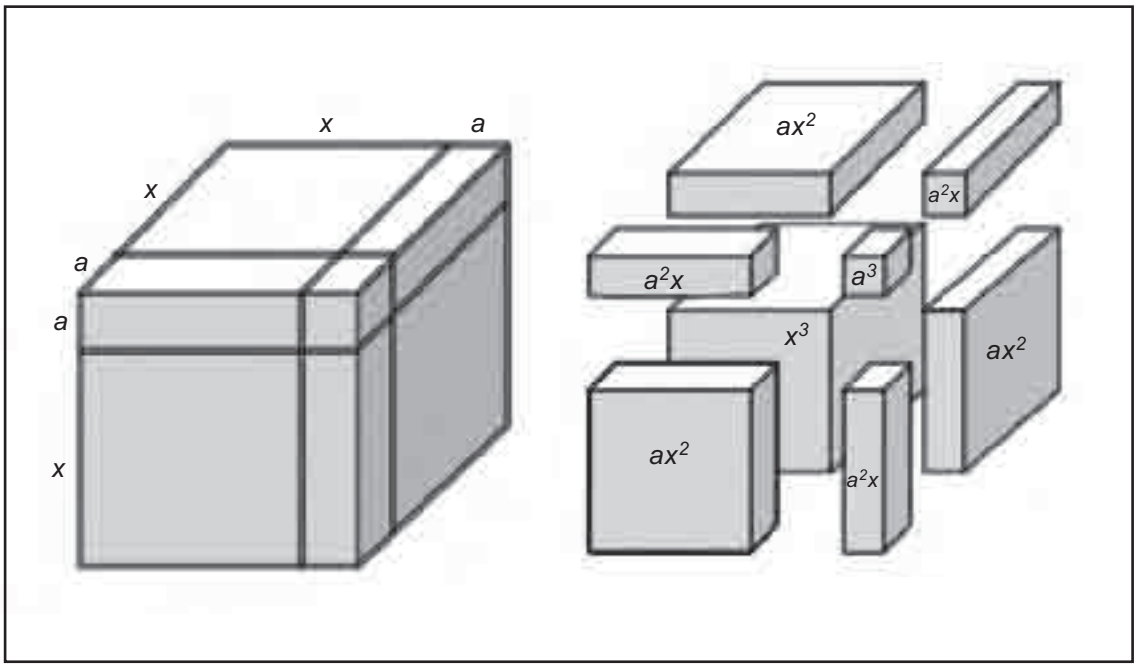
- ¿Cuáles son progresiones geométricas?

Encuentra en cada una de ellas: la razón, los dos siguientes términos y el término general.

Calcula la suma de los 6 primeros términos.

Núcleo Básico 3

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN



En este núcleo aprenderás a manejar expresiones algebraicas especiales, a operar con ellas, a encontrar otras que sean equivalentes, pero más sencillas; a encontrar su valor numérico de acuerdo con los valores que tomen las variables. Una herramienta poderosa para la visualización y por lo tanto para una mejor comprensión de las expresiones algebraicas son los modelos de la geometría.

Muchos fenómenos de los que se ocupan las ciencias como la física, la química, la biología, la economía y otras se modelan con expresiones algebraicas. Es así como un solvente manejo de ellas permite una exploración más comprensiva y mayores posibilidades de conjeturar y hacer predicciones acerca de estos fenómenos.

16 ¡POR FIN! ¿ES CUADRADO O NO?

46 - 3 **El cuadrado de un binomio**
Una expresión para el cuadrado de un binomio

Las representaciones geométricas nos ayudan a visualizar regularidades de expresiones algebraicas. En particular productos algebraicos especiales.

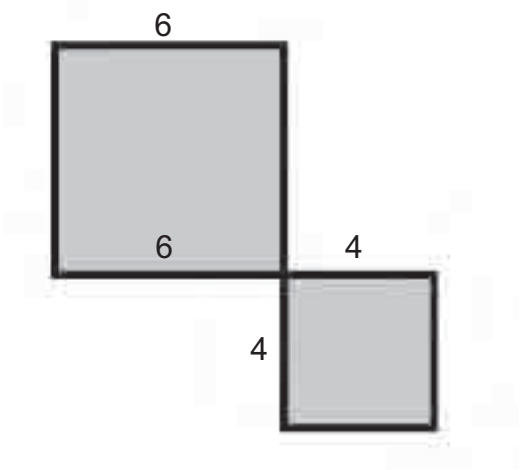
Con tus compañeros(as) de grupo.

1. Recorta dos cuadrados cuyos lados midan, por ejemplo, 6 y 4 cm respectivamente.

   Considera que ellos son piezas para armar un rompecabezas cuadrado de lado 10 cm.

   Busca las piezas que faltan. Seguramente encontrarás varias posibilidades.

2. Arma el rompecabezas colocando los cuadrados iniciales de la siguiente forma:



¿Con qué piezas completarías el cuadrado de lado 10 cm? ¿Qué forma tienen y cuáles son sus dimensiones?

Expresa el área del cuadrado de lado 10 cm teniendo en cuenta el área de las cuatro piezas que lo forman.

Completa en tu cuaderno.

$10^2\ cm^2 = 6^2\ cm^2 + 4^2\ cm^2 + ___\ cm^2 + ___\ cm^2$

Verifica cómo en este caso se cumple que

$(6 + 4)^2 = 6^2 + 4^2 + 2(6 \times 4)$

3. Ensaya con otra pareja de cuadrados y arma el rompecabezas cuadrado correspondiente.

Socializa tus resultados con los obtenidos por otros grupos de compañeros.

Observa el video sobre cuyo contenido ya tienes intuiciones. Comenta con tus compañeros los aspectos más relevantes de él.

Lee y analiza con tu grupo.

EL CUADRADO DE UN BINOMIO

En el trabajo matemático el hecho de encontrar patrones y regularidades en los procedimientos permite llegar a expresiones generales sencillas, que una vez comprendidas, nos evitan realizar los mismos cálculos cada vez.

Es decir, podemos dar el resultado en forma casi inmediata.

En este caso buscamos una expresión para el cuadrado de un binomio.

Un binomio es una expresión algebraica formada por dos términos, los cuales pueden tener signo igual o diferente. Elevar al cuadrado el binomio $a + b$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Si se realiza la multiplicación, se tiene:

$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

en donde se tiene que:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Al elevar al cuadrado el binomio $a - b$ se tiene que:

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

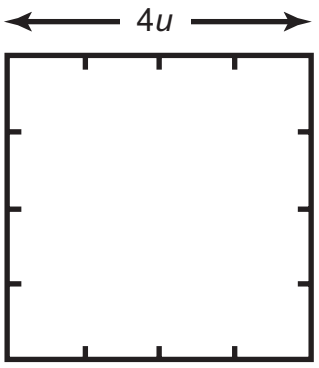
$$\begin{array}{r} a - b \\ \underline{a - b} \\ a^2 - ab \\ \underline{\quad - ab + b^2} \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Considerando que a es el primer término y b el segundo, el resultado en los casos estudiados se puede generalizar así:

> El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más o menos, el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo.

Una forma sencilla para resolver un binomio al cuadrado de la forma $(a + b)^2$, es por medio de las siguientes consideraciones:

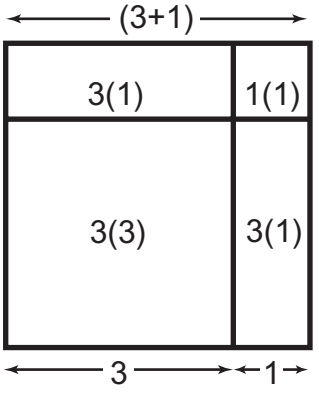
1. Obsérvese la siguiente figura:



Se sabe que el área de un cuadrado se obtiene elevando al cuadrado la medida del lado. Por lo que el área de esta figura es:

$l^2 = A;\ (4u)^2 = 16u^2$

2. Ahora obsérvese lo siguiente:



Se tiene, entonces, que el área de este cuadrado está dada por:

$(3 + 1)^2 = (3 + 1)(3 + 1)$. Bien, aplicando la regla se obtiene:

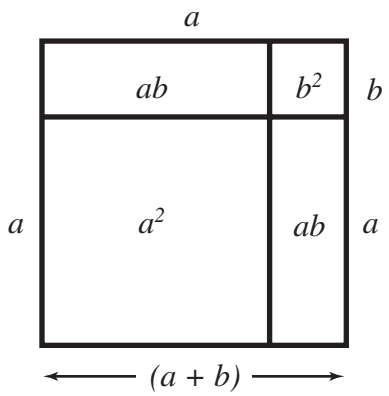
$$\begin{aligned}(3 + 1)^2 &= 3(3) + 3(1) + 3(1) + 1(1)\\ &= 3^2 + 2(3)(1) + 1^2\\ &= 9 + 6 + 1\\ &= 16\end{aligned}$$

Para hacer más sencillas las expresiones se omite la unidad de medida

Los dos cuadrados anteriores tienen las mismas dimensiones, lo cual significa que sus áreas son de la misma medida:

$$\begin{aligned}4^2 &= 16\\ (3 + 1)^2 &= 4^2\\ (3 + 1)^2 &= 16\\ (3 + 1)^2 &= 3^2 + 2\,(3)\,(1) + 1^2 = 9 + 6 + 1 = 16\end{aligned}$$

La siguiente figura representa un caso general:



De acuerdo con los datos del lado del cuadrado y de acuerdo con el área del mismo, se puede expresar ésta así:

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$ o bien:

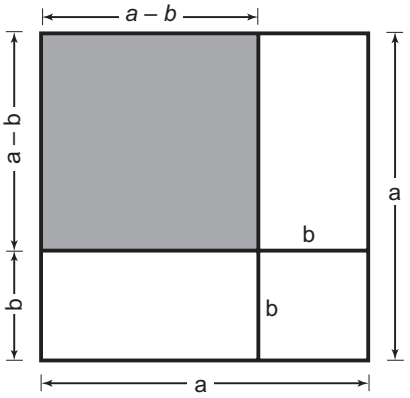
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Obsérvese que esta expresión es similar a la que se obtuvo en la figura anterior, la cual es un trinomio cuyo primer término es el cuadrado de un número, el segundo es el doble del producto de dos números, y el tercero también es el cuadrado de un número; así se llega a la expresión que es la fórmula para calcular el cuadrado de un binomio. En general, se puede afirmar que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con tu grupo de trabajo.

1. Con cuatro piezas, como se muestra en la figura, se arma un cuadrado de lado *a*.



Busca una expresión para el área del cuadrado de lado *a* – *b*, restando al área del cuadrado de lado a las áreas de las tres piezas que sobran.

2. Desarrolla el cuadrado de los siguientes binomios y, en cada caso, mediante valores que des a las variables, verifica casos particulares.

a) $(x - 2y)^2$

b) $(x^2 - 1)^2$

c) $(2 + ab)^2$

En forma individual resuelve en tu cuaderno.

1. El siguiente procedimiento fue usado por un estudiante que quería poner en práctica sus conocimientos de esta sesión.

$$51^2 = (50 + 1)^2$$
$$= 50^2 + 1^2$$
$$= 2\,500 + 1$$
$$= 2\,501$$

Escribe tus observaciones al respecto.

2. Inventa un procedimiento sencillo para hallar 492 si sabes que 49 = 50 – 1.

3. Resuelve:

a) $(3ab - 1)^2 =$

b) $(5x^2 - 3xy^3)^2 =$

c) $(\frac{1}{2}x - 2y)^2 = (\frac{1}{2}x)^2 + 2(\frac{1}{2}x)(-2y) + (-2y)^2 =$

d) $(9 - 2ab)^2 =$

Compara tu trabajo con el de otros compañeros, y si tienes dudas consulta al profesor(a).

CLAVE

a) $9a^2b^2 - 6ab + 1$, b) $25x^4 - 30x^3y^3 + 9x^2y^6$,
c) $\frac{1}{4}x^2 - 2xy + 4y^2$, d) $81 - 36ab + 4a^2b^2$

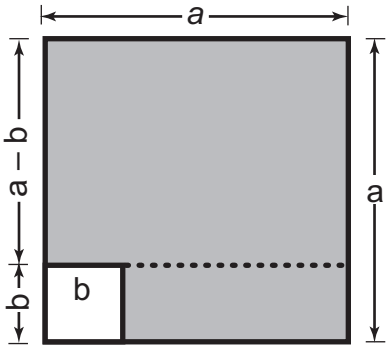
17 JUEGO CON DOS TÉRMINOS

47 - 3 Producto de dos binomios conjugados Obtención rápida del producto de dos binomios conjugados

En la sesión anterior llegaste a la expresión general para el cuadrado de un binomio. En ésta aplicarás un procedimiento similar para realizar el producto de dos binomios conjugados.

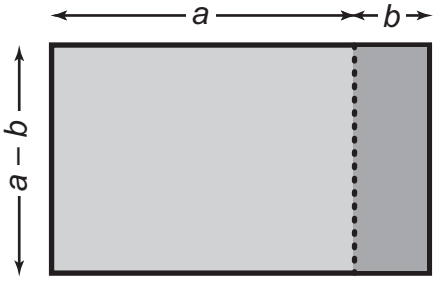
Trabaja con tus compañeros(as).

1. Haz transformaciones sobre un rompecabezas cuadrado de lado *a*.



i) Escribe la expresión para el área de la región sombreada.

ii) Observa que con las piezas de la región sombreada se puede armar un rectángulo:



¿Cuáles son los lados de este rectángulo?

¿Cuál es la expresión que representa el área del rectángulo?

¿Qué relación puedes establecer entre la expresión hallada en *i* y la del área del rectángulo?

iii) Concluyamos:

– ¿A qué es igual $a^2 - b^2$?

– ¿A qué es igual $(a + b)(a - b)$?

iv) Aplica tus conclusiones para resolver lo siguiente:

$(x^2 + a^2)(x^2 - a^2) =$ $(a^3 - b^2)(a^3 + b^2) =$

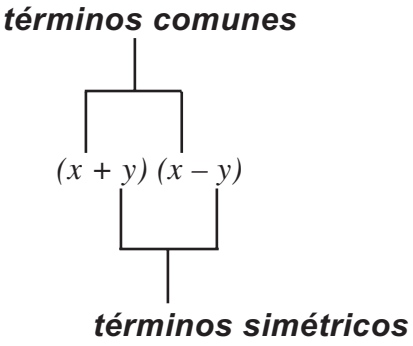
$(y^2 - 3y)(y^2 + 3y) =$ $(6x^2 - m^2x)(6x^2 + m^2x)$

Observa el video que te aclarará dudas en caso de que las tuvieras. Coméntalo con tus compañeros(as) de grupo.

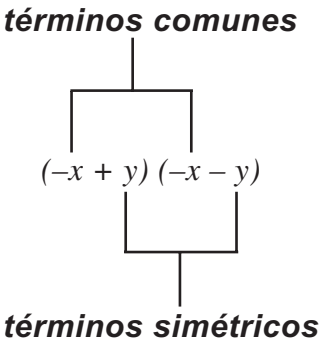
Con un compañero(a) haz la siguiente lectura.

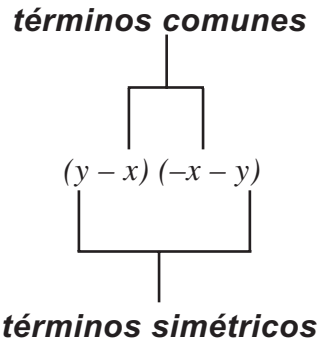
PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS

Los binomios conjugados tienen un término común que se identifica por llevar el mismo signo, mientras que los otros términos que llevan signos contrarios se les conoce como términos simétricos.



Otros ejemplos de binomios conjugados son:





Ahora se procede a obtener el producto de estos binomios y a reducir sus términos semejantes, así se tiene:

$$\begin{array}{r} x + y \\ x - y \\ \hline x^2 + xy \\ \quad - xy - y^2 \\ \hline x^2 \qquad -y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -x + y \\ -x - y \\ \hline x^2 - xy \\ \quad + xy - y^2 \\ \hline x^2 \qquad -y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} y - x \\ -x - y \\ \hline -xy + x^2 \\ + xy \quad - y^2 \\ \hline x^2 - y^2 \end{array}$$

Resolviendo los mismos productos en forma horizontal se tiene lo siguiente:

$(x + y)(x - y) = x(x - y) + y(x - y)$
$= x^2 - xy + yx - y^2$
$= x^2 - y^2$

$(-x + y)(-x - y) = -x(-x-y) + y(-x - y)$
$= x^2 + xy - yx - y^2$
$= x^2 - y^2$

$(y - x)(-x - y) = y(-x - y) - x(-x - y)$
$= -yx - y^2 + x^2 + xy$
$= x^2 - y^2$

Analizando el resultado se puede deducir cómo obtener el producto de dos binomios conjugados.

> El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del término común menos el cuadrado del término simétrico

¡Aplica lo aprendido, para calcular mejor!

Con dos compañeros(as), resuelve:

1. Con números grandes. Calcula sin escribir multiplicaciones, puedes usar una calculadora.

   $500\,001^2$; $100\,002^2$; $999\,999^2$; $99\,999 \times 10\,0001$.

2. Calcula mentalmente:

   71^2; 79^2; $37^2 - 36^2$; 101×99.

3. Resuelve mentalmente:

¿Cuánto se debe pagar por 49 m de hilo, a $51 el metro?

Compara tus resultados con los de otro equipo y, si existen dudas, consulta al profesor(a).

En forma individual resuelve los siguientes ejercicios, de la manera que más se te facilite.

a) (1 – 8 xy) (8xy + 1) = *b) $(6x^2 – m^2x)(6x^2 + m^2x)$ =*

c) $(a^2 – b^2)(–b^2 – a^2)$ = *d) (–9 – a) (a – 9) =*

Consulta los resultados con los de la clave; si tuviste errores, corrígelos.

CLAVE

a) $1 - 64x^2y^2$; *b) $36x^4 - m^4x^2$;* *c) $b^4 - a^4$; d) $81 - a^2$*

18

48 - 3

UNA REPRODUCCIÓN NECESARIA

Producto de dos binomios con término común
Obtención rápida del producto de dos binomios con término común

La resolución de los casos de binomios que has estudiado (binomio al cuadrado y binomios conjugados) te ha permitido progresar en tu aprendizaje de las matemáticas.

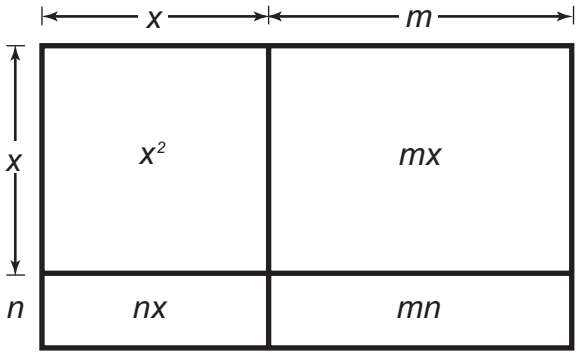
Abordaremos ahora otro producto interesante de binomio que una vez comprendido puede aplicarse en forma inmediata en la resolución de problemas.

Trabaja con tus compañeros(as).

1. Dibuja un rectángulo cuyas dimensiones sean $x + m$, $x + n$, donde los valores de x, m, n son longitudes cualesquiera; observa que x es común.

2. En el rectángulo delimita, a manera de rompecabezas, las piezas que lo conforman.

Este procedimiento permite expresar el área del rectángulo de varias formas.



a) Si los lados son $(x + m)$ y $(x + n)$, expresa el área.

b) Expresa el área de cada una de las cuatro piezas que forman el rectángulo y a partir de ellas halla otra expresión para el área de ese rectángulo.

c) Iguala las expresiones encontradas en $a)$ y $b)$ y elabora la conclusión correspondiente.

Socializa la conclusión a que llegaste con tus demás compañeros(as).

Observa con atención el video para que amplíes la comprensión de productos entre binomios que tienen un término común.

Con tu grupo lee, analiza y sigue los desarrollos indicados en el siguiente texto:

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN

Los binomios de la forma $(x + m)(x + n)$ en donde x es el término común y m y n son los términos no comunes; se les conoce con el nombre de producto de binomios con un término común:

término común

$(x + m)(x + n)$

términos no comunes

Veamos algunos casos particulares que nos permitan encontrar regularidades para luego elaborar una conclusión general.

Realiza las multiplicaciones:

$(x + 4)(x + 3)$, $(x – 3)(x – 4)$, $(x – 3)(x + 4)$ y $(x + 3)(x – 4)$

Analiza y encuentra por qué son diferentes y compáralas con las presentadas a continuación:

$$\begin{array}{r} x + 4 \\ x + 3 \\ \hline x^2 + 4x \\ \quad +3x + 12 \\ \hline x^2 + 7x + 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x – 3 \\ x – 4 \\ \hline x^2 – 3x \\ \quad – 4x + 12 \\ \hline x^2 – 7x + 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x – 3 \\ x + 4 \\ \hline x^2 – 3x \\ \quad + 4x – 12 \\ \hline x^2 + x – 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x – 4 \\ \hline x^2 + 3x \\ \quad – 4x – 12 \\ \hline x^2 – x – 12 \end{array}$$

Observa los resultados, encuentra en qué se parecen y en qué se diferencian. ¿Qué explicación le das a las diferencias encontradas?

Ahora, tomamos cada uno de los ejemplos ya resueltos para mostrar las características de estos binomios y encontrar una conclusión que permite realizar cada producto sin necesidad de hacer la multiplicación.

1. Así: $(x + 4)(x + 3) = x(x + 3) + 4(x + 3)$

$= x^2 + 3x + 4x + 12$ Reduciendo términos semejantes, se tiene: $x^2 + 7x + 12$

Del procedimiento anterior se observa que:

a) Se obtiene el cuadrado del término común: x^2

b) La suma de los términos no comunes $(4 + 3)$ multiplicada por el término común: $7x$

c) El producto de los términos no comunes es $(4)(3) = 12$

2. Consideremos el caso:

$$(x + 3)(x - 4)$$

a) El cuadrado del término común: x^2.

b) La suma de los términos no comunes $(3 - 4)$ multiplicada por el término común: $-x$.

c) El producto de los términos no comunes es $(3)(-4) = -12$

Integrando los tres términos, el trinomio que se obtiene es:

$$(x + 3)(x - 4) = x^2 - x - 12$$

3. Analicemos el producto:

$$(x - 3)(x - 4)$$

a) El cuadrado del término común: x^2.

b) La suma de los términos no comunes $(-3 - 4)$ multiplicada por el término común: $-7x$

c) El producto de los términos no comunes $(-3)(-4) = 12$

Integrando los tres términos, el trinomio que se obtiene es:

$$(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$$

4. Veamos el último ejemplo resuelto:

$$(x - 3)(x - 4)$$

a) El cuadrado del término común: x^2

b) La suma de los términos no comunes $(-3 + 4)$ multiplicada por el término común: x

c) El producto de los términos no comunes $(-3)(4) = -12$.

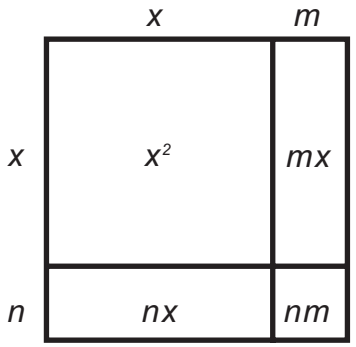
Ahora el trinomio que se obtiene es:

$$(x - 3)(x + 4) = x^2 + x - 12$$

A continuación se presenta un modelo geométrico del producto de dos binomios con un término común. Compáralo con la construcción que para el mismo propósito hiciste al iniciar esta sesión.

Considérese un rectángulo, cuyas dimensiones son:

$x + m$ y $x + n$



El área de este rectángulo está dada por la expresión:

$$(x + m)(x + n)$$

Al sumar las áreas parciales que lo integran, se obtiene:

$$x^2 + mx + nx + mn$$

Y como $mx + nx = (m + n)x$, se llega a:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

Al igualar este resultado con la expresión $(x + m)(x + n)$, resulta que:

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$$

Al analizar el resultado se puede enunciar una conclusión para hallar el producto de dos binomios con término común: éste es igual al cuadrado del término común, más o menos el producto de la suma de los términos no comunes por el común, más o menos el producto de los términos no comunes.

Con tu equipo de trabajo, resuelve en tu cuaderno.

1. Aplica la conclusión anterior para obtener el producto de los siguientes binomios:

   $(x + 7)(x + 7)$; $(2y - 4)(2y - 4)$; $(3m + n)(3m - n)$

   ¿Por qué para estos casos es aplicable la conclusión elaborada en esta sesión?

2. Resuelve y simplifica:

   $(x - 1)(x - 2) + (x + 3)(x - 5) =$

   $(7a + 3b)(7a - 8b) + (a - b)(a - 4b) =$

3. Completa las expresiones que hagan cierta la igualdad.

   $(x - \quad)(x + \quad) = x^2 - 4x - 21$

   $(3a - \quad)(\quad - 2) = 9a^2 - 10a + 16$

   $(2y^3 + 3x)(\quad - \quad) = 4y^6 + 2xy^3 - 6x^2$

Resuelve los siguientes ejercicios aplicando la regla correspondiente.

a) $(a^2 + 8)(a^2 - 7) =$ b) $(x^2 - 1)(x^2 + 3) =$

c) $(b^2 + 12)(b^2 - 15) =$ d) $(c + 11)(c - 4) =$

Consulta tus resultados con los de la clave, si tuviste errores corrígelos.

CLAVE

a) $a^4 + a^2 - 56$ b) $x^4 + 2x^2 - 3$ c) $b^6 - 3b^3 - 180$ d) $c^2 + 7c -$

19

IDENTIFÍCALO EN TODOS

49 - 3

Extracción del factor común
Factorizar polinomios por un factor común

Ya se han estudiado procesos para encontrar el producto de dos polinomios, ahora se analizará el problema inverso: conocido el polinomio, encontrar sus factores.

Por ejemplo:

$4x^2 + 16x + 15 = (2x + 5)(2x + 3)$

Polinomio ***factores del polinomio***

Trabaja con tu grupo.

1. Identifica qué tienen en común los términos del siguiente polinomio.

$$24x^5y - 36x^3z + 18x^2$$

De los siguientes términos escoge los que son comunes para el polinomio anterior:

$$2,\ x,\ xy,\ 2x,\ 6x^2,\ 3x^5,\ 18xy$$

Entre los comunes, ¿cuál de ellos es el mayor?

2. El polinomio anterior se factorizó de varias formas:

$$2\,(12x^5y - 18\,x^3z + 9x^2)$$

$$x\,(24x^4y - 36\,x^2z + 18x)$$

$$2x\,(12x^4y - 18x^2z + 9x)$$

$$3x^2\,(8x^2y - 12xz + 6)$$

$$6x^2\,(4x^2y - 6xz + 3)$$

¿En qué caso uno de los factores es el mayor factor común?

En este caso, ¿es posible encontrar todavía otro factor común de los términos del factor en paréntesis?

Discute con los otros grupos los resultados encontrados.

Lee con tus compañeros(as) y sigue con lápiz y papel los ejercicios propuestos. En ellos se utilizan saberes que tú tienes.

EXTRACCIÓN DEL FACTOR COMÚN

El proceso que consiste en encontrar varios números cuyo producto sea igual a un número dado se conoce con el nombre de ***Factorización***.

Por ejemplo, el 30 puede factorizarse de varias maneras:

$$30 = (6)\,(5)$$

$$30 = (2)\,(15)$$

$$30 = (2)\,(3)\,(5)$$

Para iniciar el estudio de la factorización de expresiones algebraicas se explicará el procedimiento mediante el cual se encuentra el mayor factor común de un polinomio, y luego se factoriza.

El mayor factor común de un polinomio se forma con el máximo común divisor (***MCD***) de los coeficientes y las literales comunes de cada uno de los términos. Por ejemplo, en la expresión $6x^3 + 3x^2 + 9x$, 3 es el ***MCD*** de 6, 3 y 9 y x el factor común literal, entonces $3x$ es el mayor factor común o máximo factor común.

Ejemplos:

a) Factorizar

$6a^4 + 36a^3 = 60a^2$ encontrando el máximo factor común.

Se inicia el proceso encontrando el *MCD* de los coeficientes del polinomio:

$$\begin{array}{rr|l} 6, & 36, \ 60 & 2 \\ 3 & 18 \ \ 30 & 3 \\ 1 & 6 \ \ 10 & \end{array}$$

El $MCD\ (6, 36, 60) = (2)\ (3) = 6$

Para encontrar la literal común hay que observar cuál es común a cada uno de los términos y escoger la que tenga el mínimo exponente con que aparezca en el polinomio: a aparece en todos los términos y el exponente mínimo es 2, por lo tanto a^2 es el factor común literal, y $6a^2$ el máximo factor común del polinomio.

$$6a^4 + 36a^3 + 60a^2 = 6a^2 (\qquad)$$

máximo factor común

El otro factor se obtiene dividiendo cada uno de los términos del polinomio entre $6a^2$.

$$\frac{6a^4 + 36a^3 + 60a^2}{6a^2} = \frac{6a^4}{6a^2} + \frac{36a^3}{6a^2} + \frac{60a^2}{6a^2} = a^2 + 6a + 10$$

Por lo tanto, la factorización del polinomio queda así:

$$6a^4 + 36a^3 + 60a^2 = 6a^2 (a^2 + 6a + 10)$$

Para comprobar el resultado se multiplica el factor común $6a^2$ por cada uno de los términos del otro factor; el producto obtenido deberá ser igual al polinomio original.

$$6a^4 + (a^2 + 6a + 10) = 6a^2 + 36a^3 + 60a^2$$

b) Factorizar $18x^3y^3 + 24x^2y^4$

Se encuentra el *MCD* de *18* y *24*

$$\begin{array}{rr|l} 18 & 24 & 2 \\ 9 & 12 & 3 \\ 3 & 4 & \end{array}$$

El $MCD\ (18, 24) = (2)\ (3) = 6$

Las letras x y y aparecen en todos los términos y los exponentes mínimos son 2 y 3 respectivamente; por lo tanto $6x^2y^3$ es el máximo factor común.

El otro factor se obtiene de dividir $18x^3y^3 + 24x^2y_4$ entre el factor común.

$$\frac{18x^3y^3 + 24x^2y^4}{6x^2y^3} = \frac{18x^3y^3}{6x^2y^3} + \frac{24x^2y^4}{6x^2y^3} = 3x + 4y$$

La factorización queda así:

$$18x^3y^3 + 24x^2y^4 = 6x^2y^3 \ (3x + 4y)$$

Comprobación:

$$6x^2y^3 \ (3x + 4y) = 18x^3y^3 + 24x^2y^4$$

Para concluir, se puede afirmar que para factorizar un polinomio por un factor común se procede así:

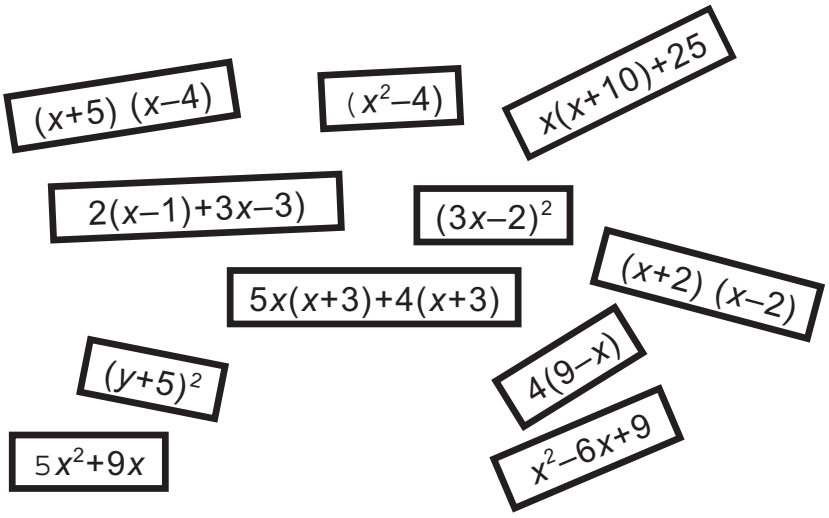
1º. Se obtiene el máximo factor común de los términos del polinomio.

2º. Se divide todo el polinomio entre el factor común obtenido.

Observa en el video el procedimiento para factorizar polinomios que tienen un factor común, y comenta las dudas con tus compañeros(as) y maestro(a).

Con tu grupo de trabajo.

1. Clasifica, en dos columnas, las siguientes expresiones de acuerdo a si están factorizadas o no lo están.



2. Busca en la columna de la derecha la expresión factorizada que le corresponde a cada una de las expresiones de la izquierda.

Expresiones para factorizar	Factorizaciones:
$3x\,(x+5)-4\,(x+5)$	$(y+12)(y-12)$
y^2-144	$(x-4)^2$
$(x+1)(x-1)+\ (2x-2)$	$(3x-4)(x+5)^2$
$(x-3)^2-2\,(x-3)+1$	$(x+2)^2$
$9x\ +30x+25$	$(x-\ 1)(x+3)$
$x\,(x+4)+4$	

3. Completa en tu cuaderno, los términos que faltan.

64 + 48x + 9x² = (__ + __)²

x² – __ = (__ + 7) (___ – ___)

(3x + __)² = ___ + ___ + 25

(3x + __)² = ___ + 24x + ___

(0.7 – x) (___ + x) = 0.49 – ___

Compara tus resultados con los de otros grupos.

Completa individualmente el cuadro siguiente, en tu cuaderno.

Polinomio	Máximo factor común	Factorización
$4a^2 + 12$		
$5x^4 - 15x^3$		
$b^5 + b^4 + b^3$		
$22a^3b^2 - 55a^4b^3$		
$35x^2y + 28x^3y^2 + 21x^4y^3$		

3. Factoriza las expresiones siguientes:

$(x+5)^2 + (x+5)$

$(25a-15) + (10ab-6b)$

$\frac{3}{5}(a-3) - 5a + 15$

$(x-2)(x+3) + (5-x)(x-2)$

$2(x-1)^2 + (3x-3)$

Discute en grupo los resultados de tu trabajo. Si tienes dudas consulta la clave.

CLAVE

2. $(x+5)(x+6)$

$(5a-3)(5+2b)$

$-\frac{22}{5}(a-3)$

$8(x-2)$

$(x-1)(2x+1)$

1.

Máximo factor común	Factorización
4	$4(a^2+3)$
$5x^3$	$5x^3(x-3)$
b^3	$b^3(b^2+b+1)$
$11a^3b^2$	$11a^3b^2(2-5ab)$
$7x^2y$	$7x^2y(5+4xy+3x^2y^2)$

20 ¿DE DÓNDE VIENE?

52 - 3

Factorización del trinomio cuadrado perfecto
Procedimiento para identificar y factorizar un trinomio cuadrado perfecto

En esta sesión nos ocuparemos de las estrategias que permiten identificar si un trinomio corresponde al desarrollo del cuadrado de una suma o una diferencia.

Lee, analiza y efectúa los procedimientos que se presentan en el siguiente texto.

FACTORIZACIÓN DEL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Un trinomio cuadrado perfecto es el resultado de elevar un binomio al cuadrado. Para identificarlo se ve si dos de sus términos son cuadrados perfectos y si el otro corresponde al doble producto de las raíces cuadradas de ambos.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si observas el trinomio, éste tiene las siguientes características:

- Consta de tres términos.
- Dos de los términos son cuadrados, es decir tienen raíz cuadrada exacta.
- El tercer término es el doble producto de las raíces de los términos cuadráticos.

El siguiente análisis del trinomio permite determinar cuál es el binomio al cuadrado equivalente:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{b^2} = b$$

Observa cómo se factoriza la siguiente expresión:

$$9x^2 + 12xy + 4y^2$$

Nota que es un trinomio cuadrado perfecto, ya que tiene dos términos cuadráticos, $9x^2$, $4y^2$, y el otro término $12xy$, es el doble del producto de las raíces de los dos primeros. Entonces, para factorizarlo se obtienen las raíces cuadradas de los términos cuadráticos y se separan por el signo que tiene $12xy$, en este caso, +.

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x + 2y)^2$$

Cuando el binomio es una diferencia al cuadrado se obtiene un trinomio como el siguiente:

$$(a - b)^2 = a^2 = 2ab + b^2$$

Observa cómo el término doble producto de las dos raíces conserva el **signo –**. Este criterio te sirve para identificar cuando un trinomio cuadrado perfecto corresponde al cuadrado de una diferencia.

Factoriza la siguiente expresión:

$$36x^2 - 12x + 1$$

Este es un trinomio cuadrado perfecto porque $36x^2$ y 1 son cuadrados perfectos y $12x$ es el doble del producto de esas raíces $2(6x)(1)$.
El signo – de $12x$ indica que se trata del cuadrado de una diferencia.

$$36x^2 - 12x + 1 = (6x - 1)^2$$

¡Has visto las escenas de una película cuando la regresan? El inicio se convierte en final, ¿verdad?

Mira atentamente el video, en él encontrarás cómo llegar del final al principio en una operación algebraica.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo.

1. Resuelve los siguientes ejercicios. Usa la calculadora si la necesitas y ordena las expresiones si esto es necesario.

a) $9a^6 + 48a^3b^4 + 64b^8$

b) $16m^{10} - 40m^5n^6 + 25n^{12}$

c) $36a^2 - 12ab + b^2$

d) $-4x + 4 + x^2$

e) $40x + 16 + 25x^2$

2. Trabaja el término conveniente para obtener trinomios cuadrados perfectos.

a) $4 + 20x$ ...

b) $-60xy^2 + 9x^2$ ...

c) $\frac{1}{4}x^2 + 1$ ...

d) $0.25b^2 - 7ab$ ...

Compara tu trabajo con el de otros grupos, si necesitas ayuda consulta con tu maestro(a).

Individualmente, factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos. Si lo deseas, usa tu calculadora.

a) $\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{12}ab + \frac{1}{16}b^2 =$

b) $81m^4 - 54m^2n^2 + 9n^4 =$

c) $36a^2b^2 + 24abc + 4c^2 =$

d) $\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{10}x^3y^2 + \frac{4}{25}y^4 =$

Comprueba tus respuestas con la clave.

CLAVE

a) $\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b\right)^2$; b) $(9m^2 - 3n^2)^2$; c) $(6ab + 2c)^2$; d) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{5}y^2\right)^2$

21

UNO MÁS Y OTRO MENOS

52 - 3

Factorización de una diferencia de cuadrados

Obtención de los factores de una diferencia de cuadrados

Como ya se ha visto, el producto de dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados; observando esta igualdad, ¿crees poder deducir el proceso inverso?, o sea, encontrar los factores de una diferencia de cuadrados.

Con tus compañeros(as) de grupo, lee y analiza el texto:

FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Recuérdese que todo producto de la forma $(a + b)(a - b)$ recibe el nombre de binomios conjugados, y su resultado es una diferencia de cuadrados.

binomios conjugados — diferencia de cuadrados

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

término común — términos simétricos

Por la propiedad simétrica de la igualdad, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ es equivalente a $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; de donde se deduce que la factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de binomios conjugados.

diferencia de cuadrados

$$a^2 \quad - \quad b^2 \quad = \quad (a + b)\ (a - b)$$

minuendo — sustraendo — término común — términos simétricos

Obsérvese que el término común (a) de los binomios conjugados es la raíz cuadrada del minuendo de la diferencia de cuadrados, y los términos simétricos, la raíz cuadrada del sustraendo.

Ejemplos:

a) Factorizar $x^2 - 9$.

La raíz cuadrada del minuendo x^2 es x.

La raíz cuadrada del sustraendo 9 es 3
Entonces

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{9} & = & 3 \\ | & & \\ x^2 - 9 & = & = (x+3)\ (x-3) \\ | & & \\ \sqrt{x^2} & = & x \end{array}$$

Factorizar $16x^2 - \frac{4}{25} =$

La raíz cuadrada del minuendo $16\,x^2$ es $4x$

La raíz cuadrada del sustraendo $\frac{4}{25}$ es $\frac{2}{5}$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{\frac{4}{25} = \frac{2}{5}} & & \\ | & & \\ 16x^2 - \frac{4}{25} & = & (4x + \frac{2}{5})\ \ (4x - \frac{2}{5}) \\ | & & \\ \sqrt{16x^2} & = & 4x \end{array}$$

Los factores de una diferencia de cuadrados son dos binomios conjugados, en los que el término común es la raíz cuadrada del minuendo y los términos simétricos tienen por valor absoluto la raíz cuadrada del sustraendo.

Reúnete con el compañero(a) más cercano para realizar las siguientes factorizaciones de diferencia de cuadrados y contesta lo que se pide.

$49y^2 - 36$; $\frac{9}{16}a^2 - b^2$; $\frac{1}{4}m^4 n^2 - 1$

¿Cuál es el minuendo de la diferencia de cuadrados?

¿Cuál es su raíz cuadrada?

¿Cuál es el sustraendo de la diferencia de cuadrados y cuál su raíz cuadrada?

¿Cómo queda su factorización?

¿Cuál es el término común de la factorización?

Observa en el video el procedimiento para factorizar una diferencia de cuadrados, y comenta las dudas con tus compañeros(as) y maestro(a).

Continúa trabajando en equipo para avanzar en el análisis y en la aplicación de los conceptos estudiados.

1. En estos ejercicios, no rutinarios, vas a aplicar la forma como se obtiene la sucesión de los números cuadrados a partir de la sucesión de los impares.

   a) Escribe 7 como la diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos.

   Pista: $1 = 1$
   $1 + 3 = 4 = 2^2$
   $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
   $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
   $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

   b) Demuestra que todo número impar es la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos.

2. Encuentra tres números enteros consecutivos cuyo producto dividido por la suma de los tres, sea igual a 16,

   Pista: Sean enteros n 1

   Su producto es: $(n - 1)(n + 1)n =$

   La suma es: $(n - 1) + (n + 1) + n =$

3. Demuestra que para todo número entero mayor que 1, el número $n\ (n - 1) + (n + 1) + n =$ es el cubo de un número entero.

Trabaja con un compañero(a).

1. En tu cuaderno copia y completa la siguiente tabla:

Diferencia de cuadrados	Raíz cuadrada del minuendo	Raíz cuadrada del sustraendo	Factorización
x^2			
$y^2 - \frac{1}{4}$			
$9\,x^2 - 1$			
$64\,a^2 - \frac{1}{9}$			
$100\,x^2 - 100$			

2. Demuestra que para cualesquiera números enteros a y b:

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,(a^2 + b^2)$

Compara tus resultados con la clave, si existen diferencias, consulta a tu profesor(a).

CLAVE

Diferencia de cuadrados	Raíz cuadrada del minuendo	Raíz cuadrada del sustraendo	Factorización
x^2	x	5	$(x + 5)(x - 5)$
$y^2 - \frac{1}{4}$	y	$\frac{1}{2}$	$(y + \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2})$
$9\,x^2 - 1$	$3x$	1	$(3x + 1)(3x - 1)$
$64\,a^2 - \frac{1}{9}$	$8a$	$\frac{1}{3}$	$(8a + \frac{1}{3})(8a - \frac{1}{3})$
$100\,x^2 - 100$	$10x$	10	$(10x + 10)(10x - 10)$

22

54 - 3

SE ENCUENTRA ENSAYANDO

Factorización de trinomios de la forma
$x^2 + (a + b)\,x + ab$
Obtención de los factores de un trinomio de segundo grado

Encontrar dos números que multiplicados den una cantidad x y sumados otra cantidad y es un cálculo especial; una forma de resolverlo es realizando ensayos. Esta actividad te será de mucha utilidad para esta sesión.

Con tus compañeros(as) de grupo

1. Resuelve las adivinanzas.

   - La suma de dos números es 8 y el producto de ellos es 15, ¿cuáles son?

     $a + b = 8 \quad ab = 15$

   - $Si\ m + n = -7 \quad ; \quad mn = -8$
   - $Si\ m + n = 7 \quad ; \quad mn = -8$
   - $Si\ m + n = -9 \quad ; \quad mn = 8$
   - $Si\ m + n = 9 \quad ; \quad mn = 8$
   - $Si\ p + q = \frac{5}{4} \quad ; \quad p \cdot q = 1$
   - $Si\ x + y = 2\sqrt{2} \quad ; \quad xy = 2$

2. Sabes desarrollar productos de la forma

   $(x + a)\,(x + b)$

   ¿Qué forma tiene el trinomio que obtienes?

   ¿Cuál es el coeficiente del término en x?

   ¿Cuál es el término independiente?

   ¿Cuál es el coeficiente de x^2?

3. Con base en el ejercicio 1, aprovecha que conoces la suma y el producto de dos números, para escribir los trinomios resultantes de productos de la forma:

$$(x - a)(x + b)$$

Si el término independiente del trinomio es negativo (–) ¿qué signos tienen a y b? En este caso, ¿cuándo $a + b$ es positivo (+) y cuándo negativo (–)?

Si el término independiente del trinomio es positivo (+) y la suma de a y b es negativa (–), ¿cómo son los signos de a y b?

Socializa los resultados con los obtenidos por los demás grupos y el profesor(a).

Observa con atención el video, comenta con tus compañeros(as) los aspectos que encuentres interesantes.

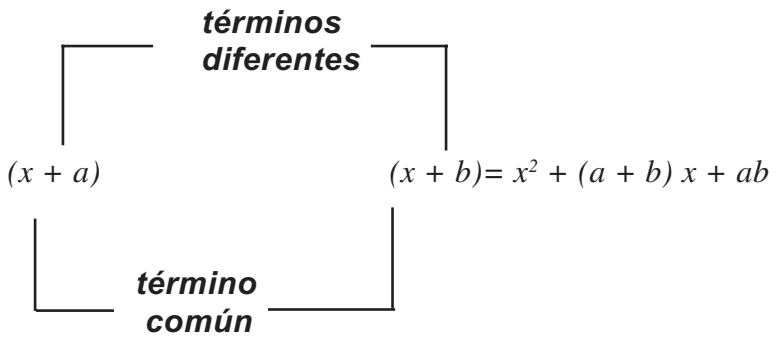
Lee y analiza la siguiente lectura.

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE LA FORMA

$$x^2 + (a + b)\, x + ab$$

Recuerda que todo producto de binomios de la forma $(x + a)\,(x + b)$, con $a \neq b$, recibe el nombre de producto de binomios con un término común, donde x es llamado término común a y b términos diferentes.

Su resultado es el cuadrado del término común, más o menos la suma algebraica de los términos diferentes multiplicada por el término común, más o menos el producto algebraico de los términos diferentes.



La expresión de la forma $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$ puede expresarse también como:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)\,(x + b)$$

De donde se puede afirmar que la factorización de un trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ es el producto de dos binomios con término común $(x + a)\,(x + b)$.

Observa que el término común de los binomios es la raíz cuadrada del término cuadrático (x^2) del trinomio de segundo grado, y los términos diferentes son factores del término numérico ab, y que sumados representan el coeficiente $(a + b)$ del término de primer grado.

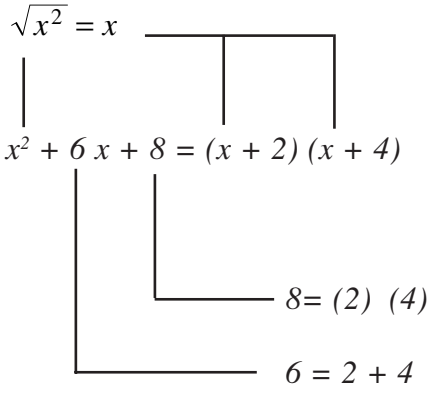
Ejemplos:

a) Factorizar $x^2 + 6x + 8$

La raíz cuadrada del término cuadrado (x^2) es $\sqrt{x^2} = x$

El término numérico o independiente es 8; 2 y 4 son dos factores de él cuya suma da el coeficiente del término de primer grado (x).

Entonces la factorización queda así:

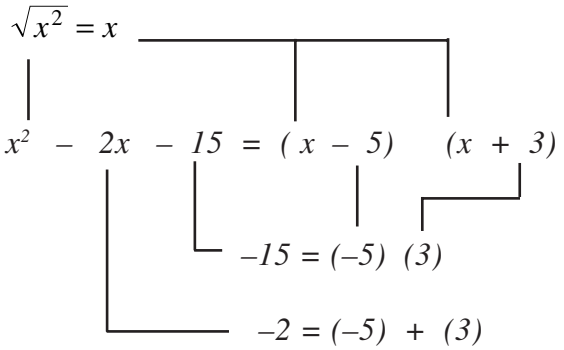


b) Factorizar $x^2 - 2x - 15$

La raíz cuadrada del término cuadrado (x^2) es $\sqrt{x^2} = x$

El término numérico o independiente es – 15, y los factores de él cuya suma da el coeficiente del término de primer grado (x) son –5 y 3.

Entonces la factorización queda así:



De los ejemplos anteriores se concluye que los factores de un trinomio de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ son dos binomios con un término común, el cual se obtiene de la raíz cuadrada del término cuadrático, y los términos no comunes son aquellos números cuya suma es el coeficiente del término de primer grado y cuyo producto es igual al término independiente.

La factorización estudiada en esta sesión es útil para resolver situaciones como la siguiente:

Expresa las dimensiones del largo y el ancho de un rectángulo, cuya área se expresa con el polinomio $x^2 + 5x + 4$

$$x^2 + 5x + 4$$

Para su resolución es necesario encontrar los factores de

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x = 1)$$

Por lo tanto: largo = $(x + 4)$, y ancho = $(x + 1)$

En forma individual, inventa trinomios para que tus compañeros los puedan factorizar en la forma $(x + a)(x + b)$.

Compara tu trabajo con el de otros compañeros. ¿Quién inventó los ejercicios que obligaron a tus compañeros(as) a pensar más?

23

¡LO QUE NOS FALTABA!

55 - 3

Fracciones algebraicas, concepto y equivalencia
Establecimiento del concepto de fracción algebraica

El trabajo con fracciones algebraicas te resultará familiar puesto que has trabajado con números fraccionarios y además con expresiones algebraicas.

Tus conocimientos acerca de estas temáticas te permitirán manejar con solvencia las fracciones algebraicas y las operaciones que realices entre ellas.

Trabaja con dos compañeros(as)

1. La fracción $\frac{33}{5}$ puede tener varios significados.

Describe una situación que permita considerarla como:

a) Parte de un todo

b) Cociente

c) Razón

d) Probabilidad

2. a) Si la fracción $\frac{m}{8}$ es equivalente a la fracción $\frac{20}{24}$, ¿cuál es el valor de m?

b) Si al amplificar la fracción $\frac{2}{5}$ se obtiene $\frac{2a}{5b}$, ¿qué relación hay entre a y b?

c) Al simplificar cierta fracción por a, se obtiene $\frac{1+b}{3b}$

La fracción inicial era:

$$\frac{a+b}{3ab} \quad ; \quad \frac{1+ab}{3\ ab} \quad ; \quad \frac{a+ab}{3\ ab} \quad ; \quad \frac{1+b+a}{3b+a}$$

d) La fracción irreducible equivalente a $\frac{18}{24}$ es:

$\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{12}$

e) Si m es un número entero y 6 es un divisor de m, una fracción equivalente $\frac{m}{24}$ es:

$\frac{3}{m \div 6}$; $\frac{m \div 6}{8}$; $\frac{m \div 6}{12}$; $\frac{m \div 6}{4}$; $\frac{6}{m \div 6}$

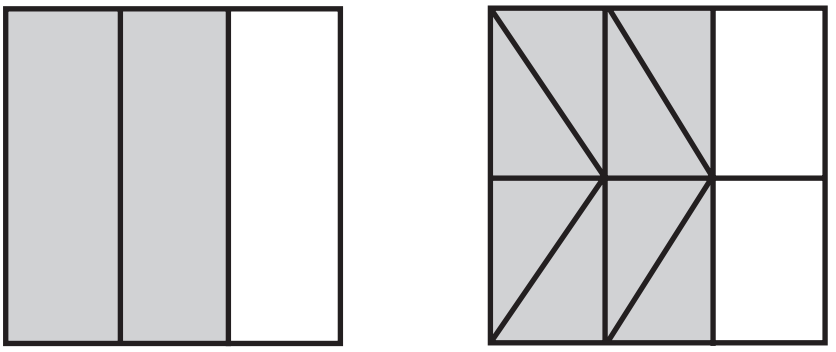
f) Si la fracción positiva $\frac{m}{n}$ es menor que $\frac{1}{2}$, entonces $\frac{n}{m}$ es:

- mayor que 1 y menor que 2
- menor que 1 y mayor que $\frac{1}{2}$
- mayor que 2
- menor que 0 y menor que $\frac{1}{2}$

3. En dos días una máquina hace la quinta parte de su trabajo. Si no varían las condiciones, ¿cuántos días le falta para terminarlo?

4. Para obtener el color de una pintura, se mezclan pinturas de dos colores señaladas con las letras A y B. Por cada $3\frac{1}{4}$ galones de la pintura A se agrega $1\frac{1}{4}$ galones de B. Cuando se tiene solamente 1 galón de la pintura B, ¿cuánta pintura A se requiere para la mezcla?

5. Observa el siguiente dibujo:



a) Expresa mediante una fracción la parte de la extensión de la superficie que está sombreada en cada cuadrado. ¡Los dos cuadrados son congruentes!

b) Cómo son esas fracciones.

c) Sin el apoyo del dibujo, ¿cómo puedes verificar la equivalencia entre esas dos fracciones? Hazlo de tres formas diferentes.

Observa el video donde conocerás los aspectos de una fracción algebraica. Al finalizar, comenta con tus compañeros la relación que encuentras entre las fracciones algebraicas y los números fraccionarios.

Con dos compañeros(as) haz la siguiente lectura y toma notas de los aspectos que desearías comentar o ampliar con el grupo y con el profesor o profesora.

FRACCIONES ALGEBRAICAS, CONCEPTO Y EQUIVALENCIA

Entre los significados que puede tener una fracción está el de ***cociente***.

Por ejemplo, si a es el dividendo y b es el divisor diferente de cero, el cociente de a y b se representa con la fracción $\frac{a}{b}$, recibiendo a el nombre de numerador y b el de denominador.

> Las fracciones algebraicas son las expresiones que se pueden escribir como el cociente de dos polinomios. También suelen llamarse expresiones racionales.

El manejo de las fracciones algebraicas es similar al de las fracciones numéricas.

Ejemplos de fracciones algebraicas:

$$\frac{3x^2}{2},\quad \frac{4x^4}{2x},\quad \frac{mn}{n},\quad \frac{3x^2+6x}{3x},\quad \frac{x^3}{xy^2}$$

Dos fracciones algebraicas son ***equivalentes*** cuando el numerador del primero, multiplicado por el denominador del segundo, es igual al producto del numerador del segundo por el denominador del primero.

Por ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ porque $2 \times 6 = 3 \times 4$

En las siguientes fracciones algebraicas, obsérvese que si se multiplica el numerador de $\frac{2x}{5y}$ por el denominador de $\frac{6x}{15y}$, es decir, $(2x)\ (15y)$, y el numerador de $\frac{6x}{15y}$ por el denominador de $\frac{2x}{5y}$, o sea $(6x)\ (5y)$, se obtienen dos productos iguales.

Por ello: $\frac{2x}{5y} = \frac{6x}{15y}$, porque $(2x)\ (15y) = (6x)\ (5y)$

$$30xy = 30xy$$

Por lo tanto, las fracciones algebraicas $\frac{2x}{5y} = \frac{6x}{15y}$, son equivalentes.

> Dos fracciones algebraicas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si, y sólo si, $ad = bc$, siendo b y d distintos de cero.

Ejemplos:

1. $\frac{3x}{2a}$ y $\frac{6x}{4a}$ son equivalentes, porque $(3x)\ (4a) = (6x)\ (2a)$

$$12ax = 12ax$$

2. $\frac{4m^3}{2x}$ y $\frac{20m^3}{10x}$ son equivalentes, porque $(4m^3)\ (10x) = (20m^3)\ (2x)$

$$40m^3x = 40m^3x$$

3. $\frac{x^2}{zw}$ y $\frac{4x^2}{4zw}$ son equivalentes, porque $(x^2)\ (4zw) = 4x^2)\ (zw)$

$$4x^2zw = 4x^2zw$$

4. $\frac{5a(x+y)^3}{a^2\,(x+y)^2}$ y $\frac{5(x+y)}{a}$ son equivalentes, porque $[5a(x+y)^3]\ a = a^2(x+y)^2\ [5(x+y)]$

$$5a^2(x = y)^3 = 5a^2\ (x + y)^3$$

Dos fracciones algebraicas son equivalentes cuando son iguales los productos cruzados de sus términos.

Con tu equipo de trabajo y en tu cuaderno, responde:

1. Además del producto cruzado, para determinar la equivalencia de dos fracciones algebraicas, ¿puedes encontrar otra forma para verificar si tal equivalencia existe? Da ejemplos.

RETO para pensar y utilizar lo aprendido en sesiones anteriores.

2. Explica en cada caso cuál ha sido el procedimiento para pasar de la fracción algebraica de la columna A a la fracción algebraica de la columna B.

Columna A	**Columna B**
$\frac{4n^2+16}{2n+4}$	$\frac{2n^2+8}{n+2}$
$\frac{x+5}{y-3}$	$\frac{3x+15}{3y-9}$
$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$	$\frac{x+2}{x+3}$
$\frac{5n+2m}{10n+4m}$	$\frac{25n^2+20nm+4m^2}{2}$

En los tres primeros ejercicios del cuadro, ¿cuáles serían los valores que no puede tomar n, y, x? ¿Por qué?

Con tu mismo equipo, determina si son equivalentes (=) o desiguales (≠) las parejas de fracciones algebraicas siguientes:

$\frac{3x^3}{6y}$ ☐ $\frac{4x^3}{5y}$, porque

$\frac{5x^2}{8b}$ ☐ $\frac{10a^2}{16b}$, porque

$\frac{25m}{50m^2n}$ ☐ $\frac{m^2}{2m^2n}$, porque

Compara tus respuestas con las de otros equipos y en caso de error, corrige.

Individualmente, resuelve lo siguiente:

1. Escribe dos parejas de fracciones algebraicas equivalentes.

2. Determina si son equivalentes (=) o desiguales (≠) las parejas de fracciones algebraicas siguientes:

   a) $\frac{7abc}{9mn}$ ☐ $\frac{4abc}{9mn}$, porque

   b) $\frac{6zw}{8xy}$ ☐ $\frac{3zw}{8xy}$, porque

   c) $\frac{5a^2b}{6wx}$ ☐ $\frac{20a^2b}{24wx}$, porque

Comparte los resultados del ejercicio 1 con tus compañeros(as)

Compara los resultados del 2º con los de la clave. Si hay diferencias verifica tus procedimientos.

CLAVE

2. *a)* = porque $(7abc)(9mn)$ $(9mn)(4abc)$; *b)* porque $(6zw)(xy)$ $(xy)(8xy)$ $(3zw)$;

c) = porque $(5a^2b)(24wx) = (20a^2b)(6wx)$.

24 DIETA

56 - 3 Fracciones algebraicas simples
Simplificación de fracciones algebraicas

Ya viste cómo la simplificación de una fracción algebraica a su mínima expresión, es similar a la simplificación de fracciones numéricas. Simplificar facilita el manejo de operaciones algebraicas. Para ello, basta con recordar algunos aspectos conocidos, tanto del manejo de las fracciones numéricas como de la factorización de expresiones algebraicas.

Observa con atención el video y anota aquellos aspectos que requieran aclaraciones o una segunda mirada.

Con tu equipo de trabajo haz la lectura siguiente:

FRACCIONES ALGEBRAICAS SIMPLES

La simplificación de fracciones algebraicas se realiza aplicando, correctamente, las leyes de los exponentes y las propiedades de las operaciones con números fraccionarios.

En todos los casos se considera que la expresión que figura como divisor representa un número distinto de cero.

Simplificar una fracción común es transformarla en otra equivalente que tenga sus términos más sencillos.

La simplificación de una fracción común es posible si su numerador y denominador son divisibles entre un mismo número.

De acuerdo con lo anterior, para simplificar una fracción algebraica, cuyos términos sean monomios, se aplican los criterios de divisibilidad en los coeficientes del numerador y denominador de la fracción algebraica. A continuación del coeficiente obtenido se factorizan las literales en ambos elementos de la fracción, según el exponente de la literal, y se simplifica aplicando la propiedad cancelativa.

Ejemplo:

Simplificar a su mínima expresión las fracciones algebraicas siguientes:

1. $\frac{4a^2}{8a} = \frac{4aa}{8a}$ Aplicando el criterio de divisibilidad entre 4 y simplificando las literales, resulta:

$$\frac{4a^2}{8a} = \frac{4\cancel{a}a}{2\cancel{4}\cancel{a}} = \frac{a}{2}$$

En caso de que el coeficiente sea 1 no se escribe junto a la parte literal.

2. $\frac{5y^3}{10y^2} = \frac{5\cancel{y}\cancel{y}y}{10\cancel{y}\cancel{y}}$ Aplicando el criterio de divisibilidad entre 5 y simplificando las literales, resulta: $\frac{1y}{2} = \frac{y}{2}$

3. $\frac{15a}{25a^2} = \frac{15\cancel{a}}{25\cancel{a}a}$ Aplicando el criterio de divisibilidad entre 5, y simplificando las literales, resulta:

$$\frac{15a}{25a^2} = \frac{3}{5a}$$

4. $\frac{9m^3n^2}{15m^2n^4} = \frac{9\cancel{m}\cancel{m}m\cancel{n}\cancel{n}n}{15\cancel{m}\cancel{m}\cancel{n}\cancel{n}nn}$ Aplicando el criterio de divisibilidad entre 3, y simplificando las literales, resulta:

$$\frac{3m}{5nn} = \frac{3m}{5n^2}$$

5. $\frac{18b^4c^3}{6b^5c^2} = \frac{18\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{c}\cancel{c}c}{6\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}b\cancel{c}\cancel{c}}$ Aplicando los criterios de divisibilidad entre 6 y simplificando las literales, resulta:

$$\frac{3c}{1b} = \frac{3c}{b}$$

6. $\frac{3x^3y^2}{5xy^4} = \frac{3\cancel{x}xx\cancel{y}\cancel{y}}{5\cancel{x}\cancel{y}\cancel{y}yy}$ En este caso, no se puede aplicar ningún criterio de divisibilidad en los coeficientes, porque están en su mínima expresión. Por lo tanto, sólo se pueden simplificar las literales; de esta manera resulta:

$$\frac{3xx}{5yy} = \frac{3x^2}{5y^2}$$

De acuerdo con lo anterior, el proceso de simplificar una fracción algebraica hasta hacerla irreducible es uno de los procesos para encontrar una fracción algebraica equivalente.

Continúa con tu equipo y simplifica a su mínima expresión las fracciones algebraicas siguientes:

$a)\ \frac{4a^2}{16a^4b}$ $\quad d)\ \frac{-12x^2y}{8xy}$ $\quad g)\frac{x^2-9}{x+3}$

$b)\frac{45m^3n}{60m}$ $\quad e)\ \frac{16abc}{56axy}$ $\quad h)\ \frac{x^2-7x+10}{3x-15}$

$c)\frac{75zw^2y4}{100xyw}$ $\quad f)\ \frac{2x^5y^2z}{8xyz}$ $\quad i)\ \frac{x^2-5x+6}{9x-3x^2}$

En los tres últimos ejercicios, ¿qué valores para la variable no son aceptables?

Compara tus resultados con otros; en caso de error, corrige.

En forma individual, simplifica a su mínima expresión las fracciones algebraicas siguientes:

$a)\ \frac{36mn}{80xyz}$ $\quad b)\frac{20a^3b}{28a^2}$

$c)\ \frac{4x^2-16y^2}{10x-20y}$ $\quad d)\frac{5(x-2)}{(x-2)^2}$

Compara tus resultados con los de la clave; en caso de error, corrige.

CLAVE

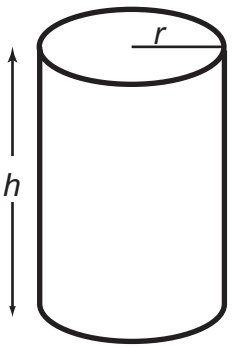
$a)\ \frac{9mn}{20xyz}$; $\quad b)\ \frac{5ab}{7}$ $\quad$; $\quad c)\ \frac{2x-4y}{5}$ $\quad$; $\quad d)\ \frac{5}{x-2}$

25
57 - 3

EL TODO POR EL TODO

Multiplicación de fracciones algebraicas
Manejo de la multiplicación de fracciones algebraicas

Con un compañero(a) resuelve el siguiente problema:



Un tanque contiene agua hasta los $\frac{3}{4}$ de su capacidad. Durante la noche se utilizaron los $\frac{2}{5}$ del líquido y en la mañana se le agregó una cantidad de agua equivalente a los $\frac{4}{3}$ de la que se había utilizado.

a) Escribe la expresión algebraica que representa el volumen de agua contenido inicialmente en el tanque.

b) ¿Qué parte de la capacidad del tanque representa el agua utilizada durante la noche?

c) ¿Qué parte de la capacidad del tanque quedó ocupada después de agregar agua en la mañana?

d) Escribe la expresión algebraica que expresa el volumen del agua contenida en el tanque después de agregarle agua.

e) ¿Cómo se multiplican fracciones numéricas?

f) Si la capacidad del tanque es de 20 litros, ¿cuántos litros tenía inicialmente?, ¿cuántos litros se utilizaron durante la noche?, ¿cuántos litros se le agregaron por la mañana?

Observa detenidamente el video y, posteriormente, comenta con tus compañeros(as) lo que hayas comprendido y aquello que requiera aclaraciones.

Con tu equipo lee y comenta el siguiente texto:

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

La multiplicación de fracciones comunes se obtiene multiplicando entre sí los numeradores y los denominadores, dando como resultado otra fracción común formada por los productos obtenidos.

De la misma forma, el producto de dos fracciones algebraicas es también una fracción algebraica, cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores, y el denominador al producto de los denominadores de las fracciones propuestas. Es decir:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones algebraicas, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$$

Para la solución práctica de estas operaciones se deben factorizar las expresiones que aparezcan en los numeradores y en los denominadores. Luego, indicar los productos correspondientes y, finalmente, se harán todas las simplificaciones posibles para llegar a su mínima expresión.

Ejemplos:

1. $\left[\frac{3x^2}{4y}\right]\left[\frac{2y}{3x^3}\right]=\frac{(2)(3)\left(x^2\right)(y)}{(4)(3)(y)\left(x^3\right)}=\frac{6x^2y}{12yx^3}$

Este resultado se puede simplificar a su mínima expresión aplicando los aspectos que se mencionaron en el tema anterior.

Por lo tanto resulta: $\frac{6x^2y}{12yx^3}=\frac{1}{2x}$

2. $\left[\frac{a+1}{a-8}\right]\left[\frac{5(a-8)}{a+1}\right]=\frac{5(a-8)(a+1)}{(a-8)(a+1)}$ simplificando, resulta: 5

3. $\left[\frac{4abc}{5a}\right]\left[\frac{2a^2b^3c}{3c}\right]=\frac{(4)(2)(a)(a^2)(b)(b^3)(c)(c)}{(5)(3)(a)(c)}$ simplificando, resulta:

$$\frac{8a^3b^4c}{15ac}=\frac{8a^2b^4c}{15}$$

Muchas veces no es necesario factorizar para llegar a encontrar la mínima expresión, porque se puede hacer de una manera mental y recordando las leyes de los exponentes.

4. $\left[\frac{x^2+4x-21}{x^2\ 2x-35}\right]\left[\frac{x^2\ 11x+30}{x^2-5x+6}\right]$

Se factorizan los trinomios que conforman cada fracción algebraica

$$\left[\frac{x^2+4x-21}{x^2+2x-35}\right]\left[\frac{x^2-11x+30}{x^2-5x+6}\right]=\frac{(x+7)(x-3)}{(x+7)(x-5)}\cdot\frac{(x-5)(x-6)}{(x-3)(x-2)}$$

$$=\frac{\cancel{(x+7)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+7)}\cancel{(x-5)}}\cdot\frac{\cancel{(x-5)}(x-6)}{\cancel{(x-3)}(x-2)}$$

Simplificación de factores comunes

$$=\frac{x-6}{x-2}$$

Es necesario tener en cuenta los valores de la variable que hacen cero al denominador de las fracciones o divisor.

Es decir: $x \neq -7, 5, 3, 2$. Para x = 6 el producto es cero.

Continúa con tu equipo y resuelve en tu cuaderno las multiplicaciones siguientes:

$a)\ \left[\frac{3m^4n^3}{5m^2n}\right]\left[\frac{2ab}{3m^2}\right]$ $\quad b)\ \left[\frac{x^2y}{2ab}\right]\left[\frac{xzw}{3z^2}\right]$ $\quad c)\ \left[\frac{4}{m-2n}\right]\left[\frac{m-2n}{m+2n}\right]$

$d)\ \left[\frac{2\,(m-n)}{a+b}\right]\left[\frac{(a+b)^2}{m-n}\right]$ $\quad e)\ \left[\frac{x^2-9x+8}{x^2-3x-10}\right]\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-1}\right]2$

Compara tus resultados con los de otros equipos y en caso de error corrige.

En forma individual, efectúa las multiplicaciones siguientes:

1. $\left[\frac{2}{3}x^3y\right]\left[\frac{4}{5}xyw\right]=$

2. $\left[\frac{5x}{3a}\right]\left[\frac{8a}{7x}\right]=$

3. $\left[\frac{15a^2b}{7m^2x^2}\right]\left[\frac{21mx}{20ab}\right]=$

4. $\left[\frac{4x^2-2x-6}{x^2-5x+6}\right]\left[\frac{x^2-4}{2x+2}\right]$

¿Cuáles son los valores de x no aceptables?

¿Cuándo es, el producto, igual a cero?

Verifica tus resultados con los de la clave; corrige si tienes errores.

CLAVE

Para $x = 1.5$ ó $x = -2$ el producto es igual a cero.

Valores de x no aceptables: 2, 3, –1

1. $\frac{8x^4y^2w}{15}$; 2. $\frac{40}{21}$; 3. $\frac{9a}{4mx}$; 4. $\frac{(2x-3)(x+2)}{x-3}$

26

PRODUCTO CRUZADO

58 - 3

División de fracciones algebraicas
Manejo de la división de fracciones algebraicas

Con un compañero(a) resuelve este problema y aprovecha la ocasión para afianzar el procedimiento de dividir fracciones numéricas. Estos conocimientos te facilitarán la división de fracciones algebraicas.

Problema: Con un botellón que contiene $1\frac{2}{3}$ litro de loción, se llenan frascos de $\frac{2}{6}$ litro. ¿Cuántos frascos se podrán llenar con la loción?

◊ Aquí te proponemos una forma de atacar el problema, pero tú puedes tomar tu propia iniciativa.

- El botellón contiene $1\frac{2}{3}$ litros, con los $\frac{2}{3}$ ¿pueden llenarse 2 frascos?
- ¿En 1 litro cuántos sextos hay? ¿Cuántos frascos se pueden llenar con 1 litro de loción?
- ¿Cuántos frascos se llenan en total?

Observa: $\frac{6}{6}$ litros llenan ***3 frascos:*** $\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}$

$\frac{2}{3}\ l\ =\ \frac{4}{6}\ l$, que llenan ***2 frascos*** $\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{4}{6}$

Otro camino: De acuerdo con el significado del problema, ¿cuál es la operación que está directamente implicada en su solución?

Hazlo en tu cuaderno y después comparas con lo que viene a continuación. ¡Hacer es aprender!

$1\frac{2}{3}\,l$ se van a repartir en frascos de $\frac{2}{6}$ litro

	Dividendo		**Divisor**
1. El número mixto se convierte en fracción común para tener una ***división de fracciones comunes.***	$1\frac{2}{3}$	$\div$	$\frac{2}{6}=$
2. El dividendo se multiplica por el recíproco del divisor.	$\frac{5}{3}$	$\div$	$\frac{2}{6}=$
	$\frac{5}{3}$	$\times$	$\frac{6}{2}=\frac{30}{6}$
3. Se obtiene el cociente.			$=\frac{5}{1}=5$

Resultado:
Se pueden llenar 5 frascos.

Obsérvese la operación:

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{6}=\frac{30}{6}$$

Con base en lo anterior seguramente puedes dividir fracciones algebraicas. ¡Atrévete!

$$\frac{6x^2y^3}{4xy^2} \div \frac{2xy}{x^2y}$$

Observa el video, donde se hablará del algoritmo de la división de fracciones algebraicas y podrás percatarte de la utilización de los conocimientos adquiridos anteriormente.

Reúnete con dos compañeros(as) y obtén el cociente de las siguientes divisiones de fracciones algebraicas.

1. $\frac{28y}{15x} \div \frac{7y}{5x} =$

Divide multiplicando por el recíproco del divisor: $\frac{28y}{15x} \times \quad =$

$\frac{4(\ )}{3(5x)} \times \frac{5x}{7y} =$

Simplifica factorizando *15x* y *28y* y cancelando términos:

2. $\frac{x-y}{a-b} \div \frac{x-y}{2a-2b} =$

Multiplica por el recíproco del divisor: $\frac{}{a-b} \times \frac{2a-2b}{} =$

$\frac{x-y}{a-b} \times \frac{2(\ )}{x-y}$

3. $\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy} \div \frac{x+y}{2x^2y} =$

Multiplica por el recíproco del divisor: $\frac{}{2xy} \times \frac{2x^2y}{} =$

Factoriza el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2$

Cancela factores comunes.

Atiende a las indicaciones de tu profesor(a) y efectúa con tu grupo una lectura comentada del texto.

DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para comprender el algoritmo de la división con fracciones algebraicas es conveniente recordar cómo se utiliza y efectúa la división con fracciones numéricas comunes, en la cual se emplea el recíproco de un número.

Ejemplos:

Número		Recíproco
$\frac{2}{6}$	Se intercambia el numerador y el denominador	$\frac{6}{2}$
$9, \frac{9}{1}$	Se escribe como fracción: Se intercambia el numerador y el denominador	$\frac{1}{9}$
$1\frac{2}{3}$	Se escribe como fracción:	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{3}$	Se intercambia el numerador y el denominador	$\frac{3}{5}$

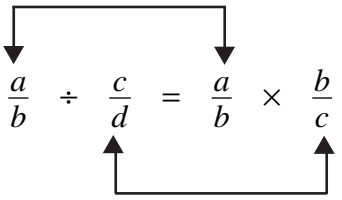
En el problema que inició esta sesión se puede observar que la división:

$\frac{5}{3} \div \frac{2}{6}$ se transformó en la multiplicación $\frac{5}{3} \times \frac{6}{2} = \frac{30}{6}$

Puede notarse que al efectuar ***productos cruzados*** se abrevia el procedimiento, al no registrar la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor y al escribir sólo el resultado.

Algoritmo o procedimiento de la división de fracciones algebraicas

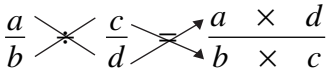
1º. Se multiplica la primera fracción por la recíproca de la segunda fracción que significa lo mismo que obtener:



$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c}$$

Recíproco

el producto cruzado del numerador del dividendo por el denominador del divisor y el denominador del dividendo por el numerador del divisor.



$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

2º. Después de efectuada la división se simplifica la fracción obtenida como cociente, factorizando y cancelando términos comunes.

Ejemplo 1:

1º. Se multiplica por el recíproco $\frac{4}{10x^2} \div \frac{7}{15x} = \frac{4}{10x^2} \times \frac{15x}{7} = \frac{60x}{70x^2}$

2º. Se factoriza y se cancelan términos $= \frac{(10x)6}{(10x)7x} = \frac{6}{7x}$

Ejemplo 2:

$$\frac{(x^2-9)}{x+4} \div \frac{x^2+6x+9}{2(x+3)} =$$

1º. Se multiplica por el recíproco

$$\frac{x^2-9}{x+4} \times \frac{2(x+3)}{x^2+6x+9} =$$

2º. Se simplifica factorizando la diferencia de cuadrados y el trinomio cuadrado perfecto.

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x+4} \times \frac{2(x+3)}{(x+3)(x+3)} =$$

Se cancelan términos comunes

$$\frac{2(x-3)}{x+4}$$

Como se ha podido observar, en la división de fracciones algebraicas se aplican conocimientos como: la división de fracciones, las leyes de los exponentes, la simplificación, la factorización y la propiedad cancelativa. Por lo que estos temas deben dominarse para poder efectuar la división de fracciones algebraicas correctamente.

Individualmente resuelve las siguientes operaciones en tu cuaderno.

1. $\frac{5x^2y^3 2^4}{3xy^2z} \div \frac{13x^3yz}{8x^4yz^2} =$

2. $\frac{x^2-y^2}{x+2y} \div \frac{x-y}{2} =$

3. $\frac{1}{x^2+6x+8} \div \frac{6xy}{x+2} =$

Compara los cocientes obtenidos con los que se dan en la clave y en caso de haber diferencias revisa tu procedimiento y corrige si es necesario.

CLAVE

1. $\frac{40x^2y^2z^4}{39}$; 2. $\frac{2(x+y)}{x+2y}$; 3. $\frac{1}{6xy(x+4)}$

27
59 - 3

LETRAS MÁS...

Adición de fracciones algebraicas I
Manejo de la adición y sustracción de fracciones algebraicas con denominador común

¿Sabes la diferencia entre las fracciones comunes y las fracciones algebraicas?

Ambas son semejantes, sólo que las fracciones algebraicas tienen una parte literal; es decir, además de números, tienen letras.

Como ya conoces la adición y la sustracción de fracciones numéricas, te bastará hacer la siguiente lectura y realizar los ejercicios propuestos para que puedas trabajar con solvencia estas dos operaciones con fracciones algebraicas.

ADICIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS I

Las fracciones algebraicas en sus términos tienen una parte literal, por ejemplo:

$$\frac{3x}{2y} \quad , \quad \frac{5ab}{6a} \quad , \quad \frac{(4x+2)}{x+y}$$

Este tipo de fracciones, al igual que las fracciones comunes, se pueden sumar o restar.

Obsérvense las siguientes adiciones y sustracciones de fracciones comunes:

$a)\quad \frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$

$b)\quad \frac{15}{9}+\frac{7}{9}-\frac{8}{9}=\frac{15+7-8}{9}=\frac{14}{9}$

$c)\quad \frac{9}{6}-(-\frac{7}{6})=\frac{9-(-7)}{6}=\frac{9+7}{6}=\frac{16}{6}$

$d)\quad \frac{5}{8}\ -\ (+\frac{3}{8})=\frac{5-(+3)}{8}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}$

Puede notarse que en cada adición y sustracción las fracciones tienen el mismo denominador o denominador común.

Además, que la suma de dos o más fracciones con el mismo denominador es una fracción que tiene como numerador la suma de los numeradores, y como denominador el denominador común de las fracciones.

Por otra parte, la resta de las fracciones es otra fracción cuyo numerador es la diferencia de los numeradores y el denominador es el denominador común de las fracciones.

El algoritmo de la adición y el de la sustracción de fracciones comunes es similar para la adición y sustracción de fracciones algebraicas.

Ejemplos:

$$a)\ \frac{2x}{x-y}+\frac{6y}{x-y}=\frac{2x+6y}{x-y}$$

Las dos fracciones sumadas tienen el mismo denominador $x-y$; por lo tanto, el resultado es la fracción cuyo numerador es la suma $2x+6y$ y el denominador es $x-y$.

$$b)\quad \frac{2x}{x-4}+\frac{3x}{x-4}-\frac{4x}{x-4}=\frac{2x+3x-4x}{x-4}$$

Las tres fracciones tienen como denominador a $x-4$, por lo tanto sus numeradores $2x,\ 3x,\ -4x$ se suman. En este caso como los numeradores son términos semejantes también se reducen:

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{3x}{x-4}-\frac{4x}{x-4}=\frac{2x+3x-4x}{x-4}=\frac{2x}{x-4}$$

$$c)\quad \frac{7a-3}{b+c}-\frac{2a+8}{b+c}=\frac{(7a-3)-(2a+8)}{b+c}$$

En este caso se tiene en el numerador una resta de polinomios; por lo tanto, al primero se le suma el inverso aditivo del segundo polinomio, esto es:

$$\frac{7a-3}{b+c}-\frac{2a+8}{b+c}=\frac{(7a-3)-(2a+8)}{b+c}$$

(los signos de cada término del sustraendo cambiaron)

$$= \frac{(7a-3)+(-2a-8)}{b+c}$$

Se reducen términos semejantes

$$= \frac{7a-3-2a-8}{b+c}$$

$$= \frac{5a-11}{b+c}$$

Concluyendo, se puede afirmar que:

> La suma y resta de fracciones algebraicas con denominador común se obtiene con el siguiente procedimiento:
>
> 1. El numerador se obtiene con la suma o resta algebraica de los numeradores.
>   a) Si la suma tiene términos semejantes, éstos se reducen.
>   b) Si se obtiene una adición o sustracción de polinomios, ésta debe efectuarse.
> 2. El denominador es el denominador común de las fracciones.

También es importante hacer notar que hay ocasiones en donde el resultado se puede simplificar, por ejemplo:

$$\frac{8x^3y^6}{3x^2y^4} + \frac{2x^3y^6}{3x^2y^4} - \frac{3x^3y^6}{3x^2y^4} = \frac{8x^3y^6 + 2x^3y^6 - 3x^3y^6}{3x^2y^4}$$

Se reducen términos semejantes

$$= \frac{7x^3y^6}{3x^2y^4}$$

Se simplifica dividiendo potencias de la misma base. $= \frac{7xy^2}{3}$

La suma y la resta deben simplificarse cuando sea posible.

Trabaja en pareja y resuelve las siguientes adiciones y sustracciones de fracciones algebraicas.

1. $\frac{7a^2b^3}{2ab} + \frac{8a^2b^3}{2ab} = \quad \frac{+}{2\,ab}$

Reduce términos semejantes.

Simplifica el resultado aplicando la ley de exponentes de la división de potencias con la misma base

2. $\frac{3x^2 + 2y}{2xy} + \frac{2x^2 - 5y + 3}{2xy} \qquad = \frac{(\qquad) + (\qquad)}{2xy} =$

3. $\frac{8w^3x^4 - 6}{4wx} - \frac{4w^4 - 3w^3x^4 + 8}{4wx} \quad = \frac{(\qquad) - (\qquad)}{4wx}$

Suma al minuendo el inverso aditivo del sustraendo y reduce términos semejantes $= \frac{(8w^3x^4 - 6) + (\qquad)}{4wx}$

4. $\frac{2x^3 + 3y - 4}{3x^3 - 2y} + \frac{2x^4 - 2x^3}{3x^3 - 2y} \qquad = \frac{(\qquad) + (\qquad)}{3x^3 - 2y}$

Compara los resultados obtenidos con los de otra pareja, si hay diferencias verifica el procedimiento y en caso de error corrige.

En forma individual efectúa lo que se te pide:

1. Reduce términos semejantes.

$a)\ 4a + 2b - 7a + 4b + 8 =$

$b)\ 8x^2y - 3xy + 4xy - 12x^2y =$

2. Escribe el inverso aditivo de los siguientes polinomios:

$c)\ (3a + 2b - 8)$ ⟶ ( )

$d)\ (-5y - 4)$ ⟶ ( )

3. Efectúa las operaciones

$e)\ \dfrac{4x^3 + 3}{2x^2 - 1} + \dfrac{7x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2 - 1} =$

$f)\ \dfrac{(5y + 3)}{4x^3y} - \dfrac{(-5y - 4)}{4yx^3} =$

$g)\ \dfrac{(6x^3y^2 + 8)}{2x^3y} + \dfrac{(8x^3y^2 - 8)}{2x^3y} =$

$h)\ \dfrac{5xy}{3x^3y^3} + \dfrac{2xy}{4x^6y} =$

i) ¿Pudiste resolver todas las operaciones?

j) ¿Por qué?

Compara tus respuestas con las de la clave y en caso de diferencias verifica tu procedimiento. Si hay errores corrige.

CLAVE

a) $-3a+6b+8$; *b)* $-4x2y+xy$; *c)* $(-3a-2b+8)$; *d)* $(+5y+4)$;

e) $\frac{11x^3-2x^2+6}{2x^2-1}$; *f)* $\frac{10y+7}{4x^3y}$; *g)* $7y$; *h)* $\frac{20x^4y+3y^2}{12x^6y^3}$;

i) no; *j) La última no tiene denominador común*

28
60 - 3

LETRAS MENOS...

Adición de fracciones algebraicas II
Manejo de la adición y sustracción de fracciones algebraicas con diferente denominador

¿Recuerdas cómo se efectúa la adición o la sustracción de fracciones comunes con diferente denominador? Si lo recuerdas bien, esto te facilitará el tema que trataremos hoy.

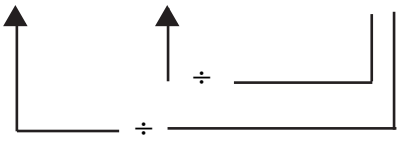
Con tu grupo, y dirigidos por el profesor(a), efectúa una lectura comentada del texto siguiente. Realiza en tu cuaderno los ejercicios propuestos en la lectura. No te conformes con solo leer.

ADICIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS II

El algoritmo o procedimiento para efectuar la adición o la sustracción de fracciones algebraicas es similar al utilizado para las fracciones comunes.

Obsérvense las siguientes operaciones con fracciones comunes.

a) $\frac{7}{6} + \frac{8}{15} = \frac{35+16}{30} = \frac{51}{30} = \frac{17}{10}$



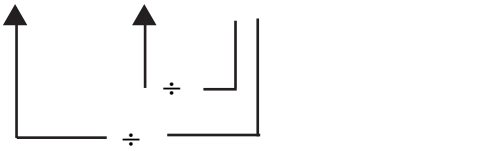
$mcm = (2)(3)(5) = 30$

$30 \div 6 = 5, \qquad 5 \; x \; 7 = 35$

$30 \div 15 = 2, \qquad 2 \; x \; 8 = 16$

6	15	2
3	15	3
1	5	5
1	1	

b) $\frac{4}{8} - \frac{2}{10} = \frac{20-8}{40} = \frac{12}{40} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$



En este caso para hallar el denominador común o *mcm* se puede proceder así:

(10) (1) = 10
(1) (2) = 20
(10) (3) = 30
(10) (4) = 40

Se buscan múltiplos sucesivos del número mayor hasta encontrar uno que también sea múltiplo del otro.

Los dos ejercicios anteriores corresponden a una adición y a una sustracción de fracciones con diferente denominador, en donde fue necesario obtener un denominador común; en seguida se ha dividido éste entre el denominador de cada fracción y el resultado se multiplicó con el numerador respectivo. Al final se sumaron o se restaron los numeradores repitiendo el denominador común. Y se simplificó el resultado cuando fue posible.

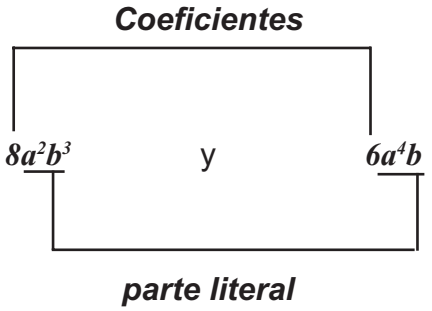
Adición de fracciones algebraicas

Ejemplo 1: $\frac{5a}{8a^2b^3} + \frac{2b}{6a^4b}$

Se trata de una adición con fracciones de diferente denominador, y para efectuarla es necesario:

1. **Buscar un denominador común**. Existe infinidad de denominadores comunes, pero es más práctico trabajar con el mínimo común denominador.

En este caso hay que considerar los coeficientes y la parte literal de los denominadores.



El mínimo común múltiplo de los coeficientes 8 y 6 es | 24 |

Éste se puede obtener factorizando o buscando el primer múltiplo del número mayor, que a su vez sea múltiplo del otro número. En este caso, 8 es el mayor y sus múltiplos son 8, 16, **24**, 32 ... se observa que 8 y 16 no son múltiplos de 6, pero 24 sí lo es porque (6) (4) = 24.

2. El común denominador se divide entre el denominador de cada fracción y el resultado se multiplica por el numerador respectivo.

$$\frac{5a}{8a^2b^3}+\frac{2b}{6a^4b}=\frac{\quad}{24a^4b^3}$$

$$\frac{24a^4b^3}{8a^2b^3}=3a^2, \qquad 3a^2\ (5a)=15a^3$$

$$\frac{24a^4b^3}{6a^4b}=4b^2, \qquad 4b^2\ (2b)=8b^3\,4$$

De lo anterior se tiene que:

$$\frac{5a}{8a^2b^3}+\frac{2b}{6a^4b}=\frac{15a^3+8b^3}{24a^4b^3}$$

3. **Se suman los productos obtenidos**, que en este caso no son términos semejantes y por lo tanto su suma queda indicada.

$$\frac{5a}{8a^2b^3}+\frac{2b}{6a^4b}=\frac{15a^3+8b^3}{24a^4b^3}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{2xy}{3\left(x^2-y^2\right)}-\frac{y}{6x-6y}$$

Esta es una sustracción de fracciones con denominadores diferentes.

1. **Se busca un denominador común.** En este caso, primero debe factorizarse cada denominador.

$3(x^2 - y^2)$ Se observa una diferencia de cuadrados, por lo tanto su factorización es el producto de dos binomios conjugados. Esto es: $3(x + y)\,(x - y)$	$6x - 6y$ Se observa que 6 es factor común, por lo tanto se factoriza como: $6(x - y)$

$$\frac{2xy}{3(x^2-y^2)}-\frac{y}{6(x-y)}$$

Una vez factorizados los denominadores se obtiene el *mcm* de los coeficientes 3 y 6; en este caso es | 6 | porque:

$$(6)\,(1) = 6 \quad y \quad (3)\,(2) = 6$$

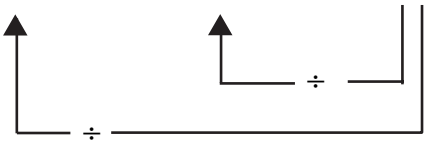
El *mcm* de la parte literal es | $(x + y)\,(x - y)$ |

Porque son los dos binomios que aparecen en los denominadores y, en este caso, son de 1er. grado.

Por lo tanto, el mínimo común denominador es $6(x+y)(x-y)$

2. Se divide el común denominador entre el denominador de cada fracción y el resultado se multiplica por el numerador respectivo.

$$\frac{2xy}{3(x+y)(x-y)} - \frac{y}{6(x-y)} = \frac{}{6(x+y)(x-y)}$$



Veamos esas divisiones y los productos de los cocientes por los numeradores:

$$\frac{6(x+y)(x-y)}{3(x+y)(x-y)} = 2, \qquad 2(2xy) = 4xy$$

$$\frac{6(x+y)(x-y)}{6(x-y)} = (x+y), \qquad (x+y)y = xy + y^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{2xy}{3(x+y)(x-y)} - \frac{y}{6(x-y)} = \frac{4xy - (xy+y^2)}{6(x+y)(x-y)}$$

3. Se restan los productos obtenidos

Como en este caso en $4xy$ y en $(xy+y^2)$ sí hay términos semejantes, se reducen:

$$\frac{3xy - y^2}{6(x+y)(x-y)}$$

Pero el denominador puede sustituirse por una diferencia de cuadrados por ser el producto de binomios conjugados.

Por lo tanto:

$$\frac{2xy}{3(x^2 - y^2)} - \frac{y}{6x - 6y} = \frac{3xy - y^2}{6(x^2 - y^2)}$$

Concluyendo, se puede afirmar que una adición o sustracción de fracciones con diferente denominador se efectúa con el siguiente procedimiento:

1. **Factorizar** los denominadores para obtener un denominador común.
2. **Dividir** el denominador común entre el denominador de cada fracción y **multiplicar** el resultado por el numerador respectivo.
3. **Sumar** o **restar** los productos obtenidos según sea el caso.

También es importante simplificar el resultado siempre que sea posible.

Continúa trabajando con tu grupo y efectúa lo que se te pide.

Obtén el mínimo común múltiplo de los siguientes términos:

a) $7x^2y^5$ y $14x^3y^2$

b) $2(x + 2xy + y^2)$ y $5(x + y)$

Factoriza el trinomio cuadrado perfecto y obtén el *mcm.*

2. Resuelve las operaciones, toma en cuenta los resultados obtenidos en el ejercicio anterior.

$a)\quad \dfrac{2x^6y^4}{7x^2y^5} - \dfrac{3x}{14x^3y^2}$

$b)\quad \dfrac{4}{2(x^2+2xy+y^2)} + \dfrac{8xy}{5(x+y)}$

Fracciones algebraicas con radicales: racionalización

En las sesiones 54 y 55 de séptimo grado aprendiste a encontrar la potencia de una potencia y la raíz de una potencia.

En el siguiente taller, vas a aplicar estos conocimientos y avanzarás utilizándolos en la simplificación de expresiones algebraicas.

Taller: **Utilicemos lo aprendido para simplificar fracciones algebraicas que contienen radicales.**

Con tu equipo de trabajo resuelve:

1. ¿Por qué $\sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$?
   ¿Por qué $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$?

2. Justifica cada uno de los pasos que se siguen para simplificar las expresiones:

$$27^{\frac{2}{3}} = (27^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{729} = 9$$

$$\left(\frac{3\sqrt{x}}{27\sqrt[3]{x}}\right)^3 = \frac{3^3\sqrt{x^3}}{27^3\sqrt[3]{x^3}} = \frac{27\sqrt{x}\cdot\sqrt{2^2}}{27^3\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt{x}}{729}$$

Como no es sencillo trabajar con radicales en el denominador de una fracción, se buscan estrategias para suprimirlos.

Observa y analiza el siguiente ejercicio: $\dfrac{5x}{\sqrt{5}}$

Para suprimir $\sqrt{5}$ usamos la estrategia de multiplicar tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{5}$

$$\frac{5x}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5x\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}x}{5} = \sqrt{5}\,x$$

3. Racionaliza para simplificar la fracción

$a)$ $\dfrac{3x}{\sqrt{x}}$

$b)$ $\dfrac{x}{\sqrt{3y}}$

Ayuda: Usa tus conocimientos sobre productos notables.

$c)$ $\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 = x + y$$

$d)$ $\dfrac{3ab^2}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}$

$e)$ $\dfrac{\sqrt{m-n}}{1-\sqrt{m-n}}$

$f)$ $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{y\sqrt{x+x\sqrt{y}}}$

Compara tus respuestas con las de otro equipo y si hay errores corrige.

En forma individual resuelve los siguientes ejercicios.

1. Factoriza la diferencia de cuadrados: $\left(4x^2 - 9y^2\right) =$

2. Obtén el *mcm* de $12a^3b^6$ y $18a^2b$

3. Efectúa la siguiente adición:

$$\frac{5}{4x^2-9y}+\frac{2}{(2x+3y)}=$$

4. Efectúa la siguiente sustracción:

$$\frac{8a^8b^5}{12a^3b^6}-\frac{5a^7}{18a^2b}=$$

5. Racionaliza:

$a)\ \ \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad b)\ \ \sqrt{\frac{a}{24}}$ $\quad c)\ \ (a+b)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad d)\ \ \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}$

Compara tus respuestas con las de la clave, si te equivocaste inténtalo de nuevo.

CLAVE

5. $a)\ \sqrt[3]{x^2}$, $\quad b)\ \frac{\sqrt{6a}}{12}$, $\quad c)\ \frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$; $\quad d)\ \frac{(\sqrt{x}+5)^2}{x-25}$

3. $\frac{5-(2x+3y)}{(2x+3y)}=\frac{5-2(2x+3y)}{(2x+3y)(2x-3y)}$ $\qquad$ 4. $\frac{14a^8b^5}{36a^3b^6}=\frac{7a^5}{18b}$

1. $(2x+3y)(2x-3y)$; $\qquad$ 2. $36a^3b^6$

29

61 - 3

COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo
Integración de los conocimientos adquiridos

El álgebra es una herramienta fundamental en el estudio de las matemáticas y de otras ciencias, en esta sesión realizarás un repaso, con el fin de prepararte para la evaluación del núcleo.

Reúnete con dos compañeros(as) más para observar el video y comenta los temas que ya no recuerdes; en caso necesario, consulta a tu profesor(a).

Trabaja con otro compañero(a) para resolver los ejercicios que se presentan a continuación.

I. Copia en tu cuaderno las parejas de expresiones que sean equivalentes, tomando una de cada columna:

1.	$(a^n)^m =$	*A.*	a
2.	$(abc)^n =$	*B.*	$\sqrt[n]{a^m}$
3.	$a^{-n} =$	*C.*	a^{n+m}
4.	$a^0 =$	*D.*	a^{m-n}
5.	$a^n \bullet a^m =$	*E.*	1
6.	$(a^x b^y c^z)^n =$	*F.*	$\frac{a^n}{b^n}$
7.	$\frac{a^m}{a^n} =$	*G.*	$\frac{1}{a^n}$
8.	$(\frac{a}{b})^n =$	*H.*	$a^n b^n c^n$
9.	$a^{\frac{m}{n}} =$	*I.*	$a^{xn} b^{yn} c^{zn}$
10.	$a^1 =$	*J.*	$a^{n \bullet m}$

II. Factoriza los siguientes polinomios. Explica en cada caso cómo lo haces.

1. $x^2 + 6x + 9$

2. $9a^2 - \frac{1}{4}$

3. $c^2 + 2c - 3$

4. $6a^3b^2 - 3a^2b^3 + 24a^4b$

5. $y^2 - 8y + 16$

En forma individual, resuelve los ejercicios siguientes.

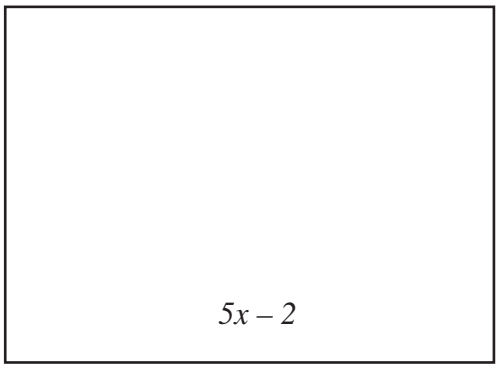
III. Obtén los siguientes productos de binomios.

a) $(3a - 2b)(3a + 2b) =$

b) $(xy + 4)(xy - 5) =$

c) $(4x - \frac{1}{2})^2 =$

IV. Observa la figura siguiente y encuentra una expresión para:



a) Perímetro
b) Área

V. Simplifica esta fracción algebraica:

$$\frac{7a+7}{a^2+2a+1}=$$

VI. Resuelve la siguiente división algebraica:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)} \div \frac{a\,(a+b)}{1}$$

VII. Resuelve la adición algebraica que está enseguida:

$$\frac{a}{(a+1)}+\frac{1}{(a-1)}=$$

Compara tus respuestas con la clave; si tienes duda, consulta a tu profesor(a).

CLAVE

I. 1. *J*; 2. *H*; 3. *G*; 4. *E*; 5. *C*; 6. *I*; 7. *D*; 8. *F*; 9. *B*; 10. *A*.

II.

1. $(x+3)^2$
2. $(3a+\frac{1}{2})(3a-\frac{1}{2})$
3. $(c+3)(c-1)$
4. $3a^2b\,(2ab-b^2+8a^2)$
5. $(y-4)^2$

III. *a*) $9a^2-4b^2$ *b*) $x^2y^2-xy-20$ *c*) $16x^2-4x+\frac{1}{4}$

IV. Perímetro = $14x-2$ Área = $10x^2+x-2$

V. $\frac{7}{a+1}$ VI. $\frac{1}{a}$ VII. $\frac{a^2+1}{a^2-1}$

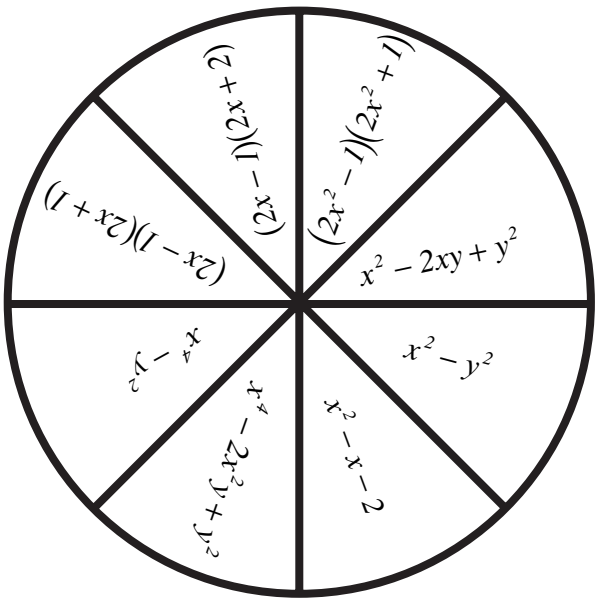
30
62 - 3

¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

Evaluación personal
Demostración del aprendizaje logrado

La ventaja de las evaluaciones parciales es que te permiten detectar qué temas no tienes claros y buscar alternativas de recuperación antes de que se acumulen deficiencias y te sea más difícil superarlas.

Trabaja en tu cuaderno. Observa el video y colorea la ruleta de acuerdo con lo que se indique.



Con el maestro(a) revisa tu ejercicio.

Resuelve los siguientes ejercicios individualmente, en tu cuaderno.

1. Relaciona ambas columnas colocando en el paréntesis la letra que corresponda.

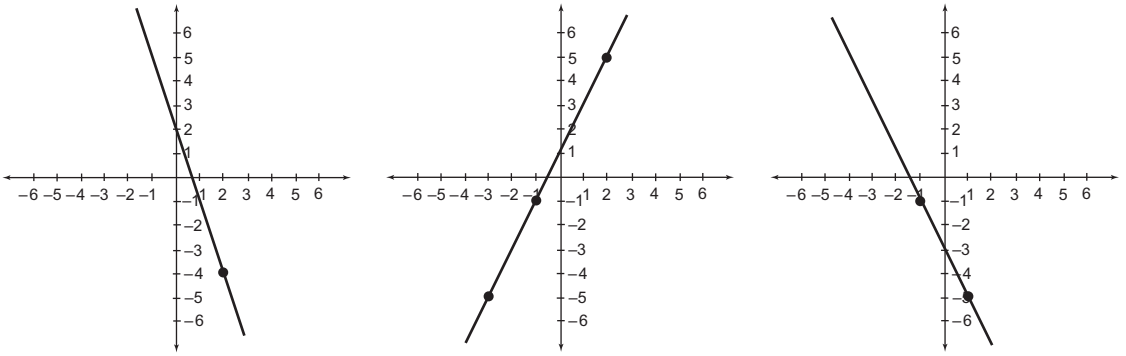
1. ( ) $(6x + 2y - 3) + (-9x + 6y - 1)$	$a)$ $2x^4 - 6x$
2. ( ) $(-5a^2b)(2a^3)$	$b)$ a
3. ( ) $(15m^3n^3 - 12m^2n^2) \div (-3mn)$	$c)$ $10x + y - 4$
4. ( ) $2x(x^3 - 3)$	$d)$ m^5n^3
5. ( ) $(9x + 2y - 1) - (-x + y + 3)$	$e)$ $-10a^5b$
6. ( ) $(3a^3b^2 \ 2b^2)(-6a^3b^2 - b^2)$	$f)$ $-5m^2n^2 + 4mn$
7. ( ) $(m^3n^2)(m^2n)$	$g)$ $-3x + 8y - 4$
8. ( ) $a^2x \div ax$	$h)$ $-18a^6b^4 + 9a^3b^4 + 2b^4$

2. Escribe a en función de y, cuando $b = 5y$

$a = 2b + 1$

3. Elige la función y escríbela junto a la gráfica correspondiente

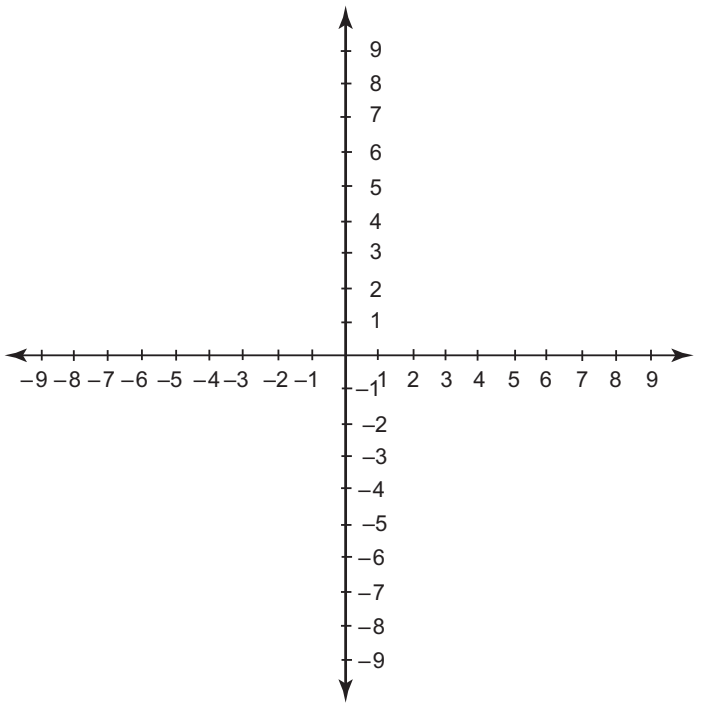
a) $y = -3x + 2$ *b)* $y = 2x + 1$ *c)* $y = -2x - 3$



4. Completa la tabla y haz la gráfica correspondiente:

$y = (x+1)^2$

x	y	Puntos
–1		
0		
1		
2		



5. Resuelve los siguientes ejercicios:

$a)\ \left(2a^3 - 3a^2 - 5a + 6\right) \div (a - 2) =$

$b)\ \left[\frac{1}{3}n - 2\right]\left[\frac{1}{3}n + 1\right] =$

$c)\ (2a - 3c)^2 =$

$d)\ \textit{simplifica}\ \ \frac{5b^2 - 5b}{b^3 - 2b^2 + b} =$

$e)\ \frac{2}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a+1)} =$

Verifica tus respuestas con las que proporcione el profesor(a); corrige tus errores.

31 **ARMANDO LAS PIEZAS**

63 - 3 **Panorámica de lo aprendido**

64 - 3 **Integración de los tres primeros núcleos básicos**

Observa el video en donde se aprecia una de tantas aplicaciones que tienen las matemáticas.

Organiza tus conocimientos. Trabaja con un compañero(a).

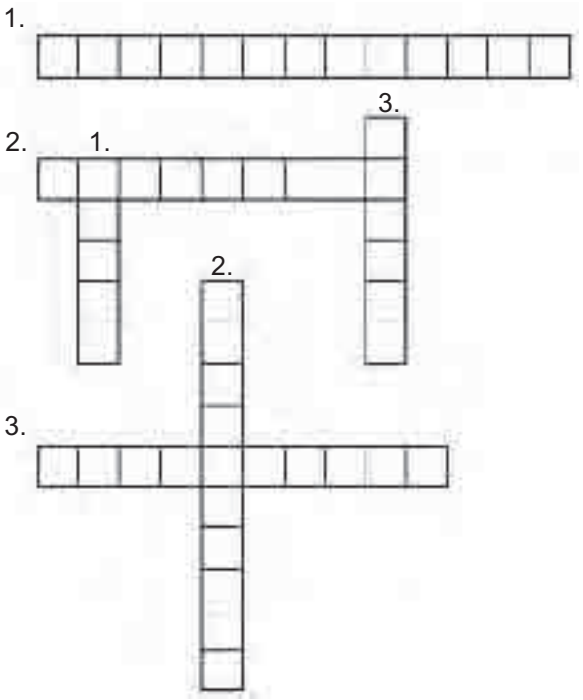
1. Resuelve el crucigrama

Horizontales

1. Estudia la relación entre los lados y ángulos de un triángulo.
2. Establece una relación entre las formas y su representación.
3. Estudia los números y sus propiedades.

Verticales

1. Se puede dar por la imperfección de los instrumentos.
2. Ayuda a anticipar la corrección de un resultado.
3. Error que se introduce cuando se da un resultado truncado.



2. En la sopa de letras encuentra la respuesta de las preguntas que están después.

J	A	N	A	S	M	O	S	U	T
I	S	T	R	A	U	L	N	E	O
S	O	D	E	N	L	P	G	D	M
A	P	O	S	T	I	I	V	O	S
R	I	S	T	E	I	N	G	E	L
S	U	M	A	R	P	B	I	D	M
S	C	J	R	T	L	R	G	F	A
N	E	G	A	T	I	V	O	P	N
U	V	S	E	I	C	J	L	M	E
S	E	M	E	J	A	N	T	E	S
A	S	O	U	P	R	A	N	T	I

a) Son los términos que tienen la misma literal con el mismo exponente.

b) Es el signo que corresponde a la suma de dos números negativos.

c) Es el exponente en la expresión $3a^2$.

d) Es lo que se hace con los exponentes al multiplicar potencias de la misma base.

e) Es lo que se hace al dividir potencias de la misma base.

f) Es lo que se hace con los exponentes al elevar una potencia a otra potencia.

g) Es el signo que le corresponde a cualquier número, negativo o positivo, al elevarlo al cuadrado.

Observa un nuevo video en el que se te presenta información acerca de la posible aplicación de las matemáticas.

Continúa organizando tus conocimientos sobre los tres núcleos estudiados.

3. Simplifica hasta obtener un número de la forma $m\sqrt{n}$, donde m y n son enteros y n es el número más pequeño posible.

$a)\quad \sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}=$

$b)\quad \sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{75}=$

4. Calcula

   a) $(3+\sqrt{5})^2$

   b) $(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})$

   c) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$

   d) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

   e) $\dfrac{\sqrt{27}}{0.3}$

   f) $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$

5. Busca dos enteros consecutivos, entre los cuales estarían los siguientes números

   $4\sqrt{15}$, $6\sqrt{7}$, $2\sqrt{57}$, $5\sqrt{10}$

6. El siguiente ejercicio es un reto a tus conocimientos, aunque parece paradójico es más sencillo de lo que crees.

¿Cómo justificas este fenómeno?

$$\sqrt{2} \cong 1.41421356$$

$$\sqrt{8} \cong 2.82842712$$

$$\sqrt{18} \cong 4.24264068$$

¿Será que $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$?

7. Se busca:

   a) Un número más grande que su cuadrado.

   b) Un número más pequeño que su raíz.

   c) Un número igual a su raíz, pero también igual a su cuadrado.

8. Factoriza las siguientes expresiones:

   $a)\quad 9x^2 - 16y^4$

   $b)\quad 4a^2 - 4ab + b^2$

   $c)\quad 12mn^2 - 4n^3n^2 - 6m^2n$

   $d)\quad x^2 + 4x + 3$

   $e)\quad (x-2)(x+3) + (5-x)(x-2)$

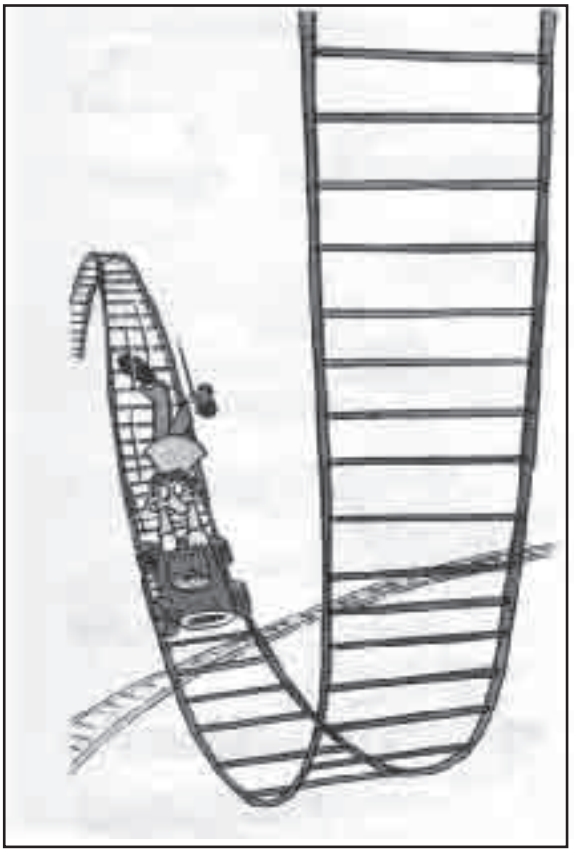
   $f)\quad (x-2)(x+1) - 3(x-2)^2$

   $g)\quad \frac{3}{5}(a-3) - 5a + 15$

   Compara el resultado de tus ejercicios con el de otros compañeros(as). Si tienen dificultades consulten con el maestro(a).

Núcleo Básico 4

FUNCIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES



Las funciones son instrumentos matemáticos muy potentes para expresar fenómenos de cambio o variación. Ejemplos de variación ya has estudiado en temáticas como la proporcionalidad o variación directa y que han sido modeladas por funciones lineales de la forma $y = kx$. En este núcleo nos ocuparemos de la proporcionalidad inversa de la forma $y = \frac{k}{x}$.

Otros ejemplos de variación que ya conoces te han llevado a trabajar otro tipo de funciones, como las de gráfica lineal, cuya forma general está dada por una expresión como $y = ax + b$; o funciones cuadráticas como $y = ax^2 + bx + c$

Dependiendo del tipo de variación o cambio que relaciona las variables que intervienen en un determinado fenómeno, que puede ser de la vida real o de la tecnología, se construyen tipos de funciones.

En este núcleo ahondarás en el estudio de las funciones, las caracterizarás y encontrarás herramientas matemáticas que te permitirán conocerlas y usarlas mejor.

32

ACERCAMIENTOS PELIGROSOS

34 - 2

De la proporcionalidad inversa a la función $y = \frac{1}{x}$

Comprensión y elaboración de la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$

Con tus compañeros de grupo.

1. Carmen y José se ganaron una bolsa de dulces, la cual reparten entre ellos dos. Si hay 32 dulces, ¿cuántos le corresponden a cada uno? Pero la situación no paró allí. A su vez llegaron un amigo de Carmen y una amiga de José. Si se realiza una nueva repartición, ¿cuántos dulces recibe cada uno de estos amigos? Pero, de nuevo, atraídos por los dulces llegó un nuevo amigo de cada uno de ellos, lo que obligó a repartir, ¡siempre por igual número de dulces a cada uno!

   ¿Cuántos dulces hay ahora para cada uno?

   Haz una tabla que recoja lo que fue ocurriendo en los sucesivos repartos

Número de amigos	***Número de dulces para cada uno***
2	16
4	
8	

¿Qué ocurre si por cada uno de los 8 llega un nuevo amigo? ¿Cuántos dulces recibiría cada uno?

Ilustra la situación en una gráfica cartesiana. Sobre las abscisas coloca el número de amigos. Sobre las ordenadas el número de dulces que reciben, en cada caso.

¿Qué observas en la distribución de los puntos de la gráfica?

A mayor número de amigos, ¿qué ocurre con el número de dulces? Son estas dos magnitudes directamente proporcionales?

Escribe una expresión general que describa el reparto de los dulces según el número de personas implicadas en él.

Comparte tus hallazgos con otros grupos.

Lee y analiza el siguiente texto, con tus compañeros(as).

DE LA PROPORCIONALIDAD INVERSA A LA FUNCIÓN

$$y = \frac{1}{x}$$

El reparto de los dulces, que se hizo en el problema anterior, no corresponde a magnitudes directamente correlacionadas ni mucho menos a magnitudes directamente proporcionales, las cuales son ejemplos de funciones lineales.

¿Qué características tienen estas funciones?

¿Cómo es la relación entre los valores de la variable dependiente y de la independiente?

¿Qué caracteriza su gráfica?

Como habrás observado en el problema que nos ocupa, entre más amigos llegaron menos dulces les correspondió:

¿Cómo es la relación entre los pares de valores de las dos variables?

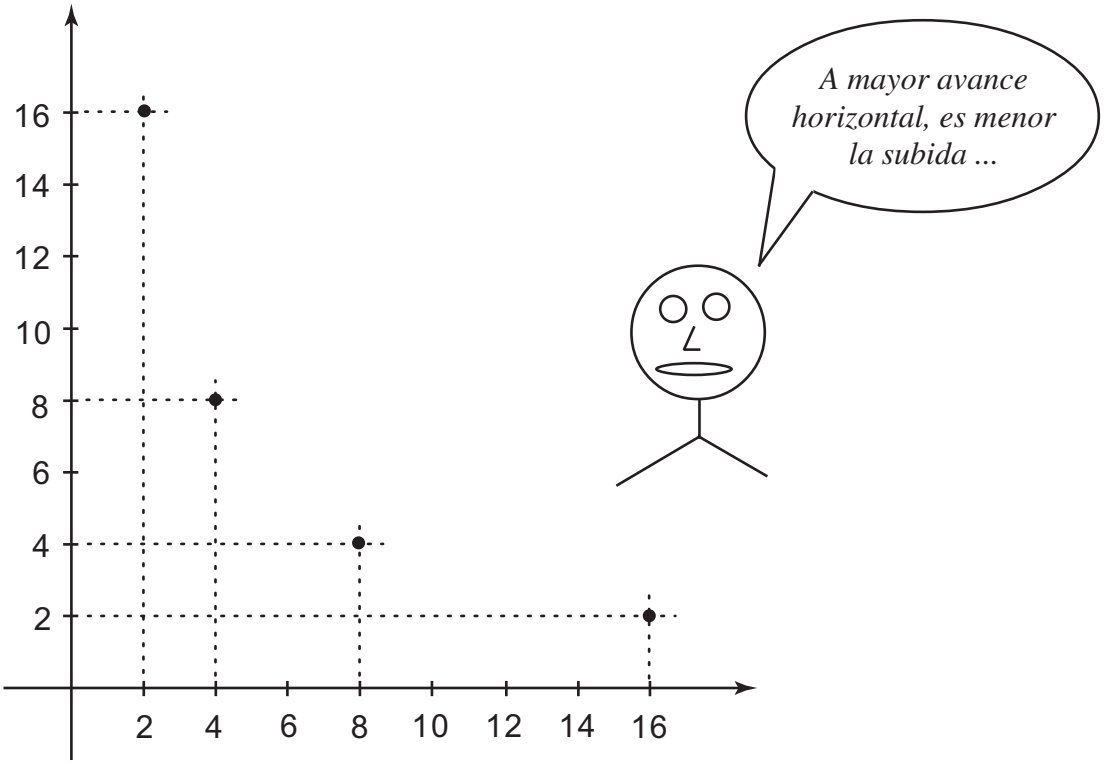
Número de amigos *(x)*	*2*	*4*	*8*	*16 ...*
Número de dulces *(y)*	*16*	*8*	*4*	*2 ...*

2×16 ; 4×8 ; 8×4 ; 16×2.

¡***El producto es constante*** e igual a 32!

$$x \, . \, y = k$$

La representación de los puntos en el plano cartesiano resulta así:



Los puntos no están sobre una recta, sino sobre ***una curva decreciente***.

Las ***magnitudes inversamente proporcionales*** cumplen las siguientes propiedades:

- Las magnitudes están inversamente correlacionadas: cuando una de ellas crece, la otra decrece.
- El producto de las parejas de valores de las dos magnitudes es constante. Cuando una crece *n* veces a la otra le corresponde la *n*-ésima parte.
- La representación gráfica de la proporcionalidad inversa es una curva decreciente: a menores valores de la variable independiente corresponden mayores valores de la variable dependiente.

Dos variables x ; y son ***inversamente proporcionales*** si

$$x \cdot y = k \Rightarrow \quad y = \frac{k}{x}$$

k es llamada ***constante de proporcionalidad***.

Observa con atención el video y comenta con tus compañeros(as) los aspectos relevantes sobre la proporcionalidad inversa.

Con tus compañeros(as) de grupo:

2. Realiza la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ es decir que para cada valor de x le asigna a y el inverso multiplicativo.

   Ayúdate con una tabla donde anotes los valores de las variables.

x	...	–3	–2.5	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	...
$y = \frac{1}{x}$												

   Si deseas puedes asignar más valores a x, donde x sea un número real. Ayúdate con la calculadora.

   ¡Qué ocurre con la función cuando x es igual a 0? ¿Está definida la función para $x = 0$?

   ¿Cómo es la gráfica para valores positivos de x?

   ¿Cómo es para valores negativos de x?

   ¿Presenta esta gráfica ejes de simetría?

   ¿Tiene un nombre especial la gráfica de esta función?

   Comenta con tus compañeros(as) y el profesor(a) las dudas que tengas.

Con tu grupo resuelve:

1. El volumen V de un gas en función de la presión P, medida en atmósferas y a una temperatura de 0º C está dado por la expresión:

$$V = \frac{22.4}{P}$$

   La tabla muestra cómo varía el volumen cuando varía la presión.
   ¿Por qué crees que no se toman valores negativos de P?

P (atmósferas)	*0.1*	*0.25*	*0.5*	*1*	*2*	*4*	*10*	*50*
V (litros)	*224*	*89.6*	*44.8*	*22.4*	*11.2*	*5.6*	*2.24*	*0.448*

   ¿Cómo explicas que V y P son magnitudes inversamente proporcionales?

¿Por qué crees que no se toman valores negativos de P?

¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Haz la gráfica y describe cómo resulta.

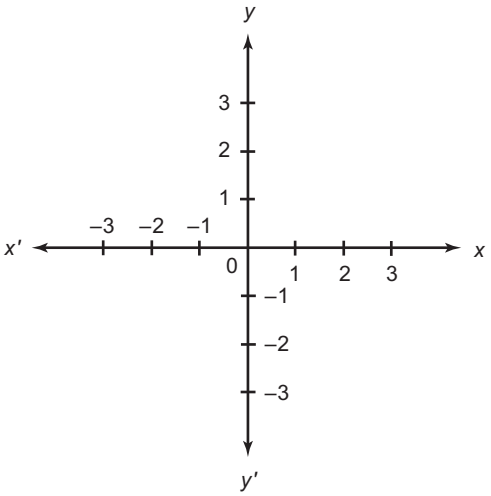
Comparte tu trabajo con tus compañeros(as).

En forma individual, con ayuda de la calculadora, tabula la siguiente función y construye la gráfica correspondiente:

x	$y = f(x)$	(x, y)
–3		
–2		
–1		

x	$y = f(x)$	(x, y)
3		
2		
1		

$$y = \frac{2}{x}$$

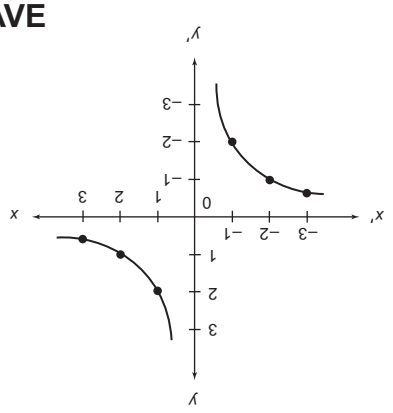


a) ¿Cómo es la gráfica que obtuviste?

b) ¿Puede considerarse que la gráfica de la función $y = \frac{2}{x}$ es del mismo tipo que la función $y = \frac{1}{x}$?

Compara tu ejercicio con el de la clave y en caso de error revisa tu procedimiento y corrige.

CLAVE



x	$y = f(x)$	(x, y)
–3	–0.66	(–3, 0.66)
–2	–1	(–2, –1)
–1	–2	(–1, –2)

x	$y = f(x)$	(x, y)
3	0.66	(3, 0.66)
2	1	(2, 1)
1	2	(1, 2)

33 RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN DIRECTA Y DE VARIACIÓN INVERSA

En esta sesión vas a realizar una síntesis acerca de los dos tipos de proporcionalidad o variación entre magnitudes que ya conoces, para llegar a las expresiones algebraicas de las funciones que modelan tales variaciones.

Aprovechando esa comprensión resolverás y formularás problemas que amplíen el campo de aplicaciones de dichos conocimientos.

Con dos compañeros(as) describe una situación que desde las matemáticas se puede considerar como ejemplo de magnitudes directamente proporcionales.

También describe otra que corresponda a magnitudes inversamente proporcionales.

En ambos casos ten en cuenta los siguientes aspectos:

a) Valores de la variable independiente que tienen sentido para esa situación: ¿puede tomar valores negativos?; ¿puede ser un número fraccionario?; ¿son aceptables solamente los enteros positivos?; ¿qué pasa si toma el valor cero?

   Las respuestas a las preguntas propuestas te llevan a pensar en lo que pasaría en la variable dependiente y en el significado de su valor dentro del contexto de la situación que describiste.

b) Para cada una de las dos situaciones prepara una cartelera que te sirva de apoyo para explicarlas ante el curso en plenaria.

   Una forma de presentación como la siguiente, podría serte útil para precisar las diferencias con claridad y sencillez.

Variación proporcional directa	Variación proporcional inversa
Situación: • Tabla • Entre los pares de valores de las variables, ¿qué permanece constante? • Proporciones con base en los datos de la tabla: • Gráfica. ¿Qué tipo de gráfica es? ¿Pasa por (0,0)? • Expresión algebraica que relaciona las dos variables. • Constante de proporcionalidad. • ¿Qué valores no son aceptables? • ¿Qué tipo de función modela situaciones como ésta? • Expresión algebraica general:	Situación: • Tabla • ¿Qué permanece constante entre los pares de valores? • Proporciones con base en los datos de la tabla: • Gráfica ¿Qué tipo de gráfica es? ¿Por qué no pasa por (0,0)? • Expresión algebraica que relaciona las dos variables. • Constante de proporcionalidad. • ¿Qué valores no son aceptables? • ¿Qué tipo de función modela situaciones como ésta? • Expresión algebraica general:

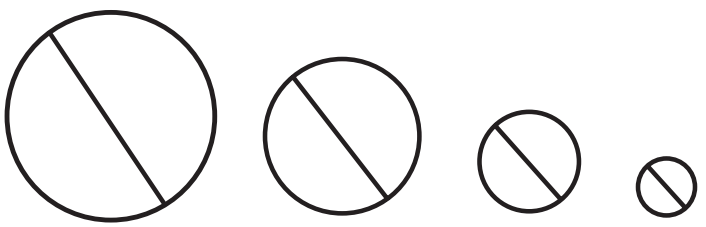
c) ¿Cómo hemos denominado al conjunto de números donde puede tomar valores la variable dependiente? ¿Por qué es importante precisarlo?

Expón tu trabajo ante el curso involucrando a los demás mediante preguntas, y enriquece tus conocimientos con los aportes de tus compañeros(as) y con las intervenciones de tu maestro(a).

Con tu mismo equipo de trabajo resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Qué tipo de variación existe entre la longitud de la circunferencia y la del diámetro?

Argumenta tu respuesta con las herramientas que te sean necesarias.



Si hay una constante de proporcionalidad, ¿cuál es?

2. ¿Qué tipo de variación existe entre la longitud del lado de un cuadrado y su área? ¿Corresponde esta variación a la proporcionalidad inversa o a la proporcionalidad directa? ¿Por qué?

3. Un automóvil gasta 10 galones de gasolina para recorrer 125 km, viajando con velocidad constante.

   a) Haz una gráfica para encontrar la distancia que puede recorrer cuando sólo tiene 16 galones.

   b) ¿Cuántos galones se necesitarán para un recorrido de 400 km?

   c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

   d) Escribe la expresión algebraica que representa la variación entre los galones de gasolina consumidos y la distancia recorrida.

Compara tu trabajo con el hecho por otros equipos.

Trabaja individualmente, en tu cuaderno.

Para cavar una zanja, Orlando dispone de 12 horas.

   a) Si 3 amigos se le unen al trabajo, cavando al mismo ritmo de Orlando, ¿en cuántas horas estará lista la zanja?

   b) ¿Y si no son 3 los amigos sino 2? ¿Qué pasa si son 5?

   c) Haz una tabla.

      ¿Cómo son el número de horas necesarias para cavar la zanja y el número de personas que intervienen?

   d) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

   e) Escribe la expresión que relaciona el comportamiento de las dos variables.

CLAVE

e) $y = \frac{12}{x}$

d) Variable dependiente: número de horas. Constante de proporcionalidad: 12

. Son inversamente proporcionales

Personas trabajando	*1*	*2*	*2*	*4*	*6*
Horas necesarias *12*	*6*	*4*	*3*		

a) 3 horas.
b) 4 horas, *2 horas*
c)

34 APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD

Repartos proporcionales

Algunas situaciones problemáticas que tienen que ver con repartos requieren tomar en cuenta algunas condiciones que garanticen cierta equidad para su realización.

Con tus compañeros(as) lee y analiza los siguientes problemas a manera de ejemplos.

1. Gustavo, María y Pedro han hecho un esfuerzo para ahorrar y tienen en su alcancía, respectivamente $7 000, $8 000 y $6 000. Su padre quiere premiar este esfuerzo y para aumentar el ahorro de sus hijos reparte proporcionalmente, según lo ahorrado por cada muchacho, $42 000. ¿Cuánto recibe cada uno de ellos? ¿A cuánto asciende ahora el dinero de cada uno de los hijos?

   Si el dinero se va a repartir en forma directamente proporcional al ahorro, ¿quién recibirá más y quién menos?

   - El ahorro mayor corresponde a María, ella recibirá una suma mayor que la de sus hermanos.
   - Pedro ha ahorrado menos, recibirá menos dinero.

Para saber cuánto recibirá cada niño es necesario hacer una bolsa común y encontrar por cada $1 000 ahorrados cuánto corresponde del premio, $42 000. Así resulta la siguiente razón:

Dinero total ahorrado: $\$7\,000 + \$8\,000 + \$6\,000 = \$\,21\,000$

Dinero del premio: $\$42\,000$

Por cada $1 000 ahorrados se recibirá:

$$\frac{42\,000}{21\,000} = 2\,000$$

Gustavo recibirá:

$$\frac{42\,000}{21\,000} \times 7\,000 = 2\,000 \times 7\,000 = 14\,000$$

María recibirá:

$$\frac{42\,000}{21\,000} \times 8\,000 = 2\,000 \times 8\,000 = 16\,000$$

Pedro recibirá:

$$\frac{42\,000}{21\,000} \times 6\,000 = 2\,000 \times 6\,000 = 18\,000$$

Gustavo tendrá ahora: $\$7\,000 + \$14\,000 = \$21\,000$

María contará con: $\$8\,000 + \$16\,000 = \$24\,000$

Pedro completará ahora: $\$6\,000 + \$12\,000 = \$18\,000$

2. ¿Cómo hubiera sido el reparto, si el padre de los niños hubiese decidido repartir inversamente proporcional a las edad de los niños? Es decir el menor recibirá mayor premio.

   Las edades de los niños son: Gustavo 12 años, María 10 años y Pedro 8 años.

   Como el reparto es inverso, el dinero se reparte proporcionalmente a los inversos de las edades.

   La razón es ahora:

$$\frac{42\,000}{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}} = \frac{42\,000}{\frac{10+12+15}{120}} = \frac{42\,000}{\frac{37}{120}}$$

$$= \frac{42\,000 \times 120}{37} = \simeq 136\,216$$

   Gustavo recibirá:

$$12x = 136\,216 \Rightarrow \quad x = \frac{136\,216}{12} \simeq 11\,351$$

   María recibirá:

$$10x = 136\,216 \Rightarrow \quad x = \frac{136\,216}{10} \simeq 13\,622$$

   Pedro recibirá:

$$8x = 136\,216 \Rightarrow \quad x = \frac{136\,216}{8} \simeq 17\,027$$

   Cada niño agregará a sus ahorros la cantidad respectiva que le regala su papá.

Con tus compañeros resuelvan los siguientes problemas. En cada caso analicen el tipo de reparto que es necesario hacer.

1. Dos barrios contiguos deciden construir un polideportivo en una zona común. Un barrio cuenta con 20 000 habitantes y el otro con 30 000. La inversión total es de $12 000 000 y se acuerda que el aporte de cada comunidad sea inversamente proporcional al número de habitantes. ¿Cuál será el aporte de cada uno de los barrios?

2. Tres hermanos tienen una cuenta de ahorros, al final de año quieren repartir los réditos proporcionalmente al ahorro de cada uno, el cual se explicita en la siguiente tabla.

Ahorrador 1	*Ahorrador 2*	*Ahorrador 3*
$1 500 000	*$4 500 000*	*$6 000 000*

¿Qué porcentaje de los réditos (intereses) recibirá cada uno?

3. Tres personas adultas reciben una herencia que se repartirá inversamente proporcional a las edades, favoreciendo de esta manera a los más jóvenes.

   Si las edades son, 30 años, 55 años y 40 años, ¿qué porcentaje de la herencia recibirá cada uno?

4. Inventa y resuelve dos problemas. Uno de reparto directamente proporcional y otro de reparto inversamente proporcional. Intercambia tus problemas con tus compañeros(as).

Compara tu trabajo con el realizado por otros grupos.

35 UN PRODUCTO INICIA TODO

65 - 3

Ecuaciones con paréntesis
Resolución de ecuaciones con paréntesis

Nuevamente abordarás el trabajo con ecuaciones en las que, según la situación problemática, aparecerán paréntesis para indicar productos entre expresiones algebraicas, como también algunos coeficientes racionales ya sea en forma de fracción o en forma de

decimales. La situación problemática también puede originar cocientes entre expresiones y el uso de la adición o de la sustracción entre productos o cocientes de expresiones algebraicas.

Con base en la resolución de problemas ejercitarás tu habilidad para traducir situaciones del lenguaje natural al lenguaje propio de las matemáticas y dotarás de sentido las respuestas encontradas teniendo en cuenta el contexto del problema.

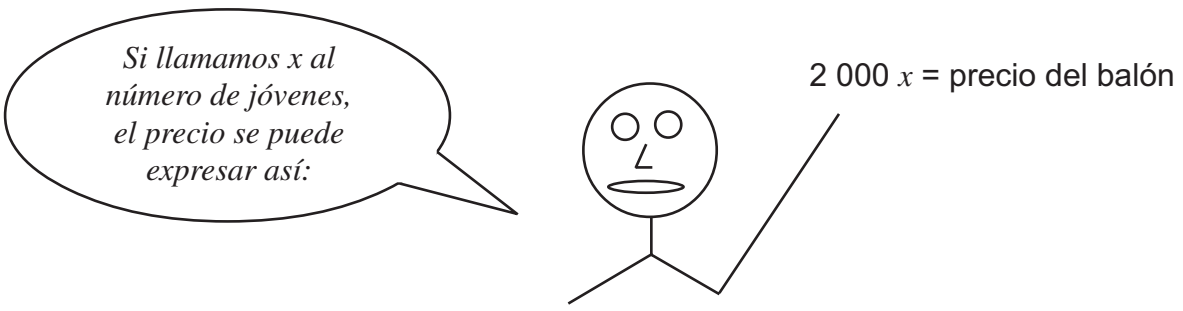
Taller: **Del texto del problema a la ecuación.**

Intégrate a un equipo y con cuaderno y lápiz a la mano resuelve los problemas que se presentan a continuación:

1. *El balón de fútbol*.

Varios jóvenes deciden comprar un balón de fútbol aportando cada uno $2 000. Al momento de hacer la compra tres de ellos no pudieron dar su cuota y cada uno de los otros debió dar $2 500 para cubrir el precio del balón. ¿Cuánto costó el balón?

- Con base en la primera frase del problema, ¿cómo se expresaría el valor del balón?



- Continuando con el texto del problema, el precio anterior fue asumido por $(x-3)$ jóvenes que debieron aportar $2 500 cada uno.

  De donde: $2\,000\ x = 2\,500\ (x-3)$ ¡Halla el valor de x!

  $$2\,000\,x = 2\,500\,x - 7\,500$$

- Si trabajaste bien encontraste que $x = 15$, ¿qué es 15?

- ¿Cuál es entonces el precio del balón?

2. *La comunidad se reúne.*

En una reunión comunitaria hay 40 personas que tienen más de 40 años; un cuarto del número de asistentes tiene entre 30 y 40 años y la tercera parte tiene menos de 30 años.

¿Cuántas personas hay en la reunión?

¿En cuántos rangos de edades se han clasificado las personas?

- Llama x al número total de personas que están reunidas.
- Según el texto del problema, ¿a qué podría ser igual $x - 40$?
- Plantea la ecuación y halla el valor de x

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x - 40$$

$$\frac{3x + 4x}{12} = x - 40 \qquad \text{¿por qué?}$$

$$3x + 4x = 12(x - 40) \qquad \text{¿por qué?}$$

$$7x + 12x - 480 \qquad \text{¡continúa y halla x!}$$

3. *Los precios suben y suben.*

Un artículo experimentó dos aumentos sucesivos, uno del 4% y otro del 5%. Su precio es ahora de $46 410.

¿Cuál era su precio inicial?

- Si alguien te dice que el precio actual equivale al inicial más un aumento del 9%, ¿estarías de acuerdo con esa afirmación?
- ¿Cuál es tu primera conjetura al respecto?
- Llamemos p al precio inicial y expresemos el aumento del 4% sobre p como 0.04 p.

$(p + 0.04\ p)$ es el nuevo precio del artículo.

- Expresa en función de p el segundo aumento del 5% sobre el nuevo precio.

  $5\%\ de\ (p + 0.04\ p) = 0.05 \times 1.04\ p$

- El precio final es entonces:

  $1.04\ p + (0.05 \times 1.04\ p) = 46\ 410$

  $1.04\ p + \quad 0.052\ p \quad = 46\ 410$

  $1.092\ p \quad = 46\ 410$

Observa que el precio inicial está multiplicado por 1.092, es decir que el aumento total es del 9.2%

- Despeja:

$$p = \frac{46\ 410}{1.092} = \$42\ 500$$ precio inicial

- Si quieres verificar la respuesta transforma el problema y halla el precio final después de los dos aumentos sucesivos.

4. *Buscando números consecutivos*.

- Determina dos enteros consecutivos cuya suma sea 1 789.

Si denominas un entero n, su consecutivo será $n + 1$.

Plantea la ecuación y despeja n.

Verifica tus respuestas.

- Determina, si es posible, tres enteros consecutivos cuya suma sea 1 989. Haz lo mismo cuando la suma es igual a 1 789.

Observa el programa de video, en él se presentarán algunos aspectos que te permitirán avanzar en el tema; después comenta el contenido del programa con tus compañeros(as).

Realiza con tu equipo, la lectura del texto siguiente:

ECUACIONES CON PARÉNTESIS

La solución de algunos problemas origina el planteamiento de ecuaciones lineales, con una incógnita, en las que existen paréntesis. Éstos pueden estar precedidos del signo + o del signo – es decir de los coeficientes $+1$ ó -1 y para suprimir tales paréntesis es necesario multiplicar la expresión algebraica contenida en ellos por el coeficiente o factor respectivo. Como en estos casos se omite la escritura del 1, es posible que al no verlo se pierda la comprensión de aquello que justifica el procedimiento.

Cuando los coeficientes que preceden a los paréntesis son diferentes de $+1$ y de -1 se procede igualmente a la realización de las multiplicaciones correspondientes.

Cualquier ecuación con una incógnita que lleva paréntesis se puede reducir a otra equivalente, esto sucede cuando se suprimen los paréntesis y se reducen los términos semejantes.

Obsérvense los siguientes ejemplos:

a. Determinar el valor numérico de la incógnita en la ecuación:

$$5x - (2x + 18) = 11 - 4(x + 2)$$

Antes de suprimir los paréntesis es necesario recordar que, cuando hay un coeficiente antes de ellos, dicho coeficiente multiplica a cada uno de los términos de esa expresión.

Como el primer miembro el signo “menos” precede al paréntesis, se considera que el coeficiente que va con el signo es 1, mientras que en el segundo miembro el coeficiente que precede a la expresión entre paréntesis es –4, después se efectúan los productos indicados.

$$5x - 1\ (2x + 18) = 11 - 4(x + 2) \ldots (1)$$

$$5x - 2x - 18 = 11 - 4x - 8 \ldots (2)$$

Como se observa, la ecuación número 2 es una ecuación equivalente a la número 1.

Se agrupan los términos semejantes con incógnita en el primer miembro y los términos independientes en el otro; para ello se aplican las propiedades de la igualdad:

$$5x - 2x + 4x = 11 - 8 + 18$$

se reducen los términos semejantes en la ecuación:

$$7x = 21$$

se despeja la incógnita:

$$x = 3$$

se comprueba el resultado, sustituyéndolo en la ecuación número 2:

$$5x - 2x - 18 = 11 - 4x - 8$$

$$5\,(3) - 2(3) - 18 = 11 - 4(3) - 8$$

$$15 - 6 - 18 = 11 - 12 - 8$$

$$-9 = -9$$

Como se obtiene una igualdad, la solución x = 3 es correcta.

2. Determinar el valor numérico de la incógnita en la ecuación:

$$4 + (-5y + 8\,) = -\,2\,(7y - 3) \qquad (1)$$

En el primer miembro se observa que el signo positivo precede al paréntesis, por ello permanecen iguales los signos que tiene cada uno de los términos contenidos dentro del paréntesis, ello equivale a multiplicar por + 1. En el segundo miembro se efectúa la multiplicación indicada:

$$4 - 5y + 8 = -\,14y + 6 \qquad (2)$$

se agrupan los términos en ambos miembros de la ecuación, considerando las propiedades de la igualdad:

$$5y + 14y = 6 - 4 - 8$$

se reducen los términos semejantes:

$$9\,y = -6$$

se despeja la incógnita:

$$y = -\,\frac{6}{9}$$

se simplifica:

$$y = -\,\frac{2}{3}$$

Para comprobar el resultado, se sustituye $y = -\frac{2}{3}$ en la ecuación 2.

$$4 - 5y + 8 = 14y + 6$$

$$4 - 5(-\frac{2}{3}) + 8 = -14(-\frac{2}{3}) + 6$$

$$4 + \frac{10}{3} + 8 = \frac{28}{3} + 6$$

los números enteros se convierten a tercios para facilitar la comprobación, con lo que:

$$4 = \frac{12}{3}, 8 = \frac{24}{3} \; y \; 6 = \frac{18}{3}$$

$$\frac{12}{3} + \frac{10}{3} + \frac{24}{3} = \frac{28}{3} + \frac{18}{3}$$

$$\frac{46}{3} = \frac{46}{3}$$

como se llega a la igualdad, la solución $y = -\frac{2}{3}$ es correcta.

Los pasos que deben seguirse para resolver una ecuación con paréntesis son:

1. Suprimir los paréntesis mediante la multiplicación.
2. Agrupar términos semejantes.
3. Reducir términos semejantes.
4. Despejar la incógnita.
5. Comprobar el resultado.

Sigue con tu equipo y resuelve en tu cuaderno.

a) $2x - 3(x - 5) = 3x + (-6x - 1)$ *b)* $-6x - (2x - 7) = 4x - 2(x + 2)$

b) Dos trenes parten a las 5 a.m., uno de la ciudad A, y el otro de la ciudad B. Esta última situada a 315 km de A.

¿A qué hora se cruzarán, si el primero va a 90 km/h y el segundo a 120 km/h?

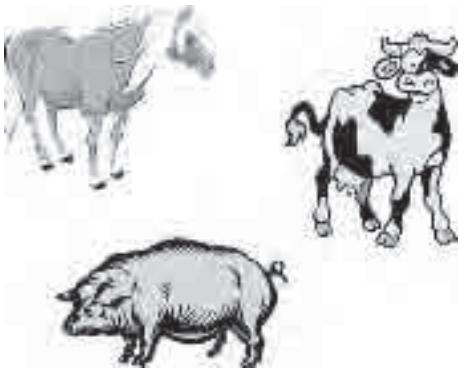
Pista: En el recorrido que hacen los trenes hasta el sitio donde se cruzan han invertido el mismo tiempo. En el instante del cruce ¿cuántos kilómetros han recorrido entre los dos?

Compara tus resultados con los de otro equipo, en caso de existir diferencias, revisa tus procedimientos y discute la interpretación y comprensión del problema. Pueden simularlo.

En forma individual, resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno:

a) $-5x - (4x - 6) = 3(-x - 2)$ *b)* $-8(2x - 3) + 1 = 5x + (-6x + 70)$

c) Ahora diviértete con un problema, entre animales, que me propuso el abuelo:



Se cambiaron 5 cerdos por 2 terneros, 10 terneros por 3 vacas, 12 vacas por 5 caballos y 7 caballos por 8 novillos, estimado el valor de cada uno de estos últimos en $420 000.

El abuelo pregunta: ¿Cuál es entonces el precio de un cerdo?

Compara tus resultados con la clave, si no coinciden, busca el error en tus procedimientos.

CLAVE

a) $x = 2$ b) $x = -3$ c) $ 24 000

36 LA MUDANZA DE LAS LETRAS

66 - 3

Ejercicios de despeje
Despejar variables o literales de primer grado en fórmulas

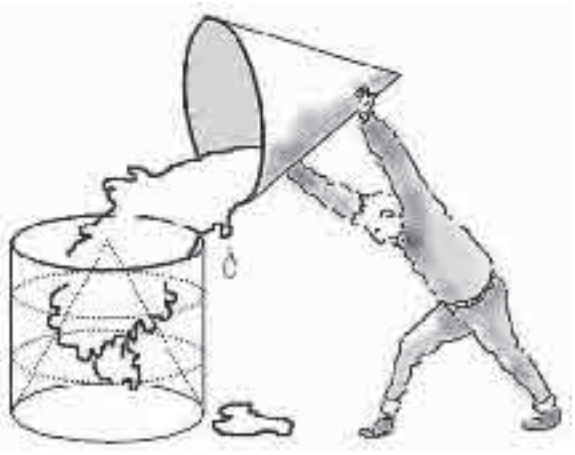
Uno de los temas que se aplica con mayor frecuencia en otras asignaturas es el despeje de variables en fórmulas, como las que aplicamos en Física, en Química y también en Matemáticas. Un despeje no es otra cosa que "cambiar" variables de un miembro de la ecuación a otro, aplicando las propiedades de la igualdad.

En la sesión 76 de séptimo grado estudiaste dichas propiedades, conviene que vuelvas a ella para que las apliques con propiedad en ejercicios de despeje.

Taller: *Pensar para despejar*.

Con dos de tus compañeros(as) comparte las cuestiones propuestas aquí:

En el dibujo se representa un cono y un cilindro que tienen la misma altura h y sus bases son de igual área, B. Por los conocimientos que ya tienes, sabes que sería necesario verter tres conos de agua para llenar el cilindro. Esto lleva a la expresión:



$$V = \frac{1}{3}Bh$$

1. Formula un problema en el cual el valor desconocido sea el área de la base de un cono.

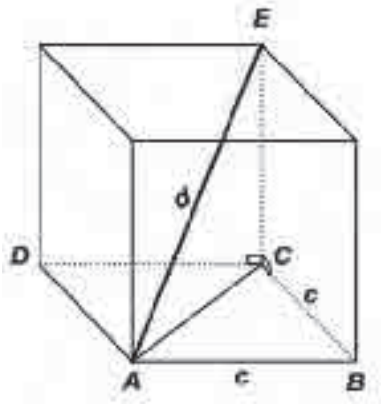
   A partir de la expresión para el volumen encuentra una para B.

En cada paso asegúrate de por qué lo haces. En general es más fácil tener en el miembro izquierdo de la igualdad la variable que se va a despejar, entonces podrías empezar por conmutar los miembros de la igualdad.

$\frac{1}{3}Bh = V$ continúa hasta obtener otra igualdad en la cual el miembro izquierdo sea B.

2. Demostrando y despejando.

Si conoces la diagonal d de un cubo de lado c, ¿cómo encuentras el valor de c?



¿Conoces la relación entre la diagonal de un cubo y el lado?

En un cubo la diagonal es igual al lado por $\sqrt{3}$

Esta es una proposición que debe demostrarse, tú puedes hacerlo utilizando el Teorema de Pitágoras. Completa en tu cuaderno:

- Las caras de un cubo son cuadrados, en $ABCD$ considera el triángulo rectángulo ABC, escribe según Pitágoras AC^2 = _____ + _____.

  $AC^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$

- La recta EC es perpendicular a las rectas $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$ en el plano $ABCD$.

  ¿Es $\overline{EC}$ perpendicular a $\overline{CA}$?

  El triángulo ACE ¿es rectángulo?

- Nuevamente por Pitágoras, $AE^2 = AC^2 + CE^2 = 2c^2 + c^2 = 3c^2$

  Entonces $AE = \sqrt{3c^2} = c\sqrt{3}$ se concluye que

  $$d = c\sqrt{3}$$

  - Despeja c. ¡Basta dividir ambos miembros de la igualdad por ...!

3. Si conoces el área de un círculo ¿puedes encontrar su radio?

Escribe la expresión correspondiente.

Comparte tus hallazgos con otro equipo.

Observa con atención el video. En él encontrarás el procedimiento para despejar una variable de una fórmula determinada. Al finalizar, comenta en grupo las aplicaciones que tienen los despejes.

Con tu mismo equipo sistematiza las propiedades de la igualdad que has aplicado para realizar el despeje de una variable en una fórmula dada.

EJERCICIOS DE DESPEJE

Despejar una variable o incógnita de una ecuación dada significa dejar sola dicha variable en un miembro de la ecuación.

Como recordarás, en el curso anterior se estudiaron las propiedades de la igualdad; ahora afianzaremos el manejo y aplicación de estas propiedades.

1. ***Propiedad idéntica o reflexiva.*** Todo número es igual a sí mismo.

$$1 = 1 \; ; \; x = x$$

2. ***Propiedad simétrica.*** Los miembros de una igualdad pueden permutar sus lugares.

Si $2 + 3 = 5, \; 5 = 2 + 3$

Si $x = y$ entonces $y = x$

3. ***Propiedad transitiva.*** Si dos igualdades tienen un miembro común, los otros dos son iguales.

Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

4. ***Propiedad uniforme.*** Si a los dos miembros de una igualdad se les aumenta, disminuye, multiplica o divide entre la misma cantidad, la igualdad subsiste.

$$\text{Si } a = b \Rightarrow \begin{cases} a + x = b + x \\ a - x = b - x \\ a\,(x + 1) = b\,(x + 1) \\ \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

5. ***Propiedad cancelativa.*** Se pueden suprimir sumandos o factores iguales en los dos miembros de una igualdad y el resultado es otra igualdad.

Si $x + a = y + a$ entonces $x = y$
Si $c\,(x - 1) = d\,(x - 1)$ entonces $c = d$

Al aplicar estas propiedades se pueden despejar variables en una fórmula.

Ejemplos:

El perímetro de un rectángulo se calcula mediante la fórmula $P = 2a + 2b$, de ella despejará el lado a en función del perímetro y de la base.

Usando la propiedad simétrica de la igualdad, para tener a en el primer miembro, se tiene que:

$$P = 2a + 2b \quad \text{entonces} \quad 2a + 2b = P$$

Ahora se suma $(-2b)$ en ambos miembros, para eliminar $2b$ en el primer miembro y dejar sólo la variable $2a$ en función del perímetro y la base (propiedad uniforme).

$$2a + 2b + (-2b) = P + (-2b), \text{ entonces } 2a = P - 2b$$

Para eliminar el 2 del primer miembro y dejar sola la variable a, se dividen entre 2 ambos miembros (propiedad uniforme)

$$\frac{2a}{2} = \frac{P - 2b}{2}$$

Simplificando, se tiene la variable despejada:

$$a = \frac{P - 2b}{2}$$

El volumen de un cono de altura h y radio basal r se determina por la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$$

en ella se quiere despejar el radio.

Se aplica la propiedad simétrica de la igualdad $\frac{1}{3}\pi\, r^2\, h = V$

Multiplicamos por 3 ambos miembros de la igualdad

$$\pi\ r^2\ h = 3V$$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por $\pi\ h$

$$r^2 = \frac{3V}{rh}$$

Sacamos la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{3V}{rh}} \quad entonces \quad r = \sqrt{\frac{3V}{rh}}$$

Con tu equipo, resuelve y anota en el paréntesis la letra que corresponda al despeje correcto de la variable.

1. $F = \frac{Cr}{R}$ *despejar* r ( )

2. $f = \frac{Ph}{l}$ *despejar* l ( )

3. $h = \frac{gt^2}{2}$ *despejar* t^2 ( )

4. $P = 2a + b$ *despejar* a ( )

5. $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ *despejar* r^3 ( )

A) $\frac{3V}{4\pi}$

B) $\frac{Fc}{R}$

C) $\frac{P-b}{2}$

D) $\frac{Ph}{f}$

E) $\frac{FR}{c}$

F) $\frac{2h}{g}$

El profesor(a) escogerá algunos compañeros(as) para que muestren en el pizarrón el desarrollo del despeje de la variable; si son diferentes, corrige.

Realiza en tu cuaderno los siguientes despejes de variables:

1. $F = \dfrac{m v^3}{3}$ *despeja* m;

2. $P = 2a + b$ *despeja* b;

3. $V = \pi r^2 h$ *despeja* r^2;

4. $P = PeV$ *despeja* Pe;

5. $\dfrac{a}{f} = \dfrac{a'}{f'}$ *despeja* f'

Compara tus resultados con la clave. Si existen diferencias, haz nuevamente el despeje de la variable y corrígelas.

CLAVE

1. $m = \dfrac{Fr}{V^2}$; 2. $b = P - 2a$; 3. $r^2 = \dfrac{V}{\pi h}$; 4. $P_e = \dfrac{P}{V}$ 5. $f' = \dfrac{a'}{af}$

37

UN TRUEQUE JUSTO

67 - 3

Situación algebraica
Sustituir el valor de una variable por su equivalente

Como veremos en esta sesión, sustituir no es otra cosa más que cambiar el valor de una letra por otro equivalente, por eso lo llamamos un trueque justo; sin embargo, con este método “Jacinto no podrá sustituir sus bajas calificaciones por otras más altas” porque entonces eso no sería un trueque justo, ¿verdad, Jacinto?

¿Crees que el problema de los animales que nos puso el abuelo tiene que ver con este tema?

Observa el video y haz comentarios sobre aquellos aspectos que te hayan parecido interesantes.

Con un compañero(a) lee el siguiente texto:

SUSTITUCIÓN ALGEBRAICA

Sustituir es cambiar o transformar una función por su equivalente, reemplazando una literal o variable por una nueva literal o literales, de manera que el resultado se exprese en los términos de la nueva variable o letra.

En situaciones de la vida cotidiana se hacen cambios o sustituciones para obtener resultados equivalentes al estado inicial.

Por ejemplo, si tenemos un billete de $10 000, lo podemos cambiar por su valor equivalente en otros billetes o monedas de las que estén en circulación.

2 billetes de $5 000

1 billete de $5 000 y 5 monedas de $1 000

10 monedas de $1 000

5 monedas de $1 000 y 10 monedas de $500.

20 monedas de $500

Una sustitución algebraica será aquella en la que se puede expresar el valor de una variable en términos de otra.

Ejemplos:

1. Se tiene que $t = 3u + 7$ y sabemos que la variable $u = 5y - 4$

   Para expresar t en términos de y:

   Se hace el cambio de variable, sustituyendo el valor de u en la función dada:

   $$t = 3u + 7$$
   $$u = 5y - 4$$
   $$t = 3(5y - 4) + 7$$
   $$t = 15y - 12 + 7$$
   $$t = 15y - 5$$

   por lo tanto, $t = 15y - 5$ donde t queda expresada en términos de y.

2. Si un triángulo tiene una altura (h) de $\frac{1}{2x}$ y su base (b) es de $4x$ y $x = y - 3$, expresar el valor de su área en términos de y.

Si se tiene que A = $\frac{(4x)\,(\frac{1}{2}x)}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$

Como $x = y - 3 \Rightarrow A = (y-3)^2 = y^2 - 6y + 9$

Efectúa las siguientes sustituciones, haciendo el cambio de variable correspondiente. Trabaja con tu equipo.

1. Una parcela de forma rectangular tiene de largo $5x\,(a)$ y de ancho $2x\,(b)$; si $x = 2u + 4$, expresa el valor de su perímetro en términos de u.

   El perímetro de un rectángulo se calcula por $P = 2a + 2b$.

2. Si $b = 2a^2 + 7a - 10$ y la variable $a = 3y - 4$, expresa b en términos de y.

3. Si se tiene que $x = c^3 - 8c^2 + 7$ y el valor de $c = 4v + 1$, expresa x en términos de v.

   Comenta con otro equipo tus respuestas, y corrige si hay error.

En forma individual, realiza los siguientes ejercicios:

En las expresiones algebraicas que están a continuación, obtén el valor de la variable x expresándola en términos de u.

1.	$x = 6a + 5$	$a = 2u - 3$
2.	$x = 3y^2 + y - 2$	$y = u + 1$
3.	$x = 2b - 18$	$b = 5u - 4$
4.	$x = m^2 - m$	$m = 3u - 2$

Revisa tus resultados y compáralos con la clave; si hay diferencias, analiza nuevamente el ejercicio. Corrige si es necesario.

CLAVE

1. $12u - 13$; 2. $3u2 + 7u + 2$; 3. $10u - 26$; 4. $9u^2 - 15u + 6$

38

DOBLE PERSONALIDAD

68 - 3

Ecuaciones con coeficientes fraccionarios
Resolución de ecuaciones
con coeficientes fraccionarios

Para entender la resolución de este tipo de ecuaciones debe conocerse plenamente cómo obtener el producto de un monomio por un polinomio, así como saber determinar un común denominador, ya que ello es indispensable para comprender este tema. Tú ya dominas estos requisitos, entonces la sesión te servirá para afianzar y ampliar los conocimientos en la solución de ecuaciones.

Con atención observa el video ya que de él deducirás lo que significa el título de la sesión.

Lee el texto que viene a continuación y después realiza en tu cuaderno un ejercicio en el cual apliques el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones. Intercambia este ejercicio con un compañero(a) y después analicen por parejas el trabajo.

ECUACIONES CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Las ecuaciones lineales con una incógnita presentan también la característica de tener coeficientes fraccionarios; para resolver este tipo de ecuaciones se debe utilizar el común denominador como en el procedimiento que se mostrará en los siguientes ejemplos:

1. Determinar el valor numérico de la incógnita en la ecuación:

$$\frac{3}{4}x + 5 = -\frac{x}{2} + 10 \quad \text{ecuación (1)}$$

Los coeficientes enteros facilitan el procedimiento, por lo que se busca el común denominador; después, ambos miembros de la ecuación se multiplican por éste.

El común denominador es *4*, ya que es el *mcm* de los denominadores

$$4(\frac{3}{4}x+5)=4(-\frac{x}{2}+10)$$

$$\frac{12}{4}x+20=-\frac{4x}{2}+40$$

Se simplifica la ecuación, esto es, a partir de los coeficientes fraccionarios deben obtenerse coeficientes enteros:

$3x + 20 = -2x + 40$ ecuación (2)

Se agrupan los términos en cada miembro de la ecuación, aplicando las propiedades de la igualdad:

$3x + 2x = 40 + 20$

se reducen los términos semejantes:

$5x = 20$

se despeja la incógnita: $x = 4$

Comprueba el resultado en la ecuación original.

Otra forma de resolver la misma ecuación:

$$\frac{3}{4}x+5=-\frac{x}{2}+10$$

$$\frac{3}{4}x+\frac{x}{2}=10-5$$ Reduciendo términos semejantes

$$\frac{3}{4}x+\frac{2x}{4}=5$$

$$\frac{5}{4}x=5$$ Multiplicamos por 4

$$5x=20$$

$$x=4$$

2. Determinar el valor de la incógnita en la ecuación:

$$\frac{7x-1}{4}+(\frac{-3x-4}{5})=-1$$

El común denominador es 20 ya que es el *mcm* de los denominadores, entonces ambos miembros de la ecuación se multiplican por 20:

$$20\,(\frac{7x-1}{4})+20\,(\frac{-3x-4}{5})=20(-1)$$

se efectúan las multiplicaciones indicadas:

$$\frac{140x-20}{4}+(\frac{-60x-80}{5})=-20$$

se simplifica la ecuación, esto es, se reduce el numerador de cada expresión con su respectivo denominador. Obsérvese que cada denominador afecta a los dos términos de cada numerador, por lo que la ecuación puede expresarse separando cada término:

$$\left[\frac{140x}{4}-\frac{20}{4}\right] \quad + \quad \left[-\frac{60x}{5}-\frac{80}{5}\right] \quad =-20$$

$$(35x-5)+(-12x-16)=-20 \quad (2)$$

se agrupan los términos semejantes en cada miembro de la ecuación:

$$35x-12x=-20+5+16$$

$$23x=1$$

se despeja la incógnita:

$$x=\frac{1}{23}$$

El valor hallado siempre se sustituye en la ecuación original para comprobarlo; con la finalidad de facilitar la comprobación, ésta se realiza en la ecuación (2).

Hazlo, teniendo en cuenta que los enteros se convierten en veintitresavos.

Para resolver una ecuación cuyos coeficientes sean fracciones comunes, se determina el común denominador, éste se multiplica a los dos miembros de la ecuación, se simplifican los coeficientes de manera que queden como enteros y luego se aplica el procedimiento ya conocido para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

Con un compañero(a) resuelve en tu cuaderno.

1. En las siguientes operaciones con fracciones comunes, determina cuál es su común denominador:

   a) $\frac{4}{5}+\frac{8}{3}$ *b)* $\frac{7}{4}-\frac{3}{5}+\frac{2}{10}$ *c)* $\frac{7}{8}+\frac{1}{9}$ *d)* $\frac{3}{13}+\frac{7}{2}$

2. Simplifica los coeficientes en las siguientes ecuaciones, de manera que se obtengan coeficientes enteros:

   $a)\ \frac{18}{6}x+\frac{25}{5}=\frac{21}{3}x-\frac{28}{19}$ $b)\ \frac{12x-8}{4}+\frac{21x-15}{3}+\frac{27}{3}$

3. Realiza las siguientes conversiones:

   a) 7 enteros a tercios
   b) 10 enteros a novenos

4. Resuelve:

   $a)\ \frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{6}-\frac{x}{8};$ $b)\ \frac{x}{3}-\frac{x-2}{5}=\frac{1}{15}$

Compara tus resultados con los de otra pareja, si son diferentes, ensayen una revisión conjunta y si tienen dificultades consulten al profesor(a).

En forma individual, resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ \frac{6x}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9x}{2}-\frac{19}{10}$ $b)\ \frac{12x+2}{5}=3x$

Coteja tus resultados con los de la clave, si son diferentes, revisa tus procedimientos.

CLAVE

$\frac{3}{2}=x\ (q$ $;\frac{3}{2}=(a$

39

MI IDENTIDAD SECRETA

69 - 3

Ecuaciones fraccionarias
Simplificación y resolución de ecuaciones lineales

¿Sabías que la identidad secreta de una ecuación fraccionaria es una ecuación lineal? Para descubrir esa identidad secreta de la ecuación fraccionaria observa el video, ya que en él se mostrarán aspectos que te permitirán hacerlo.

Con tu equipo lee el texto siguiente y comenta los avances de esta sesión con respecto a las anteriores.

Las ecuaciones las vas resolviendo en tu cuaderno, no basta leer, es necesario hacer los ejercicios.

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Otro tipo de ecuaciones lineales con una incógnita son las ecuaciones fraccionarias, reciben este nombre debido a que en su denominador aparece una incógnita.

A continuación se presentan dos casos de ecuaciones fraccionarias: cuando en el denominador se tiene un monomio y cuando se tiene un binomio.

Primer caso. Cuando en el denominador se tiene un monomio.

Para el estudio del primero y del segundo caso es necesario tener en cuenta la forma de determinar el *mcm* y el cociente de expresiones algebraicas.

Determinar el valor de la incógnita en la ecuación:

$$\frac{2}{3x}+\frac{3}{5x}=7$$

Empezamos por determinar el *mcm* de los denominadores, en este caso, el *mcm* es $15x$.

Aquí únicamente se busca el *mcm* de los coeficientes, ya que la variable, por ser la misma, se conserva.

El *mcm* multiplica a cada miembro de la ecuación:

$$15x\,(\frac{2}{3x})+15x\,(\frac{3}{5x})=15x\,(7)$$

Se efectúan las multiplicaciones indicadas:

$$\frac{30x}{3x}+\frac{45x}{5x}=105x$$

Se efectúan las divisiones de monomios que se tienen y se obtiene la ecuación con coeficientes enteros

$$10+9=105x$$

El procedimiento para hallar el valor de la incógnita es el mismo que se ha visto en sesiones anteriores.

$$105x=19$$

$$x=\frac{19}{105}$$

La comprobación de este resultado debe hacerse en la ecuación original, en donde se debe cumplir la igualdad. Si se sustituye el valor de x en la ecuación equivalente con coeficientes enteros, se tiene:

$$10+9=105x$$

$$19=105\left(\frac{19}{105}\right)$$

$$19=19$$

Segundo caso. Cuando en el denominador se tiene un binomio.

Determinar el valor de la incógnita en la ecuación:

$$\frac{11}{6x+1}=\frac{2}{x+1}$$

Se determina el *mcm* de los denominadores, aquí únicamente quedará indicado éste, por lo que se tiene:

$$mcm=(6x+1)\,(x+1)$$

el *mcm* multiplica a cada miembro de la ecuación:

$$(6x+1)\,(x+1)\,(\frac{11}{6x+1}) = (6x+1)\,(x+1)\,(\frac{2}{x+1})$$

se reducen a la unidad los términos que sean semejantes tanto en el numerador como en el denominador, esto se indica mediante una diagonal.

$$\frac{\cancel{(6x+1)}\,(x+1)\,11}{\cancel{6x+1}} = \frac{(6x+1)\,\cancel{(x+1)}\,2}{\cancel{x+1}}$$

de la reducción se tiene:

$$(x+1)\,(11) = (6x+1)\,(2)$$

se efectúan las operaciones indicadas:

$$11x + 11 = 12x + 2$$

la forma de resolver esta ecuación ya se conoce.

$$\begin{aligned} 11 - 2 &= 12x - 11x \\ 9 &= 10x \\ \frac{9}{10} &= x \end{aligned}$$

Otro procedimiento, más corto, para llegar a la ecuación anterior es efectuar un producto cruzado, ya que su forma es la de una proporción; esto es, se multiplica el denominador del primer miembro por el numerador del segundo, y después el denominador del segundo por el numerador del primero.

$$\frac{11}{6x+1} = \frac{2}{x+1}$$

$$11\,(x+1) = 2\,(6x+1)$$

Se efectúan las multiplicaciones indicadas:

$$11x + 11 = 12x + 2$$

Como se ve, esta ecuación es la misma que se obtuvo con el primer procedimiento.

Obsérvese el ejemplo siguiente, en el cual se aplicará el procedimiento corto:

$$\frac{8}{5x-4}=\frac{5}{3x-1}$$

$$8(3x-1)=5(5x-4)$$

Se realizan las multiplicaciones indicadas:

$$28x-8=25x-20$$

El procedimiento para resolver esta ecuación ya es conocido.

De lo expuesto se tiene que:

Para resolver una ecuación fraccionaria cuando se tiene un monomio en el denominador, se determina el *mcm* de los denominadores, éste se multiplica por cada miembro de la ecuación, posteriormente se realizan las divisiones de monomios que se tienen en cada miembro, con ello se obtiene una ecuación con coeficientes enteros.

Si en el denominador se tiene un binomio, se multiplica en forma cruzada y así se obtiene una ecuación con coeficientes enteros.

Sigue con tu equipo de trabajo y en tu cuaderno determina el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{x}=7-\frac{8}{x} \qquad \frac{2}{x+1}=-\frac{1}{5}$$

Compara tus resultados con los de otro equipo, si hay diferencias revisa tus procedimientos.

En forma individual, determina el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones; hazlo en tu cuaderno.

$$a)\ \frac{3}{4x}+2=\frac{3}{7}-\frac{6}{7x} \qquad b)\ \frac{2}{3x+1}=\frac{5}{8x+1} \qquad c)\ \frac{2}{3x+1}=\frac{1}{x}$$

Coteja tus resultados con los de otro compañero(a); en caso de ser diferentes, consulta la clave.

CLAVE

$$a)\ x=-\frac{45}{44};\quad b)\ x=3;\quad c)\ x=-1$$

40

UN PUNTO DE PRINCIPIO A FIN

70 - 3

Gráfica de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
Solución gráfica de ecuaciones lineales

Cuando estudiaste las funciones de gráfica lineal y entre ellas las llamadas funciones lineales, viste que precisamente el nombre de ellas proviene de su representación gráfica y del apoyo que le presta la geometría al estudio de estos conceptos algebraicos.

Para el caso de las funciones lineales, ¿cuáles son sus características?

Taller: **De las funciones de gráfica lineal a las ecuaciones.**

Intégrate a un equipo de trabajo y con cuaderno en mano desarrolla este taller.

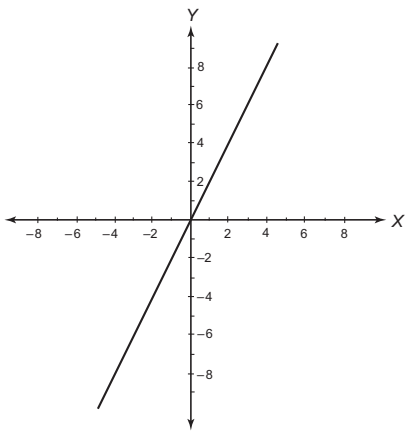
1. Haz una tabla de valores (sólo tres) y la gráfica de las siguientes funciones.

Exprésalas en la forma $y = ax + b$ ó $y = f(x)$ donde y es la imagen de x después de las transformaciones.

a) $2x = y$

Esta función es la que *"duplica"*, puede escribirse como $y = 2x$

x			
y			



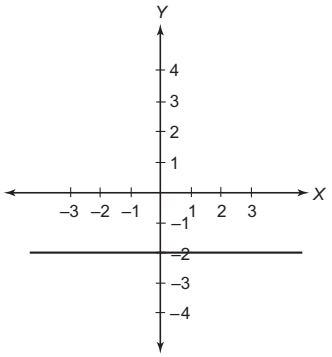
Con base en la gráfica, responde:

- ¿El punto (0,0) pertenece a la tabla de la función?
- ¿Cuál es la imagen de 4?
- ¿Cuál es la imagen de 1? ¿Y la de 3?
- ¿Es la imagen de 1 + 3 igual a la suma de las imágenes de 1 y de 3?

- ¿Qué puedes decir acerca de la siguiente igualdad: $f(1 + 3) = f(1) + f(3)$ donde f representa la función duplicadora?

b) $3y = -6$ entonces $y =$_____

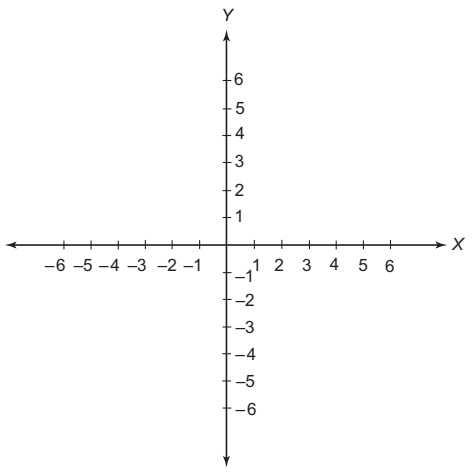
¿Cuál es el valor de y cuando $x = 0;$ $x = -1;$ $x = 0.5;$ $x = -1;$ $x = 2$



- Como ves, para cualquier valor de x el de y es el mismo.
- ¿Qué nombre recibe esta función?

c) $x - y = 6$ entonces y = _____

x			
y			



- ¿La representación gráfica de esta función pasa por (0,0)?
- ¿Cumple esta función las condiciones de una función lineal?

Compara tus respuestas con las de otro equipo; en caso de ser diferentes, espera a que el profesor(a) dé algunas de ellas y luego corrige si es necesario.

Con tu mismo equipo, haz la siguiente lectura.

GRÁFICA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

En un salón de clases hay 35 alumnos, considerando varones y mujeres, ¿cuántos varones y cuántas mujeres hay en el salón?

- Con esa información ¿puede responderse la pregunta?

- ¿Cómo se traduce, en una ecuación, el texto del problema?

$$x + y = 35$$

De aquí se considera que x es el número de varones, mientras que y es el número de mujeres y 35 el total de alumnos; al igualar a cero esta ecuación se tiene:

$$x + y - 35 = 0$$

En esta sesión se estudiará la forma gráfica de resolver este tipo de ecuaciones.
Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son conocidas como ***indeterminadas*** o ***lineales***, debido a que tienen una infinidad de soluciones y su gráfica es una línea recta, se representan mediante la forma general

$$ax + by + c = 0$$

Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son los siguientes:

a) $2x - 3y - 5 = 0,$ En esta ecuación $a = 2,\ b = -3$ y $c = -5$.

b) $8x + 1 = 0,$ en esta ecuación $a = 8,\ b = 0$ y $c = 1$, aquí se observa que:

$a = 0,$ debido a que no aparece el término by.

c) $-5y - 2 = 0,$ en esta ecuación $a = 0,\ b = -5,\ c = -2$, aquí se observa que $a = 0$, debido a que no aparece el término ax.

Las ecuaciones lineales tienen una infinidad de soluciones y esto se podrá apreciar en los siguientes ejemplos:

1. Graficar la ecuación $2x - y = 4$.

Este tipo de ecuación es de la forma $ax + by + c = 0,$ para graficarla se asignan dos valores a x y se obtienen los de y, ya que para graficar una recta únicamente se necesitan dos puntos.

La tabulación queda:

si $x = -1$, entonces:

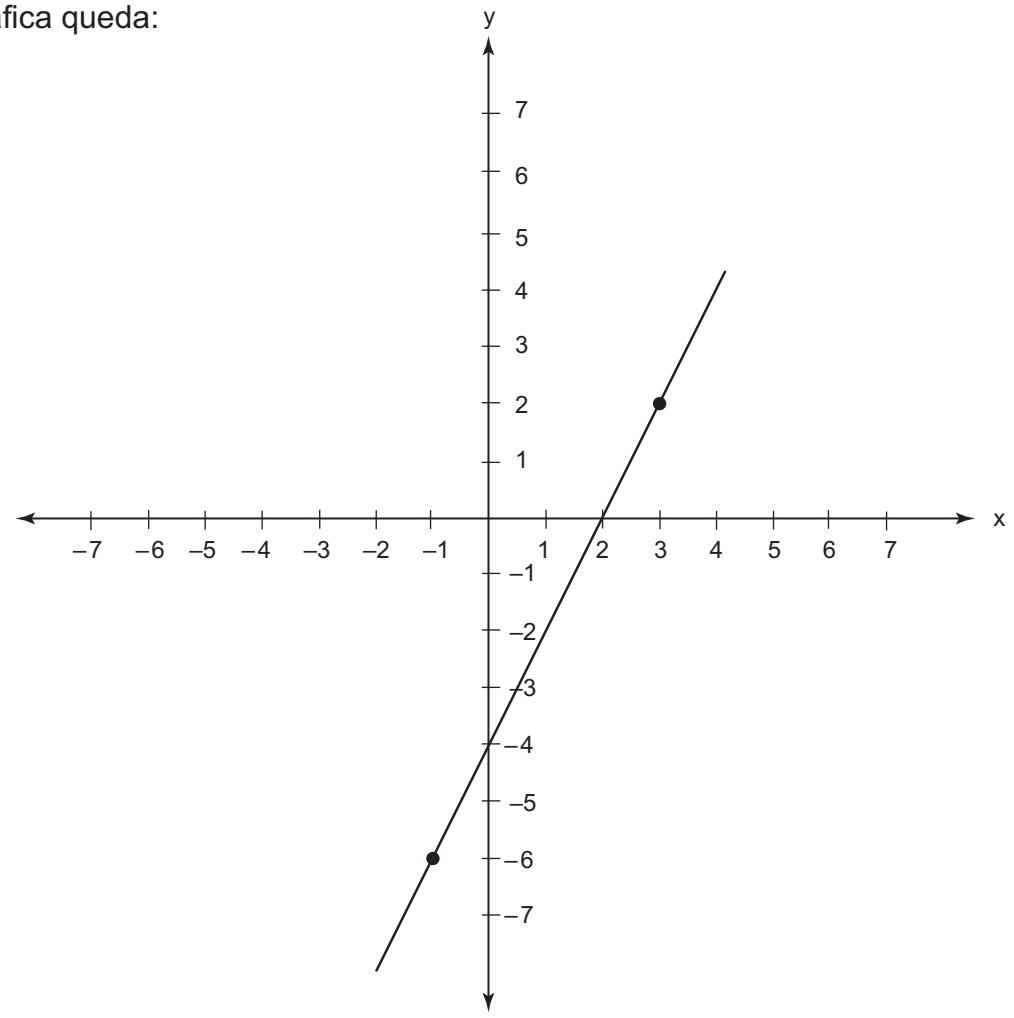
$$2(-1) - y = 4$$
$$-2 - y = 4$$
$$-2 - 4 = y$$
$$-6 = 4$$

si $x = 3$, entonces:

$$2(3) - y = 4$$
$$6 - y = 4$$
$$6 - 4 = y$$
$$2 = 4$$

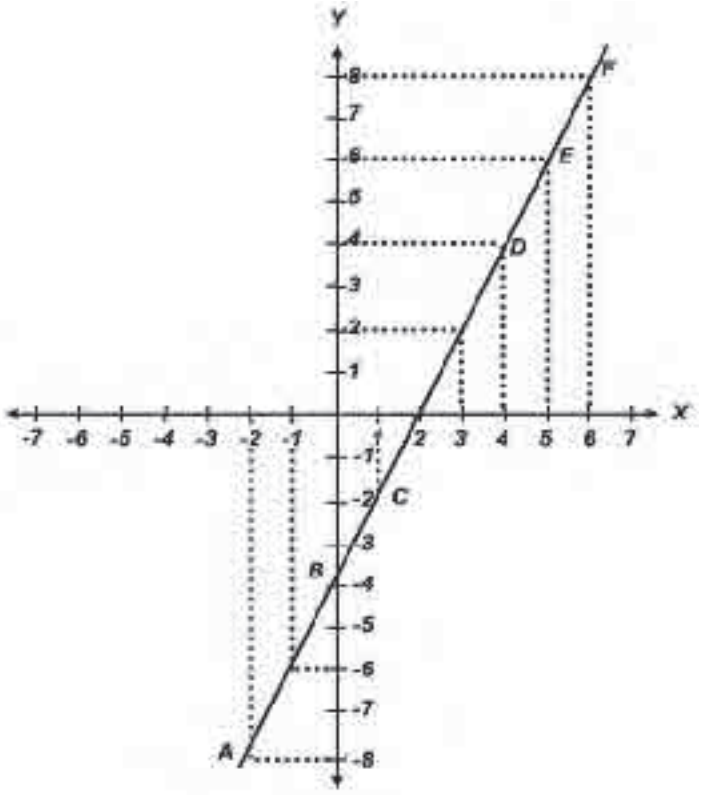
x	y	Puntos
–1	–6	(–1, –6)
3	2	(3,2)

La gráfica queda:



Debido a que las ecuaciones lineales tienen una infinidad de soluciones, algunas se pueden determinar ubicando puntos sobre la recta y obteniendo sus coordenadas; para facilitar el procedimiento se tomarán solamente valores enteros.

Al ubicar puntos sobre la recta se tiene la siguiente gráfica:



Las coordenadas de los puntos localizados en la gráfica son:

$A(-2, -8)$, $B(0, -4)$, $C(1,-2)$, $D(4,4)$, $E(5,6)$ y $F(6,8)$.

Si cualesquiera de estos puntos se sustituye en la ecuación $2x - y = 4$, se cumple la igualdad.

Si se toman los puntos C y F se tiene:

Si $C(1, -2)$, entonces:

$$\begin{aligned} 2(1) - (-2) &= 4 \\ 2 + 2 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Si $F(6,8)$, entonces:

$$\begin{aligned} 2(6) - (8) &= 4 \\ 12 - 8 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Con lo anterior se afirma que una ecuación lineal tiene una infinidad de soluciones que la satisfacen y éstas se representan mediante puntos en la recta.

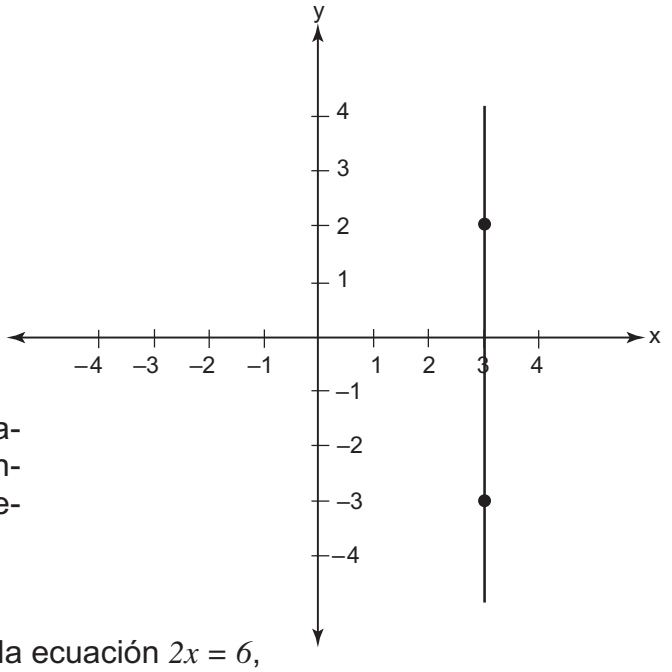
2. Graficar la ecuación $2x = 6$

Esta ecuación es de la forma $ax + c = 0$, debido a que no se tiene el término by, lo cual indica que $b = 0$, por lo que y puede tomar cualquier valor entero, ya que al multiplicarlo por cero es igual a 0.

Para graficarle se despeja la incógnita, x siempre tendrá el valor de 3, mientras que y tomará cualquier valor, por lo que la tabulación queda:

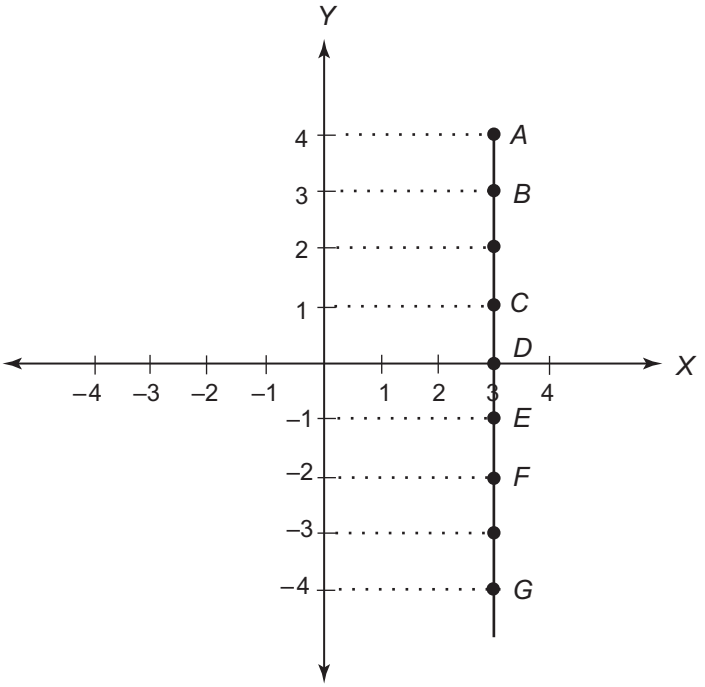
x	y	Puntos
3	–3	(3,–3)
3	2	(3,2)

La gráfica de la ecuación $2x = 6$, es:



Para obtener otras soluciones que satisfagan a la ecuación $2x = 6$, se trazan perpendiculares al eje de las ordenadas de manera que intersequen a la recta obtenida.

Por lo que otros puntos que satisfacen a la ecuación $2x = 6$, se tienen en la siguiente gráfica:



Las coordenadas de los puntos ubicados en la recta son:

A (3,4), B (3,3), C (3,1), D (3, 0) E (3, –1), F (3, –2) y G (3, –4).

Como ya se mencionó $b = 0$, por lo que al sustituir cualquier punto en la ecuación dada se tiene:

Si *E (3, –1)*, entonces:
$$2x = 6$$
$$2(3) = 6$$
$$6 = 6$$

Si *G (3, –4)*, entonces:
$$2x = 6$$
$$2(3) = 6$$
$$6 = 6$$

En la gráfica se observa que, cuando se tiene una ecuación de la forma $ax + c = 0$, la recta que se obtiene siempre será paralela al eje de las ordenadas.

Cuando se tienen ecuaciones de la forma $by + c = 0$, la recta que se obtiene de la gráfica será paralela al eje de las abscisas, en donde y tendrá el mismo valor, mientras que x tomará cualquier valor.

Una vez que se conoce la forma de graficar las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se está en posibilidad de resolver el problema que se planteó al inicio de la sesión.

De lo anterior se tiene que:

> Una ecuación de primer grado con dos incógnitas de la forma $ax + by + c = 0$ tiene una infinidad de soluciones.

Observa el video, en él se presenta información que complementa el tema.

Con tu equipo, contesta lo que se te pide a continuación:

¿Cuál es la forma general de la ecuación $2x – 3y = –2$?

¿Cuántos valores podemos asignar a x en la tabulación?

Una vez que se haya graficado la ecuación, ¿de qué forma se pueden determinar otros puntos que pertenecen a la recta y también cumplen con la igualdad?

En la ecuación $y = 5$, ¿qué valores toma x?

¿Cómo es la recta que se obtendrá al graficarla?

Lee tus respuestas ante el grupo, si hay desacuerdos discútanlos con la orientación del maestro(a).

En tu cuaderno, grafica las ecuaciones que se dan a continuación; posteriormente, obtén otras dos soluciones sobre la gráfica (toma como referencia los valores del eje de las abscisas).

a) $3x - y = -2$ *b)* $x - 2y = -4$ *c)* $3y = 9$

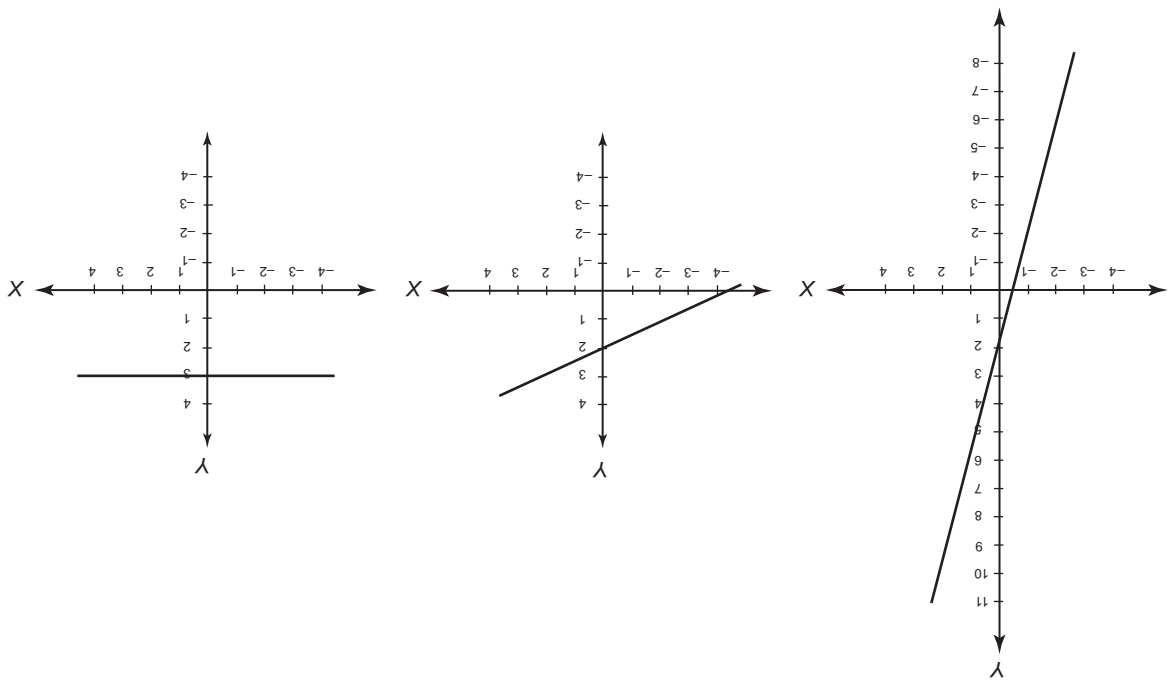
Intercambia tu cuaderno con otro compañero y compara los resultados; en caso de que sean diferentes, consulta la clave.

CLAVE

(−3, −7), (-2, − 4)
(−1, −1), (0, 2)
(1, − 5), (2, − 4)
(3, − 7).

(− 4, 0), (−2,1)
(0, 2), (2,3),
(4, 4)

(− 4, 3). (− 3, 3), (− 2, 3)
(−1, 3), (0, 3), (1, 3)
(2, 3), (3, 3), (4, 3)



a) $3x - y = -2$ b) $x - 2y = -4$ c) $3y = 9$

41

¡VOY A TRAZAR DOS RECTAS AL MISMO TIEMPO!

71 - 3

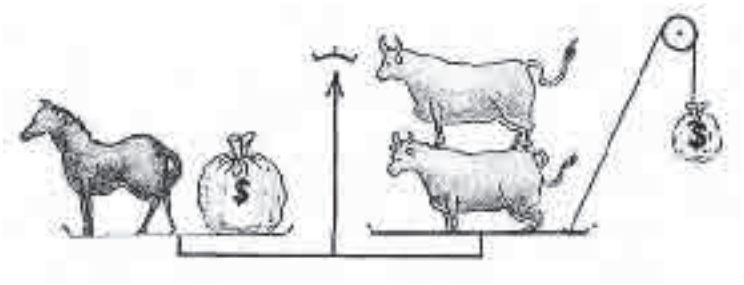
Sistema de ecuaciones
Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables utilizando el método gráfico

Vamos a iniciar esta sesión con un taller introductorio en el que los problemas propuestos conducen al planteamiento de ecuaciones con dos incógnitas.

Taller: **Del lenguaje natural a expresiones algebraicas.**

Forma un equipo de tres o cuatro integrantes y resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas:

1. *El caballo y las dos reses.*



Iván Camilo desea cancelarle una deuda a su compadre Diego. Para ello le ofrece un caballo o dos reses.

El precio de los tres animales está estimado en $2 400 000.

Si Iván Camilo entrega el caballo deberá aportar, además, $ 100 000; si le entrega las dos reses a Diego, éste deberá devolverle $500 000.

a) ¿Cuál es el precio del caballo y el del par de reses?
b) ¿A cuánto asciende la deuda?

¡Vamos a resolver el problema!

- Vuelve a leerlo.
- Llamemos C al precio del caballo y r al precio de cada res.
- Escribe la ecuación correspondiente al precio estimado de los tres animales:

$$C + 2r = _____ \ (1)$$

- Traduce mediante una ecuación el resto del texto del problema, el dibujo tal vez sea una pista.

  $C + 100\,000 = 2r - 500\,000$, reúne las incógnitas en el miembro izquierdo de la igualdad.

  $C - 2r = -600\,000 \qquad (2)$

  Ahora tienes las ecuaciones (1) y (2) que vamos a utilizar para responder las dos preguntas del problema:

  $C + 2r = 2\,400\,000 \quad (1)$
  $C - 2r = -\ 600\,000 \quad (2)$

  ¿Qué harías para eliminar una de las dos incógnitas?

- Suma miembro a miembro las dos ecuaciones pues los términos semejantes en r se cancelan.

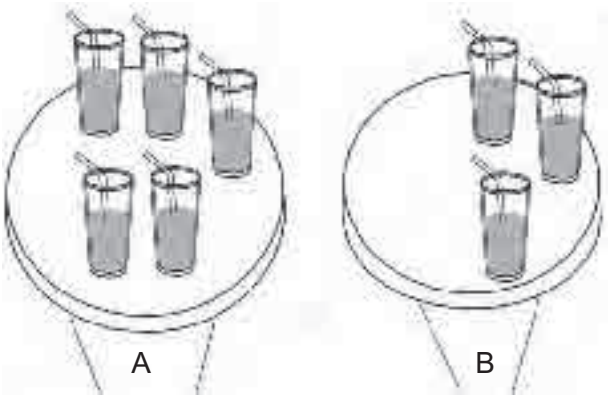
  $2C = 1\,800\,000$ de donde
  $C = 900\,000$

- Utiliza la ecuación (2) para hallar el valor del par de reses.

- Ahora puedes encontrar el valor de la deuda; ten en cuenta la igualdad, cuyos miembros son expresiones de ella.

  $C + 100\,000 = 2r - 500\,000$

2. *Los refrescos del mediodía.*



En la mesa A se sirvieron 3 jugos de frutas y 2 limonadas y se pagaron $13 500.

En la mesa B se sirvieron 2 jugos y una limonada, la cuenta fue de $8 500.

¿Cuál es el valor de un jugo y el de una limonada?

Haz algunos tanteos sucesivos, antes de proceder con lápiz y papel.

- Escribe la ecuación para la mesa A:

- Escribe la ecuación para la mesa B:

- Encuentra una forma de eliminar una de las dos incógnitas, quizás te sirva multiplicar la de la mesa B por –2.

$$\begin{array}{ll} (a)\ 3j + 2l = 13\,500 & 3j + 2l = 13\,500 \\ (b)\ 2j + 1l = 8\,500 & \underline{-4j - 2l = 17\,000} \\ & -j = -3\,500 \end{array}$$

- Continúa y responde las preguntas.

Como ves, el planteamiento de dos ecuaciones con dos variables es una estrategia muy fácil para resolver cierto tipo de problemas. Para solucionar las ecuaciones que genera la traducción del texto del problema existen diferentes caminos. De eso se trata en esta sesión y en las que vienen a continuación.

Mira el video y toma apuntes de aquellos aspectos que posteriormente necesiten ser ampliados y comentados.

Intégrate a un equipo y haz la lectura del siguiente texto.

SISTEMA DE ECUACIONES

Hay muchos problemas que, para resolverse, necesitan un planteamiento de dos ecuaciones cuyas incógnitas tienen una estrecha relación.

Obsérvese el problema siguiente:

En la compra de un cuaderno y un lapicero se pagan $8 000, ¿cuál es el precio de cada artículo, si la diferencia de ambos es de $2 000?

Seguramente puedes dar, en este caso, una respuesta inmediata.

Datos	***Incógnitas***
Cuaderno $= x$	Precio del cuaderno
Lapicero $= y$	Precio del lapicero

Ecuaciones

$x + y = 8\,000$ (1)
$x - y = 2\,000$ (2)

Estas dos ecuaciones son las que representan la situación del problema. La ecuación (1) y la ecuación (2) forman un sistema de ecuaciones de primer grado.

Si aplicas el procedimiento utilizado en el taller introductorio puedes encontrar mentalmente, sin necesidad de escribir, la solución al sistema de ecuaciones.

Existen varios métodos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones, uno de ellos es el ***método gráfico***.

Analiza cómo se resuelve el sistema de ecuaciones que representan la situación del problema, por método gráfico.

$$x + y = 8\,000$$
$$x - y = 2\,000$$

Despejando a y de la ecuación (1) y de la ecuación (2), se tiene:

$$y = 8\,000 - x$$

$$-y = 2\,000 - x$$

$$y = -2\,000 + x$$

$$y = x - 2\,000$$

Para efectos de tabulación y de gráfica vamos a adoptar una escala de 1:1000, es decir cada valor de las parejas representa unidades de mil y cada punto de las rectas en el gráfico también representa miles.

Tabulando estas dos expresiones con $x = 1\,000, 2\,000, 3\,000, 4\,000$ se obtiene

Tabulación de la ecuación (1)

$y = x - 2\,000$

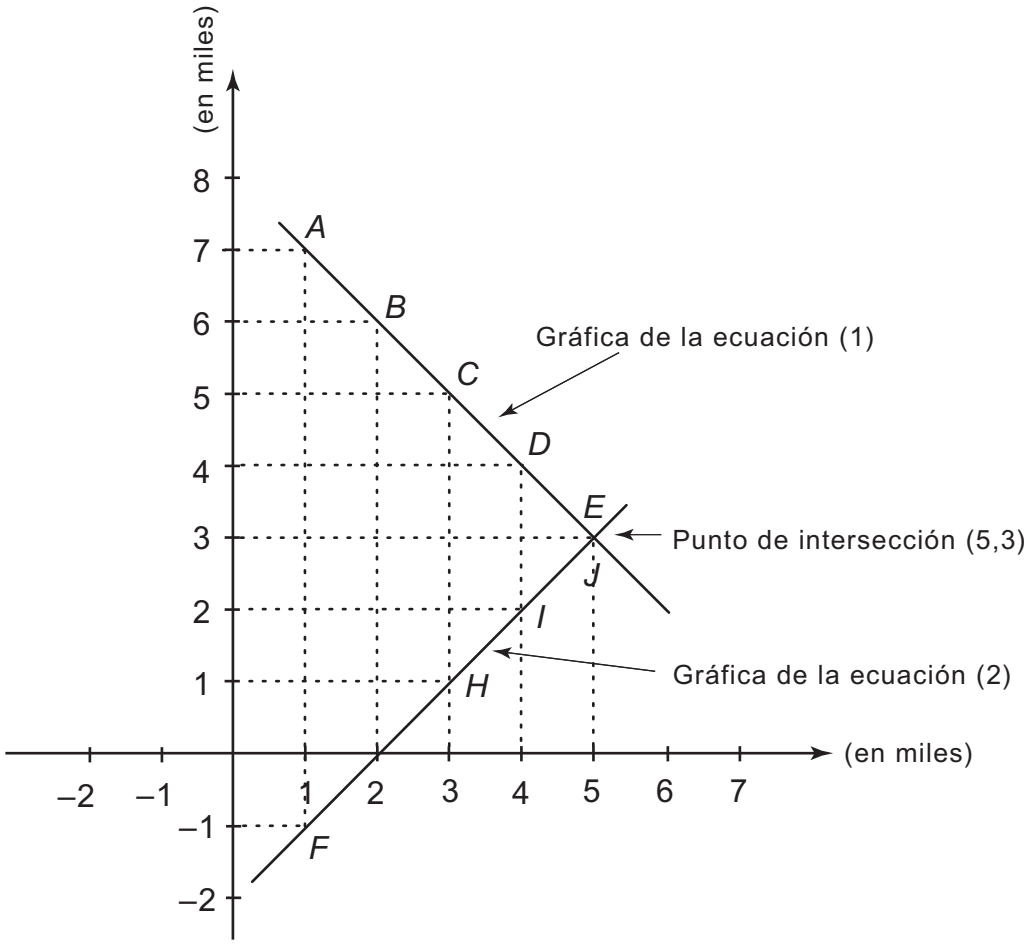
x	y	Puntos
1	7	A (1, 7)
2	6	B (2, 6)
3	5	C (3, 5)
4	4	D (4, 4)
5	3	E (5, 3)

Tabulación de la ecuación (2)

$y = x - 2\,000$

x	y	Puntos
1	–1	F (1, 1)
2	0	G (2, 0)
3	1	H (3, 1)
4	2	I (4, 2)
5	3	J (5, 3)

Localizando los puntos $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ y J en un sistema de coordenadas cartesianas, se tiene:



Obsérvese que las gráficas de las ecuaciones se cortan en un lugar que, en cada una, corresponde a los puntos E y J; por lo tanto, las coordenadas de dicho punto son $x = 5;$ y $y = 3.$

Como 5 y 3 representan miles, entonces la solución al problema es $x = 5\,000$; $y = 3\,000.$

En el sistema que representa la situación del problema, se sustituyen las dos variables por los valores hallados.

Para la ecuación (1)	***Para la ecuación (2)***
$x + y = 8\,000$	$x - y = 2\,000$
$5\,000 + 3\,000 = 8\,000$	$5\,000 - 3\,000 = 2\,000$
$8\,000 = 8\,000$	$2\,000 = 2\,000$

De acuerdo con lo anterior, el precio de cada artículo es:

Cuaderno = \$5 000
Lapicero = \$3 000

De esta forma, se dice que el sistema es compatible o consistente, cuando en las gráficas se cortan las rectas en un punto de intersección.

Concluyendo, puede decirse que el **método gráfico** consiste en trazar la gráfica que corresponde a cada ecuación, aplicando el método anteriormente descrito, y determinar el punto en que se cortan dichas gráficas. Por su construcción, el punto pertenece simultáneamente a las dos rectas trazadas.

Con tu equipo contesta oralmente las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo es la gráfica de una ecuación de primer grado?

2. ¿Cuándo se dice que un sistema es compatible o consistente?

3. ¿Cuál es el primer paso del procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones?

Plantea un sistema de ecuaciones que represente la situación del problema y resuelve por el método gráfico.

1. Un joven compró 2 pinceles y 1 lápiz, pagó por ello $5 000. Otro joven adquirió 1 pincel y 3 lápices. Le cobraron un total de $5 000.

   ¿Cuál era el precio de cada pincel y el de cada lápiz, si los objetos eran idénticos?

2. Resuelve gráficamente el sistema de ecuaciones que generó el problema: ***Los refrescos del mediodía.***

En forma individual, resuelve por el método gráfico el problema siguiente, planteando un sistema de ecuaciones que represente la situación del problema.

Juan compró 2 libretas y 1 borrador, pagó por ello $10 000 y Luis compró 1 libreta y 1 borrador iguales a los de Juan, en $6 000.

¿Cuánto cuesta cada libreta y cada borrador?

CLAVE

Costo de la libreta $4 000 y del borrador $2 000.

42

BUSCANDO UNA EN OTRA

72 - 3

Método de sustitución
Resolver problemas de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

En esta sesión aprenderás un nuevo método, igualmente sencillo, para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Volvamos al problema ***Los refrescos del mediodía*** y busca en el procedimiento para resolverlo, las dos ecuaciones provenientes de la traducción del texto de dicho problema. Veamos:

$$(A)\ 3j + 2l = 13\,500$$
$$(B)\ 2j + l = 8\,500$$

Despeja en (B) la variable l

$$l = 8\,500 - 2j$$

Reemplaza o sustituye en (A) el valor encontrado para l.

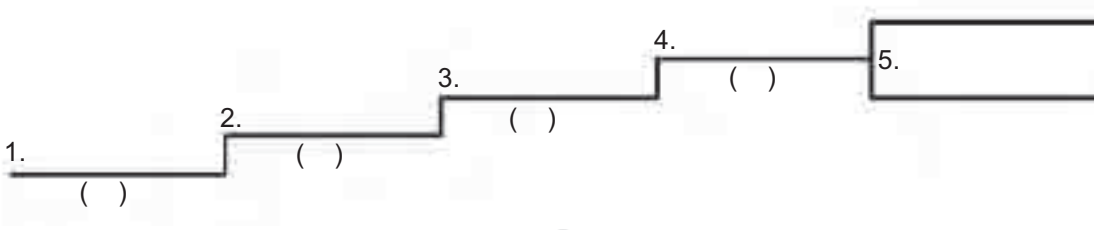
$$\begin{aligned} 3j + 2(8\,500 - 2j) &= 13\,500 \\ 3j + 17\,000 - 4j &= 13\,500 \\ 3j - 4j &= 13\,500 - 17\,000 \\ -j &= -3\,500 \\ j &= 3\,500, \end{aligned}$$

lo que sigue ya lo sabes.

¿Cómo te parece este método? Vas a apropiarte de él.

Observa el video y escribe en tu cuaderno aquello que requiera una posterior aclaración.

Una vez hayas visto el video, anota en el paréntesis la letra correspondiente a cada paso, hazlo en tu cuaderno.



A. Sustituir la variable despejada en la otra ecuación.

B. Comprobar los valores encontrados en las dos ecuaciones.

C. Resolver la ecuación resultante al encontrar el valor de una variable.

D. Despejar una variable en función de la otra, en una ecuación.

E. Sustituir el valor de esa variable en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Forma una pareja con otro compañero(a) y lee el texto que sigue.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Un sistema de ecuaciones llamado ***ecuaciones simultáneas*** es la agrupación de una serie de ecuaciones con dos o más incógnitas. Para resolver los sistemas de dos incógnitas se utilizan principalmente tres métodos algebraicos, además del método gráfico que se vio anteriormente. El método de sustitución que se tratará en este capítulo es rápido y exacto.

1. Pedro y Armando empacan fruta en cajas. Las cajas de pera deben pesar 25 kg y las de manzana 40 kg; al terminar su turno han empacado entre los dos un total de 25 cajas con un peso de 790 kg. ¿Cuántas cajas de pera empacaron y cuántas de manzana?

A. Se simbolizan las incógnitas	B. Se traducen los datos.
X = caja de pera (25 kg) Y = caja de manzana (40 kg)	25x + 40y = 790 peso de cada caja y peso total x + y = 25 cajas empacadas
C. Se soluciona el problema: Despejar una variable x + y = 25 x = 25 – y Sustituir la variable despejada 25x + 40y = 790 25 (25 – y) = 790 Resolver la ecuación resultante 25(25 – y) + 40y = 790 625 – 25y + 40y = 790 15y = 790 – 625 $y = \frac{165}{15}$ y = 11	Sustituir el valor hallado en (A): x = 25 – y x = 25 – 11 x = 14 Comprobar los valores en ambas ecuaciones: 25x + 40y = 790 y = 11 x = 790 x + y = 30 25(14) + 40(11) = 790 18 + 12 = 30 350 + 440 = 790 30 = 30 790 = 790 Empacaron 14 cajas de pera y 11 cajas de manzana.

El procedimiento general consiste en:

1. Despejar una variable en función de la otra, en alguna de las dos ecuaciones.

2. Sustituir la variable despejada en la otra ecuación.

3. Resolver la ecuación resultante, y encontrar el valor de una variable.

4. Sustituir el valor hallado en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema, para encontrar el valor de la otra variable.

5. Comprobar en ambas ecuaciones los valores encontrados.

Compara el ejercicio propuesto después del video con la información que acabas de leer.

Ejemplos: Haz estos ejercicios en tu cuaderno y vuelves a la lectura para comparar tu procedimiento con el que aquí se sigue.

1. 12x + 15y = 525 ..... (1)
x + y = 40 ..... (2)

Despejar una variable:

$$x + y = 40 \ldots\ldots (2)$$
$$x = 40 - y$$

Sustituir la variable despejada

$$12x + 15y = 525 \ldots\ldots (1)$$
$$12(40 - y) + 15y = 525$$

Resolver la ecuación resultante:

$$12(40 - y) + 15y = 525$$
$$480 - 12y + 15y = 525$$
$$3y = 525 - 480$$
$$3y = 45$$
$$y = \frac{45}{3}$$
$$y = 15$$

Sustituir el valor hallado

$$x + y = 40 \ldots\ldots (2)$$
$$x + 15 = 40$$
$$x = 40 - 15$$
$$x = 25$$

Comprobar los valores en las ecuaciones:

$$12x + 15y = 525 \ldots (1) \qquad x + y = 40 \ldots (2)$$
$$12(25) + 15(15) = 525 \qquad 25 + 15 = 40$$
$$300 + 225 = 525 \qquad 40 = 40$$
$$525 = 525$$

Integra un equipo de trabajo, según lo indique el profesor(a) y resuelve el siguiente problema:

1. *La vendedora de pollos.*

María vende pollos en el mercado. Los pollos pequeños los vende a $12 000 y los más grandes a $20 000. Al finalizar el día había vendido un total de 9 pollos y recaudó $140 000. ¿Cuántos pollos de cada tamaño vendió?

2. ¿Qué es resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas?

Resuelve el sistema

$2x - 5y = 12 \quad (a)$

$3x + 4y = -5 \quad (b)$

- De la ecuación (a) despeja y; igualmente puedes escoger la ecuación (b).

  $y = \dfrac{2x - 12}{5}$ es una ecuación equivalente a la ecuación (a)

- Reemplaza y por $\dfrac{2x - 12}{5}$ en la ecuación (b), obtienes:

  $3x + 4\left(\dfrac{2x - 12}{5}\right) = -5$ ¡Continúa!

Resolver ese sistema es hallar todas las parejas (x, y) que verifican simultáneamente las ecuaciones (a) y (b).

Es encontrar todas las soluciones comunes a las ecuaciones (a) y (b).

Resuelve en pareja los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas.

① $\begin{cases} 2x = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 0 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 3y + 12 = 0 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 3y + 2x - 8 = 0 \\ y - x + 9 = 0 \end{cases}$

Compara tus respuestas con las de otra pareja. Si surgen dudas, coméntalas con el profesor(a).

Resuelve y comprueba, individualmente, los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 5x - 2y = 13 \; ecuación\,(A) \\ x + 3y = 6 \; ecuación\,(B) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10m - 5n = 10 \; ecuación\,(C) \\ 3m - \frac{1}{2}n = -9 \; ecuación\,(D) \end{cases}$

Compara tus respuestas con las de la clave; si te equivocaste, corrige tus errores.

CLAVE

1. $x = 3$; $y = 1$; 2. $m = -5$; $n = -12$

Comprobación

1. a) $5(3) - 2(1) = 15 - 2$
$= 13$

b) $3 + 3(1) = 3 + 3 = 6$

2. c) $10(-5) - 5(-12) = -50 + 60$
$= 10$

d) $3(-5) - \frac{1}{2}(-12) = -15 + 6 = -9$

43 SOMOS EQUIVALENTES

73 - 3

Método de igualación I
Conocimiento del método de igualación

El método de igualación es un caso particular del método de sustitución estudiado en la sesión anterior, que se aplicará cuando en ambas ecuaciones esté despejada una de las incógnitas; esto significa que las expresiones obtenidas son equivalentes.

Forma una pareja de trabajo, y observa el video. Comenta con tu compañero(a) en qué consiste el método de igualación.

Antes de la lectura realiza individualmente el despeje de x en las siguientes ecuaciones:

1. $3x + 6y = -6$ 2. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{8}$

Compara tus resultados con los de tus compañeros(as); si hay errores, corrige.

Lee junto con tu compañero(a) el texto y comenta lo esencial de este método y su diferencia con los otros.

MÉTODO DE IGUALACIÓN I

Ahora vamos a analizar la solución de ecuaciones simultáneas por el método de igualación.

Para conocer este método considérese el siguiente ejemplo:

$x + y = 15$ ecuación (1)

$x - 2y = 3$ ecuación (2)

En primer lugar, se procede a despejar x en la ecuación (1)

$$x + y = 15$$

Para despejar x, se elimina y en el primer miembro, sumando $(-y)$ en ambos miembros:

$$x + y - y = 15 - y$$

se realizan operaciones y se obtiene:

$$x = 15 - y \qquad \text{ecuación (A)}$$

Una vez despejada x en la primera ecuación, se procede a despejar la misma incógnita en la ecuación (2)

$$x - 2y = 3$$

Para despejar x, se elimina $-2y$ del primer miembro, sumando $2y$ en ambos miembros:

$$x - 2y + 2y = 3 + 2y$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$x = 3 + 2y \qquad \text{ecuación (B)}$$

Ahora se igualan (A) y (B) para obtener una tercera ecuación, que será:

$$3 + 2y = 15 - y \qquad \text{ecuación (3)}$$

Para eliminar el término independiente del primer miembro de la igualdad, se suma (–3) en los dos miembros:

$$3 - 3 + 2y = 15 - 3 - y$$

De lo cual resulta:

$$2y = 12 - y$$

Se agrupan las y en el primer miembro, al sumar y en ambos miembros de la igualdad:

$$2y + y = 12 - y + y$$

Reduciendo términos semejantes, se tiene:

$$3y = 12$$

Se divide a los dos miembros de la ecuación entre 3, para despejar y:

$$\frac{3y}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\boxed{y = 4}$$

Se sustituye y por su valor en la ecuación (A) ya despejada, y se obtiene:

$$x = 15 - 4$$

$$\boxed{x = 11}$$

Y, al comprobar el resultado en el sistema de ecuaciones propuesto, se tiene:

$$x + y = 15 \text{ ..... } (1)$$

$$x - 2y = 3 \text{ ..... } (2)$$

$$(1)\ 11 + 4 = 15 \qquad (2)\ 11 - 2(4) = 3$$

$$15 = 15 \qquad 11 - 8 = 3$$

$$3 = 3$$

Al confirmar que con estos valores se cumplen las dos igualdades, se puede decir que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$x = 11 \qquad y = 4$$

O, lo que es lo mismo, la pareja (11, 4).

Considérense los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado, con el objeto de identificar plenamente el resultado por medio del método de igualación:

$2x - 3y = 12$ ecuación (1)

$3x - 4y = -8$ ecuación (2)

Se despeja x en la primera ecuación:

$$2x - 3y = 12$$

$$x = -6 + \frac{3}{2}y \quad \text{ecuación (A)}$$

Se despeja x en la segunda ecuación:

$$3x - 4y = -8$$

$$x = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \quad \text{ecuación (B)}$$

Igualando (A) y (B) se obtendrá:

$$6+\frac{3}{2}y=-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}y$$

Eliminar el término independiente del primer miembro, sumando (–6) en ambos miembros:

$$6-6+\frac{3}{2}y=-6-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}y$$

De lo cual resulta:

$$\frac{3}{2}y=-\frac{26}{3}+\frac{4}{3}y$$

Se agrupa y en el primer miembro al sumar $(-\frac{4}{3}y)$ en los dos miembros y reduciendo términos semejantes:

$$\frac{3}{2}y-\frac{4}{3}y=-\frac{26}{3}+\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}y$$

$$\frac{1}{6}y=-\frac{26}{3}$$

Se elimina el denominador 6, multiplicando los dos miembros por 6:

$$6\,(\frac{1}{6}y)=(-\frac{26}{3})\,6$$

Con lo que se obtiene:

$$\boxed{y=-52}$$

Al sustituir y por su valor en la ecuación (1) se obtendrá:

$$2x-3y=12$$

$$2x - 3(-52) = 12$$

$$2x + 156 = 12$$

$$2x = 12 - 156$$

$$y = -\frac{144}{2}$$

$$\boxed{x = -72}$$

Se comprueba el sistema de ecuaciones propuesto:

$$2x - 3y = 12 \text{ ..... } (1)$$

$$3x - 4y = -8 \text{ ..... } (2)$$

(1) $2(-72) - 3(-52) = 2$

$144 + 156 = 12$

$12 = 12$

(2) $3(-72) - 4(-52) = 8$

$-216 + 208 = -8$

$-8 = -8$

Como se observa, se han cumplido las igualdades en cada ecuación y queda comprobado que la solución del sistema es $x = -72$ y $y = -52$.

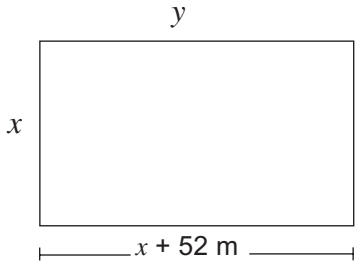
El método de igualación es otra forma de resolver un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.

Forma un equipo de tres integrantes y resuelve, utilizando los métodos de igualación y sustitución, los siguientes problemas.

1. *Los rectángulos*

a) un rectángulo tiene 392 m de perímetro. El lado más largo tiene 52 m más que el corto.

¿Cuáles son las dimensiones de este rectángulo?



Pistas:

- Escribe la ecuación que dé cuenta del perímetro.

- Escribe la ecuación que exprese la relación entre el largo y el ancho del rectángulo.

- ¡Al ataque con la solución!

b) El perímetro de un rectángulo mide 220 m. El ancho mide 100 m menos que el largo.

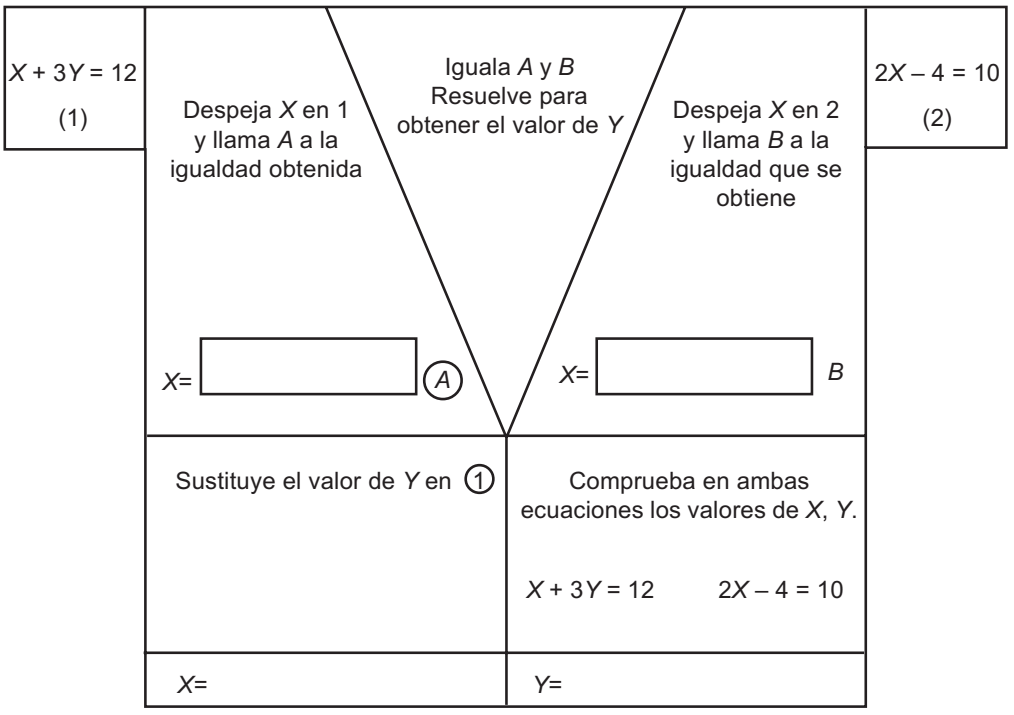
¿Cuál es el área del rectángulo?

2. *Los premios de los gemelos.*

Gustavo y Antonio se ganaron en la fiesta de su pueblo, Sincerín, el primero un sombrero y el segundo un pantalón. El precio de las dos prendas asciende a $45 000. Si el sombrero costó $10 000 menos que el pantalón, ¿cuál es el precio de cada prenda de vestir?

3. *La Camisa Geométrica.* Hazla en tu cuaderno.

En cada parte de la siguiente figura geométrica aparece uno de los pasos que se siguen para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas, por el método de igualación; resuélvelo según las indicaciones.



Compara tus resultados con los de otro equipo. Si existen discrepancias, pregunta al profesor(a).

Resuelve y comprueba individualmente, por el método de igualación, los sistemas de ecuaciones siguientes:

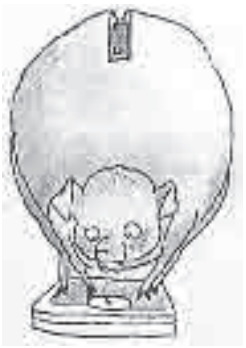
1. $3x + 5y = 7$ ecuación (1)

   $2x - y = -4$ ecuación (2)

2. $3x - y = 1$

   $6x - 3y = -3$

3. *La Alcancía*



En la alcancía de Hermes hay 58 monedas, unas de $200 y otras de $500 para un monto total de $20 900. ¿Cuántas monedas son de $200 y cuántas de $500?

Compara tus resultados con los de la clave que aparece a continuación:

CLAVE

1. $x = -1$ $\quad y = 2$

2. $x = 2$ $\quad y = 5$

3. *Monedas de $200 hay 27*

   Monedas de $500 hay 31

44

74 - 3

LA UNIÓN DA LA SOLUCIÓN

Método de igualación II
Aplicación del método de igualación

En la sesión anterior aprendiste cuál es el método de igualación y cómo se realiza: al despejar la misma variable en ambas ecuaciones y luego igualándolas se encontraba el valor de una incógnita y, al sustituir ese valor, se hallaba la solución del sistema.

Con tu equipo y con cuaderno y lápiz a la mano haz la siguiente lectura. Resuelve los ejercicios propuestos en ella. ¡Hacer es aprender!

MÉTODO DE IGUALACIÓN II

El método de igualación es otra de las formas empleadas para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.

Este método trabaja paralelamente con las dos ecuaciones; el procedimiento general consiste en:

1. Despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita.
2. Igualar los segundos miembros y hallar el valor de una incógnita.
3. Sustituir este valor en alguna de las ecuaciones para hallar el valor de la otra incógnita.
4. Comprobar los valores encontrados en las dos ecuaciones.

Obsérvese cómo se soluciona el siguiente problema, por medio del método de igualación.

1. Isidro y Juan sembraron maíz en parcelas contiguas; si juntas miden 860 m^2 de área, y la de Isidro mide 120 m^2 más que la de Juan, ¿cuál es el área de cada parcela?

Se simbolizan las incógnitas con variables:

x = área parcela de Isidro $\qquad$ y = área parcela de Juan

Planteando el problema por medio de un sistema de ecuaciones se tiene:

$$x + y = 860$$

$$x = y + 120$$

Si se despeja en ambas ecuaciones la misma incógnita, se tendrá:

$$x = 860 - y \qquad\qquad x = y + 120$$

Como el primer miembro en ambas ecuaciones es el mismo (x), se igualan los segundos miembros y se halla el valor de una incógnita.

$$x = 860 - y \qquad\qquad x = y + 120$$

$$860 - y = y + 120$$
$$740 = 2y$$
$$y = 370$$

Al sustituir el valor de y en alguna de las dos ecuaciones se encuentra el valor de la otra incógnita.

$$x = y + 120$$
$$x = 370 + 120$$
$$x = 490$$

Por tanto, la parcela de Isidro mide 490 m^2 y la de Juan 370 m^2.

Al comprobar los valores encontrados en las dos ecuaciones, se tiene:

$$x + y = 860 \qquad x = y + 120$$
$$490 + 370 = 860 \qquad 490 = 370 + 120$$
$$860 = 860 \qquad 490 = 490$$

2. Resolver y comprobar el sistema:

$\frac{x}{5} = \frac{y}{4}$ ..... (A) que también se puede representar $\frac{1}{5}y = \frac{1}{4}y$

$\frac{y}{3} = \frac{x}{3} - 1$ ..... (B) que también se puede representar $\frac{1}{3}y = \frac{1}{3}x - 1$

En este sistema de ecuaciones los coeficientes son fracciones.

Para despejar y, se multiplica cada ecuación por el inverso del coeficiente respectivo:

$$4(\frac{1}{5})x = (\frac{1}{4})(4)y \qquad 3(\frac{1}{3})y = (\frac{1}{3}x - 1)3$$

$$\boxed{y = \frac{4}{5}x} \qquad y = \frac{3}{3}x - 3 \qquad \text{es decir,} \qquad \boxed{y = x - 3}$$

Igualando los segundos miembros hallaremos el valor de la incógnita.

$$\frac{4}{5}x = x - 3$$

Despejando x:

$$3 = x - \frac{4}{5}x \qquad (4)(3) = 5(\frac{1}{5})x$$

$$3 = (\frac{5}{5} - \frac{4}{5})x \qquad \boxed{x = 15}$$

$$3 = \frac{1}{5}x$$

Se sustituye el valor de x en alguna ecuación y se halla el valor de la otra variable:

$$y = x - 3$$

$$y = 15 - 3 \qquad \boxed{y = 12}$$

Comprueba en cada ecuación los valores encontrados.

Observa con atención el video y comenta con tus compañeros(as) lo que consideres más importante.

Con tu equipo de trabajo analiza las tareas realizadas por Cecilia y Virginia.

1. *La tarea de Cecilia*

Para resolver el sistema $x + y = 10$ *(1)*

$5x + 2y = 32$ *(2)*

Cecilia hizo lo siguiente:

De la ecuación (2), $3x + 2x + 2y = 32$ ¿por qué?

$3x + (x + y) = 32$ ¿por qué?

Por la ecuación (1), $3x + 20 = 32$ ¿por qué?

$$x = \frac{32 - 20}{3} = 4$$

Reemplazando en (1) $4 + y = 10$

$$y = 10 - 4 = 6$$

La pareja ordenada que satisface el sistema es (4, 6).

¿Es correcto el método que siguió Cecilia?

2. *La tarea de Virginia*

Para resolver el sistema $3x - 2y = 7 \quad (1)$

$$4x - 3y = 5 \quad (2)$$

Virginia utilizó el método de sustitución y procedió así:

De la ecuación (1) $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ ¿qué hizo?

$$3x - 2\left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\right) = 7$$

$$3x - 3x + 7 = 7$$

Reemplazó en (1)

$$0 = 0$$

$$\vdots ??$$

¡Ayuda a Virginia a reorientar la búsqueda de la solución!

Forma un equipo de trabajo y resuelve los problemas siguientes, realizando las operaciones en tu cuaderno.

1. Pedro fue a la ferretería y compró $13\frac{1}{2}$ m de manguera y 8 focos, y pagó por todo $63 600. Por su parte, Javier adquirió $5\frac{1}{4}$ m de manguera pagando por esto $21 000. ¿Cuál era el precio de cada metro de manguera y de cada foco, si ambos jóvenes llevaron objetos similares?

   - Simboliza las incógnitas con las variables.
   - Plantea el problema con un sistema de ecuaciones.
   - Convierte la fracción en decimales para facilitar el despeje.

2. Un trapecio tiene una altura de 11 cm y su área es de 165 cm^2. Calcula la longitud de sus bases, sabiendo que la base mayor tiene 4 cm más que la menor.

   Pista: Recuerda la fórmula para el área de un trapecio.

   Compara tus resultados con los de otro equipo: ¿no coinciden?, rectifica tu procedimiento o pregunta al profesor(a).

Resuelve individualmente:

1. El siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{8}=0 \quad (A) \qquad \frac{1}{7}x-\frac{3}{4}y=7 \quad (B)$$

   Despeja x en las ecuaciones *A* y *B*

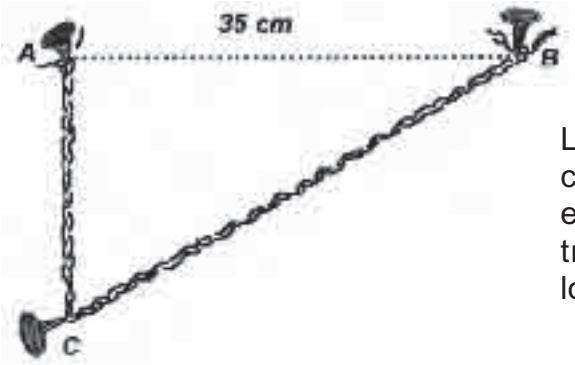
   Iguala los segundos miembros y halla el valor de y.

   Sustituye este valor de y en alguna ecuación y encuentra el valor de x.

   Comprueba los valores de las incógnitas en ambas ecuaciones.

2. El problema de la pita por sustitución.

   Una pita de 49 cm de largo se fija a tres clavos como lo indica el dibujo.



Los clavos *A* y *B* están separados 35 cm y el clavo *C* se colocó para tensionar la pita y formar en *A* un ángulo recto. Así se tiene que el triángulo *ABC* es rectángulo. Calcula las longitudes *AC* y *BC*.

Pista: Utiliza la propiedad de Pitágoras. Además tú sabes que:

$$y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$$

Coteja tus resultados con la clave y discute con tus compañeros(as) el procedimiento seguido. Si surgen dudas, pregunta a tu profesor(a).

CLAVE

1. $x = 7$ $\quad y = -8$
2. $AC = 12\ cm$ $\quad BC = 37\ cm$

45

75 - 3

¡ELIMÍNALA!

Método de reducción I
Resolución de un sistema de ecuaciones por el método de reducción

Para resolver un problema puedes seguir varios caminos que te lleven al mismo resultado. En esta sesión resolverás ecuaciones simultáneas por el método de reducción.

En el taller introductorio ya utilizaste la eliminación.

Observa el video, en él verás cuáles son los pasos del método de reducción. Comenta en tu grupo en qué consiste ese método.

Con tu equipo haz la siguiente lectura pero antes de seguir hacia la solución, resuelve los ejemplos propuestos. Leyendo no se aprende matemáticas, es indispensable hacer.

MÉTODO DE REDUCCIÓN I

Para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones existen varios métodos; uno de ellos es el llamado de reducción o eliminación por suma y resta, ya que consiste en eliminar una de las literales sumando o restando los miembros de las dos igualdades.

Obsérvense los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

$$x + 2y = 10$$
$$-x + y = -1$$

Se observa en el sistema anterior que las x son simétricas, por lo cual es posible sumar ambas ecuaciones y eliminar dicha literal.

$$\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ -x + y = -1 \\ \hline 0 + 3y = 9 \\ y = 9 \end{array}$$

dividiendo por 3 ambos miembros

Sustituyendo el valor de y en una de las ecuaciones se puede obtener el valor de x.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x + 2(3) &= 10 \\ x + 6 &= 10 \\ x + 6 - 6 &= 10 - 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 4}$$

Y se comprueba sustituyendo ambos valores en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -x + y &= -1 \\ -4 + 3 &= -1 \\ 1 &= -1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{2}{3}x + 3y = 10$$
$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = -3$$

$$3\frac{1}{2}y = 7$$

Como $3\frac{1}{2} = 3.5$ entonces, es posible convertir la fracción común en una ***fracción decimal finita,*** se convierte, ya que resulta más fácil realizar las operaciones de esta forma. En cambio, si la fracción decimal resulta infinita, se trabaja con la fracción común.

Entonces: $3.5y = 7$

$$\frac{3.5y}{3.5} = \frac{7}{3.5}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Ese valor se sustituye en una de las ecuaciones para encontrar el valor de x.

Encuéntralo y comprueba en la otra ecuación sustituyendo por los valores encontrados.

En los ejemplos anteriores se emplearon los siguientes pasos del método de reducción:

1. Eliminar una de las dos incógnitas por medio de la suma o resta de las ecuaciones.
2. Sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones.
3. Comprobar los resultados en la otra ecuación.

Reúnete en equipo y realiza los siguientes ejercicios de acuerdo con el sistema de ecuaciones siguiente:

1. $3x + 2y = 34$
   $x + 2y = 18$

   ¿Qué coeficientes tienen las x?

   ¿Qué coeficientes tienen las y?

   ¿Cuál será más fácil eliminar? ¿Por qué?

   ¿Qué se debe hacer para que las y sean simétricas?

   Encuentra la pareja (x, y) que satisface al sistema de ecuaciones.

2. $3x + 2y = 2$
$x - 2y = 6$

Formúlate las mismas preguntas del caso anterior y encuentra la pareja (x, y) que satisface al sistema de ecuaciones.

3. $9t - 7u = 8$
$-2t + 8u = 20$

4. $a + b = 8$
$a - b = -8$

Encuentra las parejas (t, u) y (a, b) que satisfacen los respectivos sistemas de ecuaciones.

Compara tus resultados con los de otro equipo, si hay discrepancias revisen o consulten al profesor(a).

De manera individual y siguiendo los pasos anteriores, resuelve en tu cuaderno los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $0.5x + 2y = 6.5$
$0.5x - 3y = -8.5$

2. $-2x + y = -13$
$2x - 3y = 19$

3. Reto:

Se buscan dos números positivos tales, que la suma de sus cuadrados sea igual a 4810 y la diferencia 392.

Plantea las dos ecuaciones que sugiere el texto y aplica lo que sabes.

Compara tus resultados con los de la clave. Si hay diferencias revisa tus procedimientos y corrige.

CLAVE

$x = 51 \Leftarrow x^2 = 2601$
$2x^2 = 5202$

1. $x = 1$ $y = 3$
2. $x = 5$ $y = -3$
3. $x^2 + y^2 = 4810$ $x^2 - y^2 = 392$

46

BUSCA SU RECÍPROCO

76 - 3

Método de reducción II
Resolución de ecuaciones por el método de reducción

Con un compañero(a) haz las siguientes reflexiones y ponlas en acción simultáneamente.

¿Crees que el método de reducción o eliminación es aplicable solamente cuando en el sistema de ecuaciones existen términos simétricos o semejantes con igual coeficiente?

Hagamos un ensayo:

$2x - 5y = 12 \quad (1)$

¿Cómo hacer para eliminar una de las dos incógnitas?

$3x + 4y = -5 \quad (2)$

$2x - 5y = 12 \xrightarrow{\times 3} 6x - 15y = 36$

$3x + 4y = -5 \xrightarrow{\times 2} 6x + 8y = -10$

Resta ahora, miembro a miembro, las dos ecuaciones con el fin de eliminar la variable x.

- ¿Qué obtienes?
- Reemplaza y por su valor en la ecuación (1) y obtén el valor de x.
- Verifica que la pareja de valores que hallaste satisface las ecuaciones.

Si eso es así puedes concluir que tienes la solución. Esta es la pareja (1, –2).

Resuelve el mismo sistema de ecuaciones pero eliminando y.

El coeficiente para las y debe resultar igual después del procedimiento y con signos opuestos, luego te bastará sumar miembro a miembro las dos ecuaciones y despejar x, para luego hallar y**.**

¿Cómo te parece este avance en el procedimiento de reducción o eliminación?

Observa el video en el que verás que el método de reducción resuelve fácilmente cualquier sistema de ecuaciones. Comenta en tu grupo cuál fue la idea principal del programa.

Forma un equipo y haz, con lápiz y cuaderno en mano, la siguiente lectura. Comenta en tu grupo cómo se resuelve por reducción una ecuación en que no hay términos simétricos y los coeficientes de la literal a eliminar son diferentes.

MÉTODO DE REDUCCIÓN II

El método de reducción se aplicó en un sistema de ecuaciones compatible, cuyos términos son simétricos o términos semejantes con igual coeficiente, pero también se aplica en otros casos.

Ejemplo 1:

$$2x + 3y = 6 \quad \text{ecuación (1)}$$
$$3x + 2y = 14 \quad \text{ecuación (2)}$$

En este sistema de ecuaciones no es posible aplicar directamente el método de reducción, pues no existen términos simétricos o semejantes con igual coeficiente.

Se inicia escogiendo la literal que se desea eliminar; en este caso se eliminará y. Observa:

$$2x + 3y = 6 \xrightarrow{\times 2} 4x + 6y = 12 \quad (3)$$

$$3x + 2y = 14 \xrightarrow{\times 3} 9x + 6y = 42 \quad (4)$$

En este nuevo sistema, y tiene coeficientes iguales. Como no son simétricos se resta la ecuación 4 a la 3, cambiando los signos de los términos del sustraendo, y se despeja x:

$$\begin{array}{r} 4x + 6y = 12 \\ -9x - 6y = 42 \\ \hline -5x \quad\quad = -30 \end{array}$$

$$x = \frac{-30}{-5}$$

$$\boxed{x = 6}$$

Este valor se sustituye en la ecuación 1 para encontrar el valor de y.

$$2(6) + 3y = 6$$
$$12 + 3y = 6$$
$$12 - 12 + 3y = 6 - 12$$
$$3y = -6$$
$$y = \frac{-6}{3}$$

$$\boxed{y = -2}$$

Esos valores se comprueban sustituyéndolos en la ecuación 2:

$$3x + 2y = 14$$
$$3(6) + 2(-2) = 14$$
$$18 + (-4) = 14$$
$$18 - 4 = 14$$

$$\boxed{14 = 14}$$

Ejemplo 2:

$2x + 3y = -3$ ecuación (1)
$x + 4y = 1$ ecuación (2)

En este sistema resulta más fácil eliminar a x, pues en la ecuación 2 su coeficiente es uno, así que ésta se multiplica por el coeficiente de x en (1).

$$2(x + 4y = 1)$$
$$2x + 8y = 2 \quad \text{ecuación (3)}$$

Y se cambian los signos de la ecuación (3) para encontrar el valor de y:

$$2x + 3y = -3$$
$$\underline{-2x - 8y = -2}$$
$$-5y = -5$$
$$y = \frac{-5}{-5}$$

$$\boxed{y = 1}$$

Y se sustituye en la ecuación (1)

$$2x + 3 = -3$$
$$2x = -3 - 3$$
$$2x = -6$$

$$x = \frac{-6}{2}$$

$$\boxed{x = -3}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación (2) para comprobarlos:

$$x + 4y = 1$$
$$-3 + 4(1) = 1$$
$$-3 + 4 = 1$$
$$1 = 1$$

Ejemplo 3:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 6 \qquad \text{ecuación (1)}$$

$$x + \frac{2}{3}y = 16 \qquad \text{ecuación (2)}$$

En este sistema se eliminará a x por lo que se multiplica la ecuación 2 por $\frac{1}{4}$ ya que es el coeficiente de x en la ecuación 1 quedando la ecuación:

$$\frac{1}{4}\left[x + \frac{2}{3}y = 16\right] \rightarrow \frac{1}{4}x + \frac{2}{12}y = \frac{16}{4} \rightarrow \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 4 \qquad (3)$$

Al obtener la ecuación (3), se observa que las x en las ecuaciones 1 y 3 no son simétricas, por lo que se resta la ecuación (3) a la (1) cambiando los signos de la (3).

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 6$$
$$-\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = -4$$
$$\frac{1}{6}y = 2$$

Para eliminar el 6 del denominador, se multiplica la igualdad por 6.

$$6\left[\frac{1}{6}y\right] = (2)\,6 \qquad \boxed{y = 12}$$

El valor de y se sustituye en la ecuación (2) para encontrar el valor de x.

$$x + \frac{2}{3}y = 16 \quad \rightarrow x + \frac{2}{3}(12) = 16 \quad \rightarrow x + \frac{24}{3} = 16 \quad \rightarrow x + 8 = 16$$

$$x + 8 - 8 = 16 - 8$$

$$x = 8$$

Para comprobar los valores de x y y sustitúyelos en la ecuación (1).

Si estos valores satisfacen la igualdad, ¿qué puedes decir de la pareja (8, 12)?

Resuelve con un compañero(a) los siguientes sistemas de ecuaciones y para cada uno contesta las preguntas.

1) $2x + 3y = 0$
$x - 2y = 3.5$

¿Cuál de las dos literales deseas eliminar?
¿Son simétricas?
¿Qué harías para poder eliminarla?
Resuélvelo

2) $3x - 4y = 0$
$5x + 8y = 0$

3) $7x - 2y = 4$
$3x + 4y = 6$

Comprueba los resultados.

Revisa tus resultados comparándolos con los de tus compañeros(as). Si hay errores corrige.

Forma una pareja y encuentra los valores de los literales por el método de eliminación.

1. $2x + 3y = 5.7$
$x - 2y = 1.8$

2. $x + \frac{x}{3} = 6$

$2x + \frac{2x}{3} = 4$

Compara con la clave tus resultados. Si hay diferencias consulta a tu profesor(a) y corrige los errores.

CLAVE

1. $y = 2.4$ $y = 0.3$; 2. $x = 4$ $y = 6$

47

77 - 3

¡BUSCANDO UNA SOLUCIÓN A TRES PROBLEMAS!

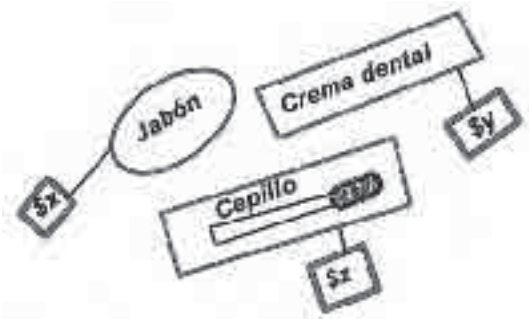
Sistemas de ecuaciones 3 × 3
Introducción a sistemas de ecuaciones 3 × 3

En esta sesión vas a extender tus conocimientos, acerca de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Taller introductorio.

Con tu equipo resuelve el siguiente problema.

Promociones de artículos de aseo.



La señora Mercedes fue al mercado y le ofrecieron las siguientes promociones: un paquete de 3 jabones, 2 cremas dentales y 4 cepillos de dientes, por $20 600; un segundo paquete de 5 jabones, 3 cremas dentales y 2 cepillos, por $21 000; un tercer paquete contenía 6 unidades de cada uno de los anteriores artículos, por $41 200. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

- Organiza en una tabla la información del problema:

	Jabón	Crema dental	Cepillo	Total
Costo por artículo	*x*	*y*	*z*	
Costo primer paquete	*3x*	*2y*	*4z*	*$20 600*
Costo segundo paquete	*5x*	*3y*	*2z*	*$21 000*
Costo tercer paquete	*6x*	*6y*	*6z*	*$41 200*

- Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$(1)\ 3x + 2y + 4z = 20\,600$
$(2)\ 5x + 3y + 2z = 21\,000$
$(3)\ 6x + 6y + 6z = 41\,200$

- Utiliza el método de eliminación para ir suprimiendo variables, ¿cuál te parece más fácil de eliminar? ¿Por dónde inicias?

- Aventúrate a resolver el sistema, después puedes devolverte y comparar tu procedimiento con el que propone esta sesión.

- Compara tu trabajo con el de otros equipos y acuerden un procedimiento.

Observa con atención el video, para que aprendas cómo resolver un problema que genera un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Lee, con papel y lápiz a la mano, el siguiente texto. La finalidad es que comprendas correctamente los pasos a seguir para resolver un sistema de ecuaciones de este tipo.

SISTEMAS DE ECUACIONES 3 $\times$ 3

De alguna manera, hasta ahora se conoce un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que representan la situación de un problema. Pero, sin embargo, también existen problemas que generan un sistema de ecuaciones con tres incógnitas. Obsérvese el problema siguiente:

Luis compra 2 lápices, 1 pluma y 1 goma, pagando por ello $5 000, Juan compra 1 lápiz, 3 plumas y 2 gomas iguales a los de Luis en $9 000. Por último Pedro también compra 3 lápices, 1 pluma y 2 gomas iguales a los de Luis y Juan, pagando un total de $7 000.

¿Cuál es el precio de cada artículo?

Si se representa a x como el número de lápices, a y como el número de plumas y a z como el número de gomas, entonces se generan tres ecuaciones con tres incógnitas.

$2x + y + z = 5\,000 \longrightarrow$ ecuación (1)
$x + 3y + 2z = 9\,000 \longrightarrow$ ecuación (2)
$3x + y + 2z = 7\,000 \longrightarrow$ ecuación (3)

Esto se conoce como un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Para resolver este sistema simultáneamente, se selecciona arbitrariamente la tercera incógnita z como la variable por eliminar en primer lugar.

En las ecuaciones (1) y (2) el *mcm* de los coeficientes de z es 2. Por tanto, para eliminar z, la ecuación (1) se multiplica por 2 y la ecuación (2) por 1 y se restan las ecuaciones resultantes.

$$4x + 2y + 2z = 10\,000 \longrightarrow \text{ecuación (1) por 2}$$
$$x + 3y + 2z = 9\,000 \longrightarrow \text{ecuación (2) por 1}$$
$$3x - y = 1\,000 \longrightarrow \text{ecuación (A)}$$

Para seguir eliminando z de las tres ecuaciones, se observa que el coeficiente de z en la ecuación (3) es el doble del coeficiente de z en la ecuación (1); así que se multiplican los miembros de la ecuación (1) por 2 y se restan de la ecuación (3) como sigue:

$$3x + y + 2z = 7\,000 \longrightarrow \text{ecuación (3)}$$
$$4x + 2y + 2z = 10\,000 \longrightarrow \text{ecuación (1) por 2 y se resta}$$
$$-x - y = 3\,000 \longrightarrow \text{ecuación (B)}$$

Con las dos ecuaciones (A) y (B) de dos incógnitas que resultaron, se forma un sistema y se resuelve para obtener los valores de x y de y.

$$3x - y = 1\,000 \longrightarrow \text{ecuación (A)}$$
$$-x - y = -3\,000 \longrightarrow \text{ecuación (B)}$$

En este caso, como la variable y tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, se resuelve el sistema por resta para eliminar a la variable y.

$$3x - y = 1\,000 \longrightarrow \text{ecuación (A)}$$
$$-x - y = -3\,000 \longrightarrow \text{ecuación (B), se resta}$$
$$4x = 4\,000$$
$$\boxed{x = 1\,000}$$

Ahora se obtiene el valor de y al sustituir x = 1 000 en cualquier ecuación (A) o (B). En este caso en ecuación (A), se tiene:

$$3x - y = 1\,000 \longrightarrow \text{ecuación (A)}$$
$$3(1\,000) - y = 1\,000$$
$$3\,000 - y = 1\,000$$
$$\boxed{y = 2\,000}$$

Finalmente, se puede obtener el valor de z sustituyendo $x = 1\,000$ y $y = 2\,000$ en cualquiera de las tres ecuaciones dadas. Empleando la ecuación (1), se tiene:

$$2x + y + z = 5\,000 \qquad \text{ecuación (1)}$$
$$2(1\,000) + 2\,000 + z = 5\,000$$
$$\boxed{z = 1\,000}$$

Así que, la solución del problema es:

Costo de un lápiz = $1 000
Costo de una pluma = $2 000
Costo de una goma = $1 000

La solución se verifica sustituyendo esos valores en cualquiera de las ecuaciones (2) o (3), obteniéndose:

$$x + 3y + 2z = 9\,000 \qquad \text{ecuación (2)}$$

$$1\,000 + 3(2\,000) + 2(1\,000) = 9\,000$$

Concluyéndose, para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales, se siguen los pasos siguientes:

Paso 1. Combinar dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas (por suma o resta) y con ello se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

Paso 2. Eliminar la misma incógnita o variable, utilizando una ecuación del paso 1 con otra que no se haya utilizado; con esto se obtiene otra ecuación con dos incógnitas.

Paso 3. Resolver las dos ecuaciones obtenidas del paso 1 y 2 formando un sistema con dos incógnitas y con ello se obtiene el valor de cada una de las dos incógnitas.

Paso 4. Sustituir el valor de las dos incógnitas encontradas en el paso 3 en cualquier ecuación de sistemas 3×3, para encontrar finalmente el valor de la tercera incógnita.

Paso 5. Sustituir el valor de cada incógnita en el sistema de ecuaciones 3×3, para comprobar si realmente satisfacen al sistema.

Ahora vuelve al problema de las promociones y si no lo resolviste, es la ocasión para aplicar lo aprendido.

Con un compañero(a), lee cuidadosamente el problema siguiente, y contesta las preguntas:

La señora Juana compra 3 kg de fríjol, 2 kg de arroz y 1 kg de queso por $13 000. La señora Petra compra 2 kg de fríjol, 1 kg de arroz y 1 kg de queso pagando un total de $12 000. Otra señora compra 1 kg de fríjol, 1 kg de arroz y 1 kg de queso pagando un total de $12 000. Si las tres señoras compraron en la misma tienda, ¿cuál es el precio por kg de cada producto?

Utiliza una tabla para organizar los datos y responde:

¿Cuáles son los datos desconocidos?

¿Con qué letras representarás los datos desconocidos?

¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa la situación del problema?

Haz una tabla en el tablero como lo indique el profesor(a). Escucha las opiniones y sugerencias de tus compañeros(as).

Continúa con tu compañero(a) y resuelve en tu cuaderno el sistema de ecuaciones, anteriormente generado por el problema, para que encuentres el precio por kg de cada producto.

1 kg de fríjol =
1 kg de arroz =
1 kg de queso =

En forma individual, resuelve en tu cuaderno el sistema de ecuaciones siguiente:

$5x - y + 4z = 5$ ⟶ ecuación (1)
$2x + 3y + 5z = 22$ ⟶ ecuación (2)
$7x - 2y - 6z = 29$ ⟶ ecuación (3)

Compara con tus compañeros(as) y después con la clave, y si tienes dudas consulta al profesor(a)

CLAVE

$x = 3,\quad y = 2,\quad z = -2$

48

¡SOLUCIÓN ÚNICA!

78 - 3

Sistemas de ecuaciones 3×3.
Resolución de sistemas de ecuaciones 3×3
por el método de eliminación

En esta sesión continuarás con la resolución de sistemas de ecuaciones 3×3 y en consecuencia afianzarás el procedimiento que ya empezaste a utilizar para dicho fin.

Observa atentamente el video, donde se recuerda el procedimiento a seguir para resolver un sistema de ecuaciones 3×3. Es conveniente que tomes apuntes que puedan serte útiles para la apropiación del procedimiento.

Si lo consideras necesario, vuelve a leer el texto de la sesión anterior.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, de acuerdo como se va indicando. Trabaja en tu cuaderno.

$$x + y + z = 6 \quad \text{ecuación (1)}$$
$$x - y + 2z = 5 \quad \text{ecuación (2)}$$
$$x - y - 3z = 10 \quad \text{ecuación (3)}$$

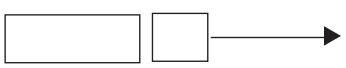
- Elimina la variable y en las ecuaciones (1) y (2)

$$x + y + z = 6 \quad (1)$$
$$x - y + 2z = 5 \quad (2)$$

ecuación (A) con dos incógnitas

- Ahora, elimina la misma variable y en las ecuaciones (1) y (3), por suma:

$$x + y + z = 6 \quad (1)$$
$$x - y - 3z = -10 \quad (2)$$



ecuación (B) con dos incógnitas

- Resuelve las dos ecuaciones (A) y (B), que forman un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Sustituye los valores de x y z en la ecuación (3) para que obtengas el valor de y.

- Verifica la solución del sistema, sustituyendo los valores que hallaste, en las ecuaciones (2) y (3).

Compara tus resultados con los de otro compañero(a). En caso de duda, consulta al profesor(a).

Resuelve en forma individual el sistema de ecuaciones siguientes:

$$x + y + z = -1 \quad \text{ecuación (1)}$$
$$x + y - z = 5 \quad \text{ecuación (2)}$$
$$-x + y - z = -9 \quad \text{ecuación (3)}$$

Compara tus respuestas con la clave, y si tienes dudas consulta al profesor(a).

CLAVE

$x = 1$, $y = -5$, $z = -3$

49 ¡NO SIEMPRE SON IGUALDADES!

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita
Solución de inecuaciones y de sistemas de inecuaciones con una variable

En sesiones anteriores trabajaste en la solución de sistemas de ecuaciones de dos y de tres incógnitas. Tales conocimientos fueron útiles para modelar problemas y encontrar la solución de los mismos.

Ahora vas a ampliar esos conocimientos en el tratamiento de inecuaciones, retomando al mismo tiempo el trabajo que al respecto se hizo en 8º grado.

Taller de inecuaciones

Constituye un equipo de tres integrantes para atacar las preguntas aquí propuestas. Dispongan de sus cuadernos y, antes de abordar las soluciones que se vayan dando en el desarrollo del taller, traten de resolver a su modo las cuestiones propuestas.

1. *Adivina quiénes son y represéntalos.*

El cuadrado de la diferencia entre x y el número 5, es estrictamente menor que la diferencia entre el cuadrado de x y el cuadrado de 5. ¿Cuáles son los valores que puede tomar x?

- Haz la traducción del texto del problema.

- $(x-5)^2 < x^2 - 5^2$

- Recuerda a qué es igual $(x-5)^2$

- $x^2 - 10x + 25 < x^2 - 25$

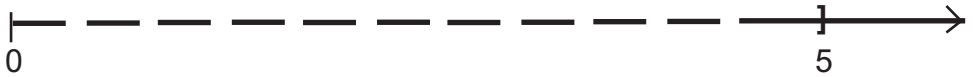
- Agrupa términos semejantes

  $x^2 - x^2 - 10x < -25 - 25$
  $-10x < -50$

- ¿Cómo eliminas los signos negativos? ¿Qué pasa con el sentido de la desigualdad?

  $10x > 50$ *fi* $x > 5$
  $x > 5$

- ¿Cuáles son entonces los valores de x que cumplen las condiciones impuestas en el enunciado inicial?



- ¿Cómo describes la representación gráfica correspondiente?

- ¿$x = 5$ es una solución? ¿Por qué?

La representación gráfica es abierta en 5, es decir 5 no es parte de la solución.
La línea continua a la derecha del 5, representa el conjunto de las soluciones.

2. *Alquiler de carros, en grandes ciudades.*

Una empresa arrendadora de carros en Bogotá los clasifica según el modelo, en Gama 1, Gama 2 y Gama 3, siendo los de este último grupo los más lujosos. El costo del arriendo ***por día*** figura en la siguiente tabla:

Gama 1 $40 000, más $2 000 por kilómetro recorrido Gama 2 $60 000, más $1 500 por kilómetro recorrido Gama 3 $50 000, más $1 600 por kilómetro recorrido

¿Para cuál kilometraje el precio del arriendo de un vehículo de la clase Gama 1 es mayor que el de uno de Gama 3 e inferior a uno de Gama 2?

¡Entrémosle a la solución!

a) Sea x = kilometraje, $x \geq 0$, es decir un número positivo

b) Traducción del texto a inecuaciones.

$2\,000x + 40\,000$ representa el valor del alquiler diario de un Gama 1.

$2\,000x + 40\,000 > 1\,600x + 50\,000$ (1)

$2\,000x + 40\,000 < 1\,500x + 60\,000$ (2)

c) Resolución del sistema

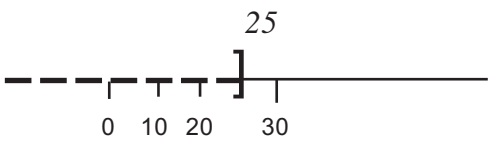
-Inecuación 1

$2\,000x + 40\,000 > 1\,600x + 50\,000$

$2\,000x - 1\,600x > 50\,000 - 40\,000$

$400x > 10\,000$

$x > 25$



¿Qué significa esta solución en el contexto del problema? ¿Qué pasa si $x = 25$?

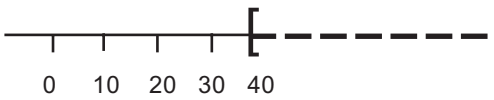
-Inecuación 2

$2\,000x + 40\,000 < 1\,500x + 60\,000$

$2\,000x - 1\,500x < 60\,000 - 40\,000$

$500x < 20\,000$

$x < 40$



¿Qué significa esta solución en el contexto del problema? ¿Qué pasa si $x = 40$?

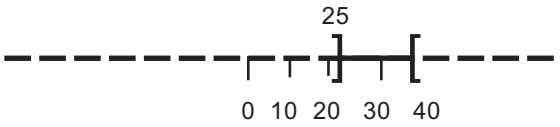
El conjunto de las soluciones al sistema de inecuaciones es aquel para el cual los valores del kilometraje x cumplen simultáneamente las dos condiciones:

$x > 25$ $\qquad$ $x < 40$

¿De esas dos desigualdades podemos hacer una sola?

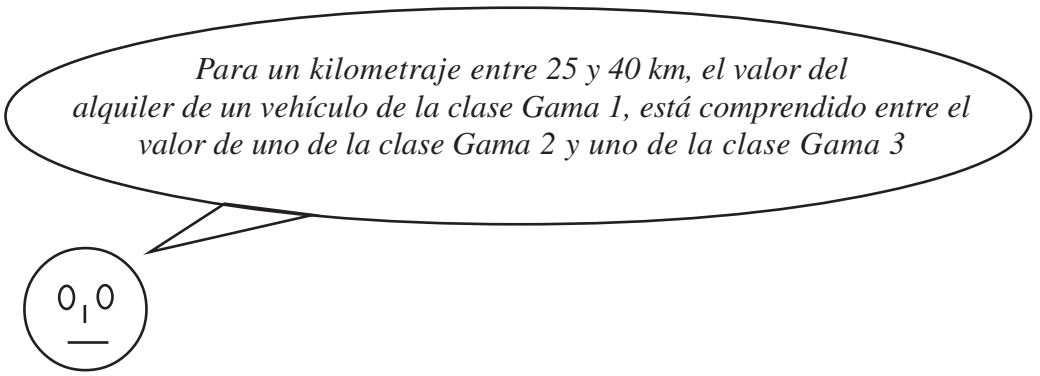
$\boxed{25 < x < 40}$ ¿Estás de acuerdo?

Representa en una sola recta las soluciones a cada inecuación



La parte continua de la recta representa la intersección de las soluciones de las dos inecuaciones. Es el conjunto de las soluciones comunes.

b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta del problema?



c) ¿Qué pasa para recorridos de 20, 25, 30 y 50 km?

- Escribe tus conjeturas.
- Completa el siguiente cuadro:

	20 km	***25 km***	***30 km***	***35 km***	***50 km***
Gama 1				*110 000*	
Gama 2				*112 500*	
Gama 3				*106 000*	

f) Con base en los datos del cuadro vuelve a analizar la pregunta del problema. Si fueras tú la persona que va a alquilar un carro y el recorrido lo supones superior a 40 km, ¿de cuál Gama lo escogerías? ¿Y si es de 40 km?

Con tu equipo haz la siguiente lectura.

Solución de inecuaciones o desigualdades y de sistemas de inecuaciones con una incógnita

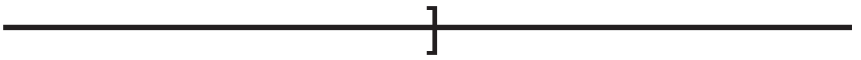
En la solución de ecuaciones con una incógnita, provenientes éstas de la traducción del texto de un problema o de la búsqueda de los ceros de una función de gráfica lineal, la estrategia seguida se fundamenta en la aplicación de las propiedades de una igualdad.

Para el caso de las inecuaciones con una incógnita es necesario tener presente que al señalar un punto sobre una recta, se determinan en ella dos semirrectas y el mismo punto.

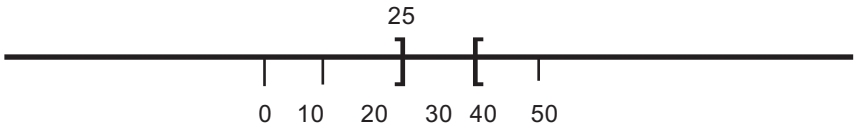
Tales semirrectas pueden ser consideradas como representaciones gráficas de conjuntos de números reales.

El punto señalado puede pertenecer o no a las semirrectas. Cuando sí pertenece, se dice que la semirrecta es cerrada en dicho extremo, de lo contrario se considera abierta.

Para indicar en forma gráfica, que el punto no pertenece a la semirrecta de la derecha, donde se ubicarían los valores mayores que el representado por él, se puede utilizar la siguiente convención:



Así para simbolizar la solución del sistema de inecuaciones que nos resultó del problema 2 del taller, utilizamos la siguiente representación:



Quiere decir que 25 no pertenece al conjunto de las soluciones, lo mismo se puede decir de 40. Las soluciones están comprendidas entre 25 y 40.

Este tipo de conjuntos de números, reciben el nombre de ***intervalos***. Éstos pueden ser abiertos, cerrados o semiabiertos, dependiendo esto de la pertenencia o no pertenencia de los extremos al conjunto representado por dicho intervalo.

En este caso se trata de un intervalo abierto puesto que 25 y 40 no son elementos del conjunto de las soluciones.

Para simbolizarlo se utiliza la siguiente notación:

] *25 , 40* [o así (*25, 40*)

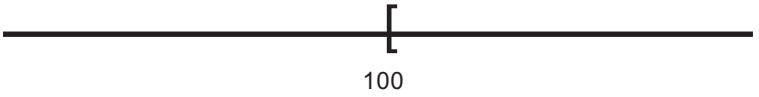
Si los números 25 y 40 fueran soluciones del sistema, entonces el intervalo sería cerrado y se notaría así:

$[\ 25\ ,\ 40\ ]$

Si uno solo de los dos extremos fuese parte de la solución, se tendría:

$]\ 25\ ,\ 40\ ]$ ó $(25\ ,\ 40\ ]$ y $[25\ ,\ 40\ [$ ó $[25\ ,\ 40)$

La gráfica



significa que 100 no pertenece a la semirrecta de la izquierda, pertenece a la otra semirrecta. Ambas semirrectas se extienden, una hacia la derecha, a más infinito $(+\infty)$ y la otra hacia la izquierda, a menos infinito $(-\infty)$.

El símbolo para infinito parece un "ocho acostado".

El intervalo de números reales representado a la izquierda de 100 puede simbolizarse así:

$]+\infty,\ 100[$ ó $(+\infty,\ 100)$

El intervalo de números reales representado a la derecha de 100 puede simbolizarse así:

$[\ 100,\ +\infty)$ o simplemente $[\ 100,\ +\infty)$

¿Cuál es el intervalo que contiene al conjunto de las soluciones de:

a) $100 \leq x$ *b)* $100 < x$ *c)* $x \geq 100$ *d)* $x > 100$ para $x \in R$?

Ejemplos: Sigue la lectura trabajando en tu cuaderno.

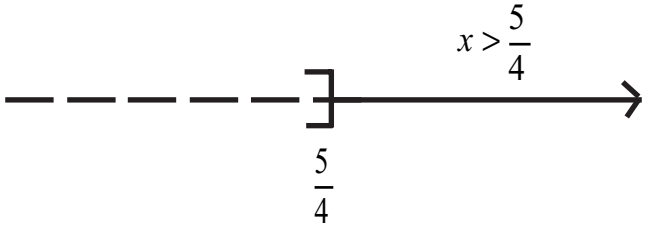
1. Resolvamos las siguientes inecuaciones y representemos el conjunto de las soluciones en una recta graduada.

a) $-3x + 7 < x + 2$

$-3x - x < 2 - 7$

$-4x < -5$

$x > \frac{5}{4}$

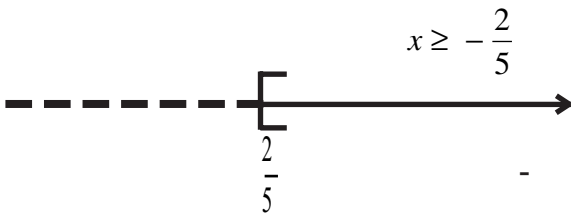


El conjunto de las soluciones es el intervalo $(\frac{5}{4}, \infty)$

b) $-5x - 2 < 0$

$-5x < 2$

$-x < \frac{2}{5}$

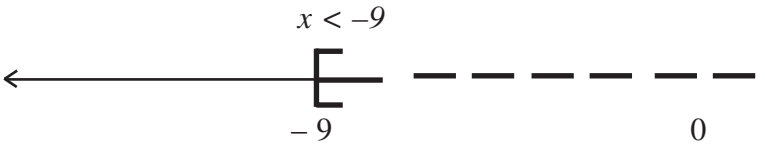


$x \geq -\frac{2}{5}$ El conjunto de las soluciones es el intervalo

$\left[-\frac{2}{5}, \infty\right)$

c) $-x > 9$ Multiplicamos por –1 y cambiamos de sentido la igualdad.

$x < -9$



El conjunto de las soluciones es el intervalo $(-\infty, -9)$

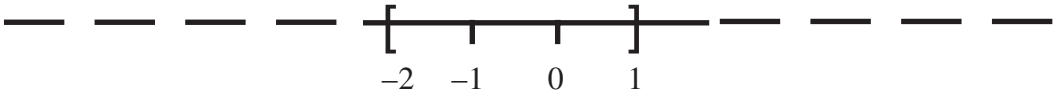
2. Ahora te invitamos a seguir la solución de los siguientes **sistemas de inecuaciones** con una incógnita.

Halla el conjunto de las soluciones y represéntalo en una recta. Trata de hacerlo y verás que lo lograrás.

a) $\begin{cases} 0 \leq 3x + 6 & (1) \\ 2x + 1 \leq 3 & (2) \end{cases}$

Inecuación (1)	Inecuación (2)
$0 \leq 3x + 6$	$2x + 1 \leq 3$
$-3x \leq 6$	$2x \leq 3 - 1$
$3x \geq -6$	$2x \leq 2$
$x \geq -2$	$x \leq 1$

$-2 \leq x \leq 1$



El conjunto de las soluciones es el intervalo [*–2 , 1*]

Comprueba las soluciones reemplazando en (1) y (2) la x por una de ellas

b) $\begin{cases} 2x - 8 \le 5x + 13 & (1) \\ 4x - 23 \le 10 + x & (2 \end{cases}$

Inecuación 1

$2x - 8 \le 5x + 13$

$-3x \le 21$

$3x \ge -21$

$x \ge -7$

Inecuación 2

$4x - 23 \le 10 + x$

$3x \le 33$

$x \le 11$

$-7 \le x \le 11$

El conjunto de las soluciones es el intervalo [*–7 , 11*]

c) $2x - 8 \ge 5x + 13$ *(1)* - Compara este sistema con el anterior

$4x - 23 \ge 10 + x$ *(2)* - ¿Tienes alguna conjetura?

Inecuación 1

$2x - 8 \ge 5x + 13$

$-3x \ge 21$

$3x \le -21$

$x \le -7$

Inecuación 2

$4x - 23 \ge 10 + x$

$3x \ge 33$

$x \ge 11$

¿Hay algún número real que sea al mismo tiempo mayor o igual que 11 y menor o igual que -7?

¡Seguramente no lo vas a encontrar!

En reunión plenaria comparte tus aprendizajes con los demás.

Con tu equipo de estudio realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

1. Inecuaciones compincheras

Encuentra las inecuaciones que tienen el mismo conjunto de soluciones.

a) $-4x > 12$ b) $2 > x$ c) $3x > 6$

d) $-2x < -4$ e) $2x < -6$ f) $-3x > -6$

2. Encuentra el intruso.

Entre los sistemas de inecuaciones siguientes hay uno que no admite como conjunto de soluciones al representado así:

Según la convención, los números 2 y 3 pertenecen al conjunto de soluciones graficado, que también se puede representar así:

$$[\,2,\,3\,]$$

Este intervalo está constituido por los números reales que satisfacen la condición:

$$2 \leq x \leq 3$$

Los sistemas de inecuaciones son:

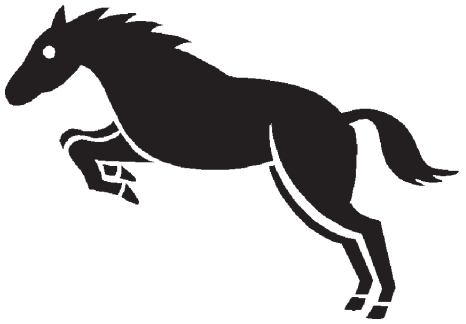
a) $\begin{cases} 8 - x \leq 3x \\ -2x \leq 9 - 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \leq 6x \\ 6x - 10 \leq 5 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x \le 13\,x \\ 9 + \ x \ge 8x - 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 \le 3x - 4 \\ 2 + 8x \ge 7x + 5 \end{cases}$

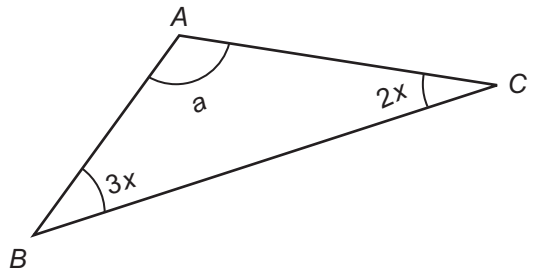
Con un compañero(a) resuelve los siguientes problemas:

1) *El caballo de paso*



El caballo “Nube Azul” trota en una pista circular cuyo radio es de 12 m. Para que el recorrido del caballo esté comprendido entre 850 m y 1 km, ¿cuántas veces (en números enteros) debe darle vuelta a la pista?
Para π toma la aproximación 3.14.

2) *El triángulo no rectángulo*



El ángulo $\sphericalangle$ A es obtuso y el ángulo $\sphericalangle C$ mide por lo menos $30°$. ¿Cómo puede escogerse el valor de x para que se cumplan tales condiciones en el triángulo ABC?

CLAVE

1. De la solución del sistema se tiene que $11.27 < x < 13.26$
Para el contexto del problema $11 < x \le 13$
El número de vueltas que puede dar el caballo es 12 ó 13

2. $3x + 2x + a = 180;\ a > 90°;\quad 2x \ge 30$

La solución al sistema $\begin{cases} 180 - 5x > 90 \\ 2x \ge 30 \end{cases}$ es $15 \le x < 18$

50 ¡SOLUCIONES REGIONALES!

Sistema de dos inecuaciones con dos incógnitas

Resolución de sistemas de dos inecuaciones con dos incógnitas

¿En qué se diferencia el tema enunciado aquí del que estudiaste en la sesión anterior?

Vuelve a los títulos de éstos y compara.

Taller para iniciar.

Con tu equipo de trabajo y con cuaderno cuadriculado y lápices de colores a la mano, haz el siguiente taller con el ánimo no sólo de leer bien sino de hacer para aprender.

¡A la conquista de inecuaciones con dos incógnitas!

- Escribe varias inecuaciones con dos incógnitas.

La expresión algebraica $x + 2y > 6$ es una inecuación con dos incógnitas.

Para encontrar gráficamente su solución, bastará encontrar puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) satisfagan la inecuación.

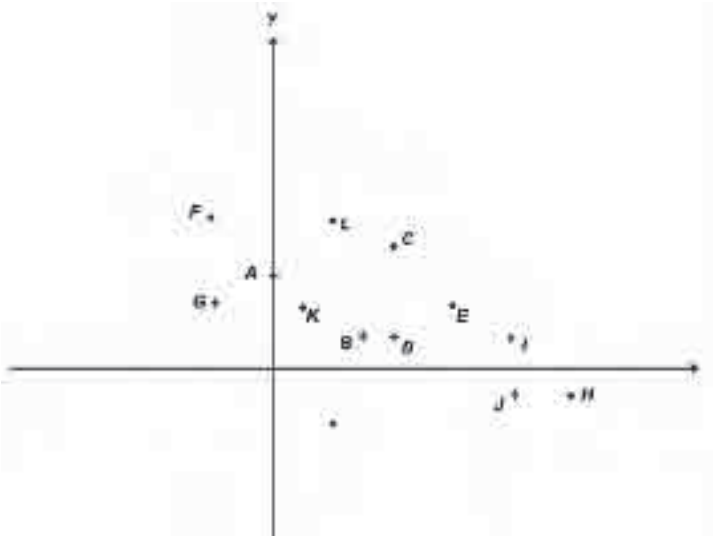
- ¿Cómo proceder?

De los siguientes puntos, representa en rojo, en un plano cartesiano aquellos que verifican la inecuación y en otro color los que no la verifican

A *(0; 3)* C *(4 ; 4)* E *(6 ; 2)* G *(–2 ; 2)* I *(8 ; 1)* K *(1 ; 2)*

B *(3 : 1)* D *(4 ; 1)* F *(–2 ; 5)* H *(10 ; –1)* J *(8 ; –1)* L *(2 ; 5)*

Aquí, a falta de color, utilizaremos un punto (**.**) para los que sí la verifican y una crucecita (+) para los que no.



- Escoge diez puntos más y represéntalos en el plano siguiendo la misma convención.
- ¿Crees posible encontrar la línea frontera que separa la región donde están tus puntos rojos (.) de la región donde están los otros puntos (+)?
- ¿Cuál es la ecuación de esta línea? ¿Cómo la vamos a obtener?

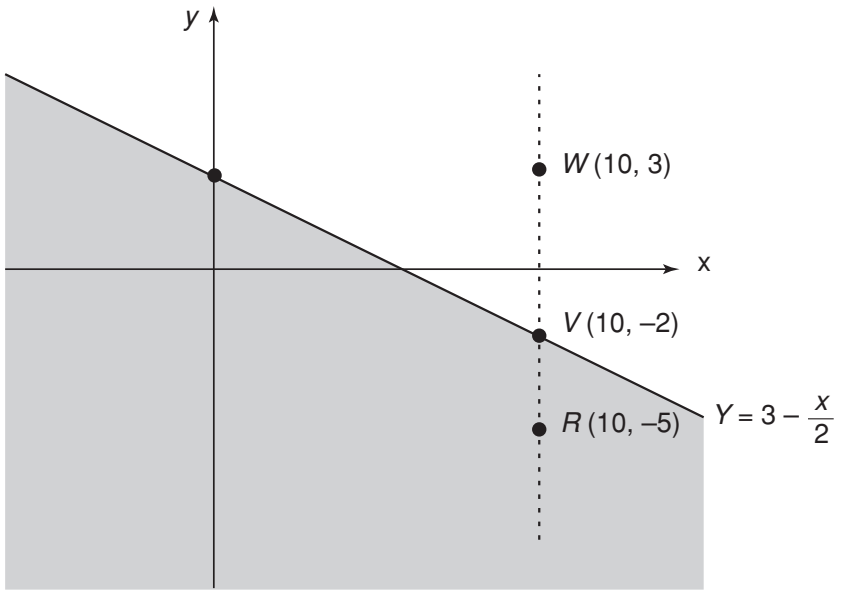
Tomemos la inecuación dada y encontremos a partir de ella una ecuación de la forma $y = ...$

$x + 2y > 6$

$2y > 6 - x$

$y > 3 - \frac{1}{2}x$ de donde se puede inferir que la ecuación de la recta frontera es:

$y = 3 - \frac{1}{2}x$



Toma un punto sobre la recta frontera, por ejemplo $V\,(10, -2)$ y desplázalo hacia arriba conservando la misma abscisa.

- ¿Qué pasa con la ordenada de los puntos que están en ese recorrido, comparada con la del punto V?

- Sea $W(10,3)$ uno de esos puntos, ¿cómo es su ordenada con respecto a la del punto V?

- Verifica si otros puntos con la misma abscisa y ubicados hacia arriba de V también tienen ***ordenada mayor*** que la del punto V.

  ¿Qué puedes concluir? Escribe tus conclusiones.

Ahora desplaza hacia abajo el punto V, conservando la misma abscisa.

- ¿Qué pasa con los valores de las ordenadas de los puntos que están en ese recorrido, comparados con la del punto V?

- Sea $R\,(10, -5)$ uno de tales puntos, ¿cómo es su ordenada con respecto a la del punto V?

- Toma otros puntos con las mismas condiciones de R y fíjate si para cada uno de ellos ***su ordenada es menor*** que la del punto V.

¿Qué puedes concluir? Escribe tus conclusiones.

Ubica otro punto sobre la recta, en el cuarto cuadrante del plano cartesiano, y desplázalo como lo hiciste con el punto V y fíjate si para este otro punto también son válidas tus conclusiones.

¿Cuál es la región cuyos puntos cumplen la desigualdad o inecuación:

$$y > 3 - \frac{1}{2}\,x$$

¿Cuál es la región cuyos puntos cumplen la desigualdad o inecuación:

$$y < 3 - \frac{1}{2}\,x$$

- Verifica si los puntos: $M(6\,;-4)$; $N(-4\,;2)$; $P(-4\,;-2)$ satisfacen esta última desigualdad. Ubícalos en el plano.

Veamos

$$\begin{array}{lll} & y & x \\ M(6\,;-4): & -4 < 3-\frac{1}{2} & (6) \\ & -4 < 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} N(-4\,;2): & 2 < 3-\frac{1}{2} & (-4) \\ & 2 < 3+2 & \\ & 2 < 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} P(-4\,;-2) & -2 < 3-\frac{1}{2} & (-4) \\ & -2 < 3+2 & \\ & -2 < 5 & \end{array}$$

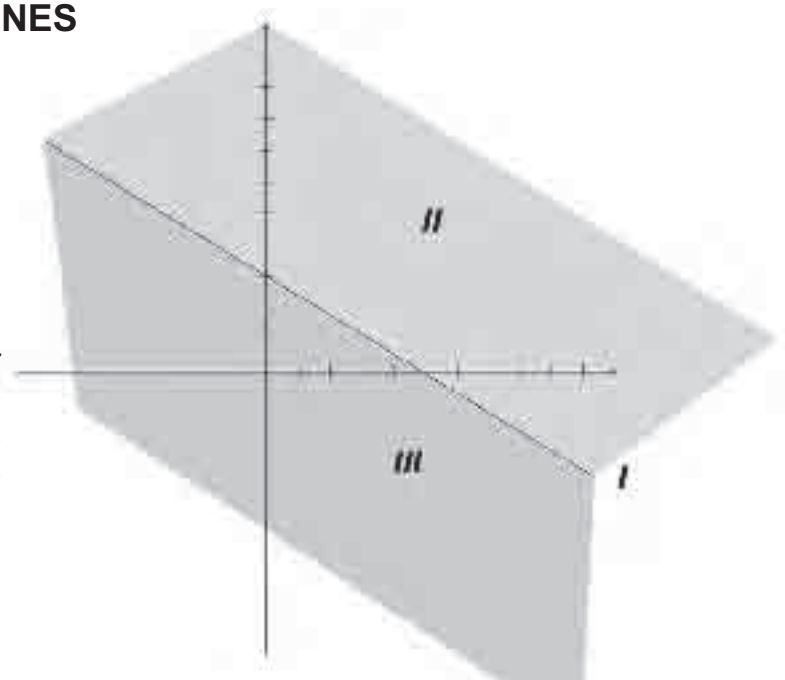
Los puntos M, N y P, ¿satisfacen la inecuación $x + 2y < 6$? ¿Por qué?

Con tu equipo de trabajo, haz la siguiente lectura para corroborar y ampliar los conocimientos que desarrollaste en el taller.

SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Organización del plano.

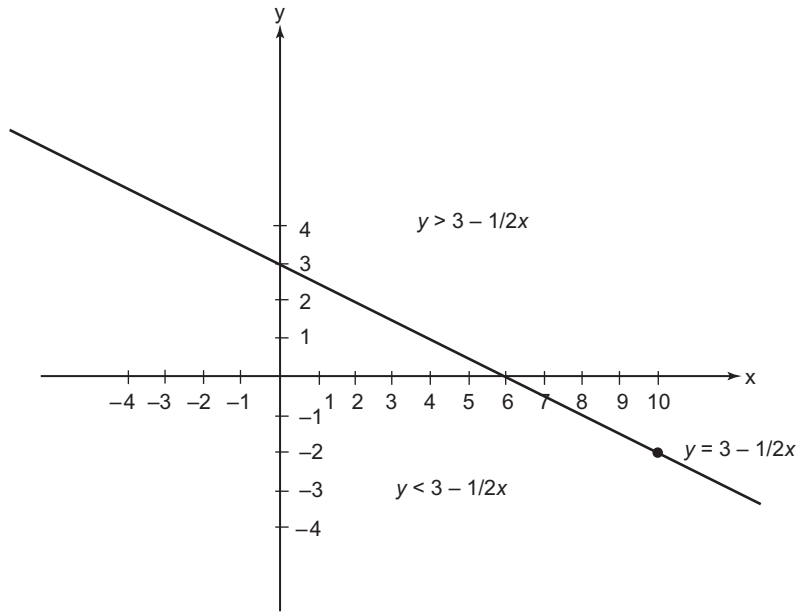
Ya viste cómo al trazar una recta en un plano, quedan determinadas tres regiones. La constituida por la misma recta, la que se halla por encima de ella y la que está por debajo, es decir las dos regiones que se hallan en los lados opuestos de dicha recta.



Cada una de las dos regiones recibe el nombre de semiplano.

¿Qué representan los semiplanos y cómo pueden ser?

Retomando la inecuación $x + 2y > 6$ (1) se vio que la representación gráfica de los puntos que la satisfacen está constituida por el semiplano II.



Los puntos de este semiplano satisfacen la inecuación

$$y > 3 - \frac{1}{2}\ x \qquad (2)$$

Que se obtiene transformando la inecuación (1)

Por lo tanto las inecuaciones 1 y 2 son equivalentes. Si le cambiamos de sentido a la desigualdad en $x + 2y > 6$ se obtiene $x + 2y < 6$ (3)

¿Cuáles son los puntos del plano que verifican (3)?

Son los puntos del semiplano III, que a su vez satisfacen la inecuación.

$$y < 3 - \frac{1}{2}x \qquad (4)$$

Equivalente a la inecuación (3)

Si se piensa en los puntos que satisfacen la ecuación

$$y = 3 - \frac{1}{2}x \qquad (5)$$

Estamos hablando de la región I, recta frontera entre los dos semiplanos. Estos últimos no incluyen los puntos de la recta, por tal motivo se denominan ***semiplanos abiertos***.

De manera pues que el plano queda totalmente cubierto por los puntos que satisfacen a las expresiones:

$$y > 3 - \frac{1}{2}x$$

$$y < 3 - \frac{1}{2}x$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}x$$

Cuando el semiplano incluye la recta frontera se denomina ***semiplano cerrado***.

Si transformamos la inecuaciones (2) y (4) en: $y \geq 3 - \frac{1}{2}x$ $y \leq 3 - \frac{1}{2}x$, el conjunto de las soluciones para cada una de estas dos nuevas inecuaciones es un semiplano cerrado.

Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Para iniciar consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

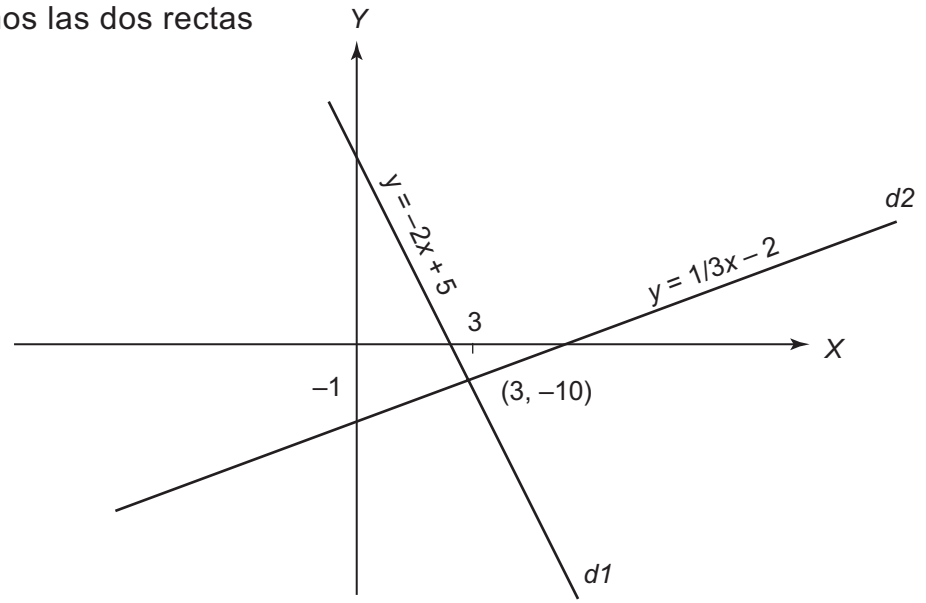
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

La ecuación $2x + y = 5$ es equivalente a $y = -2x + 5$.

La ecuación $x - 3y = 6$ es equivalente a $y = \frac{1}{3}x - 2$

La solución gráfica del sistema será el punto (x, y) donde se corten las rectas cuyas ecuaciones son: $y = -2x + 5$ e $y = \frac{1}{3}x - 2$

Tracemos las dos rectas



La solución del sistema de ecuaciones es el punto (3, –1).

Verifica que efectivamente este punto satisface al sistema de ecuaciones.

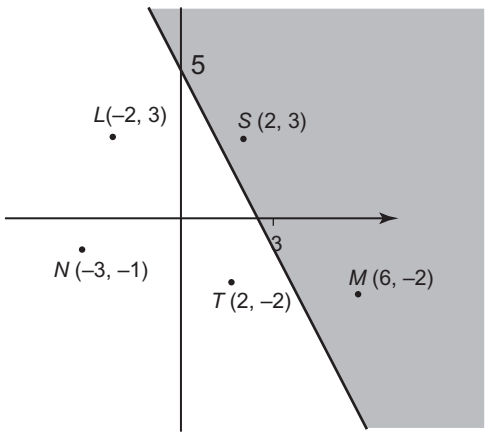
Tomemos ahora el sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + y > 5 \\ x - 3y > 6 \end{cases}$$

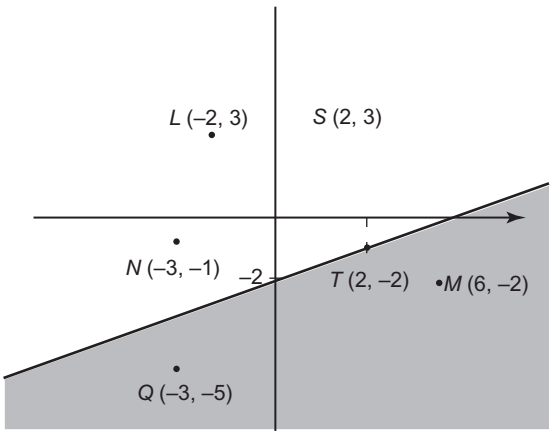
La inecuación $2x + y > 5$ es equivalente a $y > -2x + 5$

La inecuación $x - 3y > 6$ es equivalente a $y < \frac{1}{3}x - 2$

Solución gráfica de $y > -2x + 5$



Solución gráfica de $y < \frac{1}{3}x - 2$



¿En cuál de los dos semiplanos se ubican los puntos que representan al conjunto de las soluciones?

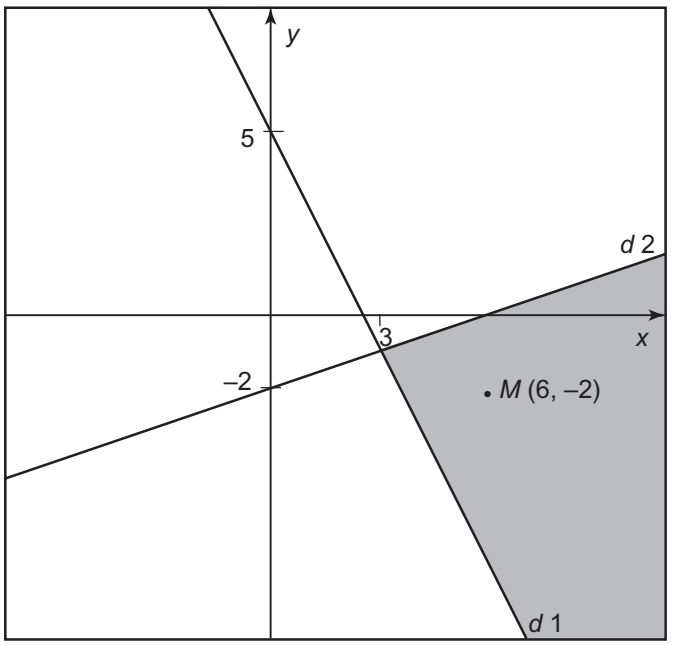
Los puntos que representan al conjunto de las soluciones, ¿dónde están ubicados?
¿Cuáles de los puntos señalados satisfacen la inecuación?

Los semiplanos sombreados contienen los puntos que satisfacen a cada una de las inecuaciones respectivas.

¿Cómo hallar la solución del sistema formado por las dos inecuaciones?

Los puntos $(x\ ,\ y)$ que verifiquen al mismo tiempo las dos inecuaciones representan al conjunto de las soluciones del sistema.

Vamos a superponer los dos planos en uno solo:



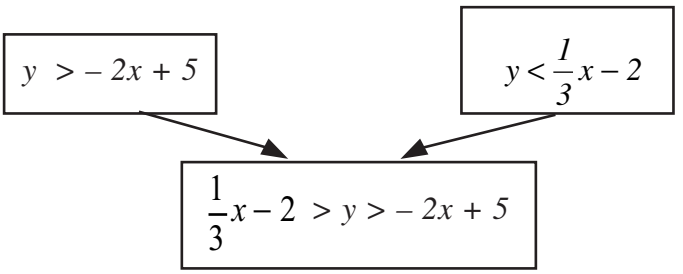
El conjunto de las soluciones del sistema está representado por los puntos de la intersección de los dos semiplanos.

Continúa trabajando con tu equipo y en tu cuaderno.

1. En el gráfico donde está la intersección de los dos semiplanos, señala algunos puntos y verifica que satisfacen ambas inecuaciones.

Ejemplo: el punto M (6, – 2) pertenece a esa región.

Debe satisfacer al mismo tiempo las inecuaciones:



Reemplacemos por las coordenadas de M.

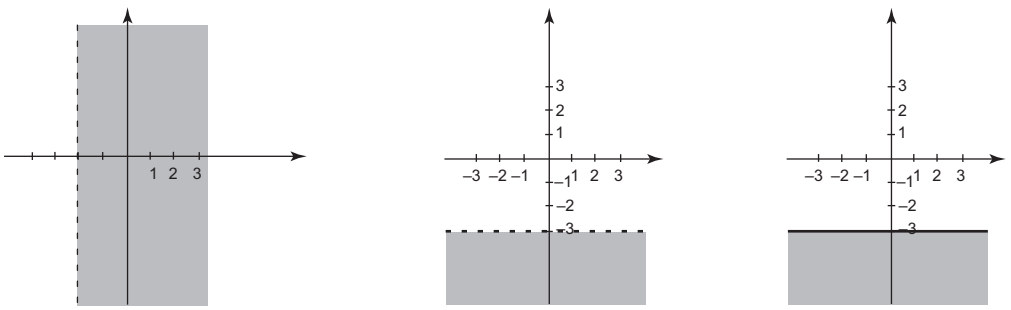
$$\frac{1}{3}(6) - 2 > -2 > -2(6) + 5$$

$$2 - 2 > -2 > -12 + 5$$

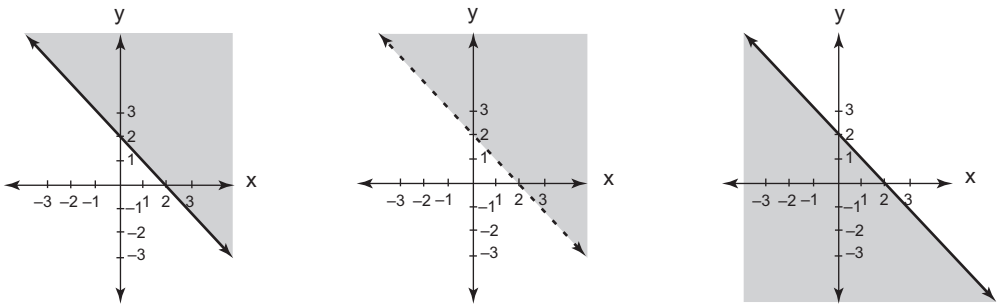
$$0 > -2 > -7$$

¿Qué puedes concluir?

2. Escribe la inecuación o desigualdad correspondiente a la región sombreada. ¡Observa si la línea frontera pertenece o no al semiplano!



3. La ecuación de la recta en las siguientes gráficas es $y = -x + 2$. Escribe la inecuación correspondiente a cada una de dichas gráficas.



Compara tus respuestas con la de otros equipos y consulta con tu profesor(a).

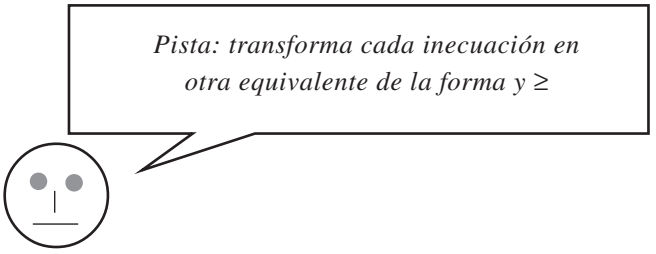
Realiza en forma individual lo siguiente:

1. Haz la gráfica correspondiente al conjunto de las soluciones de la inecuación $y < -x + 2$

2. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones

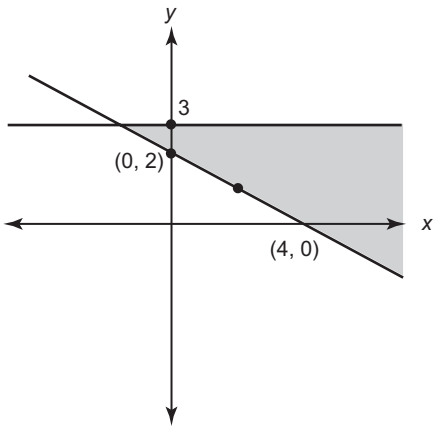
$2x - y \leq 3$

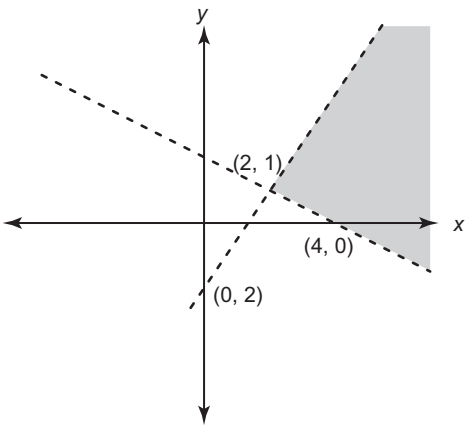
$x + y \geq 3$



Con base en la gráfica dí si el punto (4,4) es una solución del sistema.

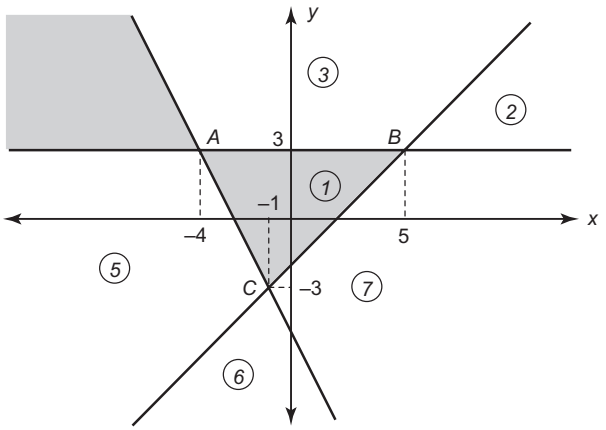
3. Encuentra el sistema de las dos inecuaciones cuya solución gráfica es la parte sombreada:





Ten en cuenta la ecuación de una recta: $y = mx + b$, donde m es la pendiente. Si conoces dos puntos, es fácil hallar la ecuación.

4. Reto: Trabaja en tu cuaderno y utiliza lápices de colores.



Los puntos A *(5, 3)*, B *(–4, 3)* y C *(–1, –3)* determinan tres rectas en el plano y éstas a su vez dividen el plano en siete regiones, como puede verse en el dibujo.

a) Halla la ecuación de las rectas

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

b) Escribe un sistema de inecuaciones cuyas soluciones estén representadas por los puntos de la región ① . Utiliza las desigualdades en sentido estricto: *(< ó >)*.

c) Escribe un sistema de inecuaciones cuyas soluciones estén representadas por los puntos de las regiones ⑤ y ⑥ respectivamente.

Comparte tus reflexiones con dos compañeros(as).

CLAVE

1.

2. El sistema dado es equivalente a:

$y \geq 2x - 3$

$y > -x + 3$

El punto *(4, 4)* no es una solución del sistema, pues no satisface la primera inecuación:

$4 \ngeq 2\,(4) - 3$

3. a) $\left.\begin{array}{l} y \leq 3 \\ y \geq 2 - \frac{1}{2}x \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} y > -\frac{1}{2}x + 2 \\ y > \frac{3}{2}x - 2 \end{array}\right\}$

51 ¡DERRIBANDO BARRAS!

Distancia entre dos puntos y valor absoluto

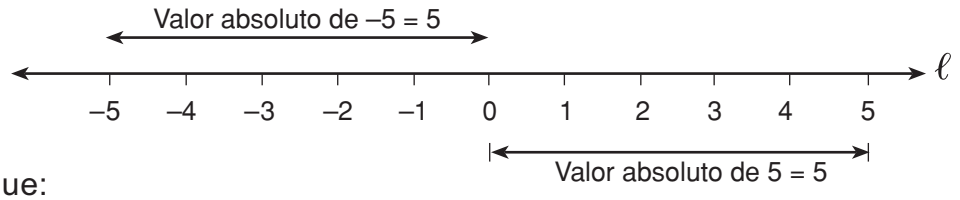
Ampliación del concepto de valor absoluto

Lectura introductoria para retomar el concepto de **valor absoluto**.

Forma una pareja y prepara tu cuaderno para seguir los ejercicios propuestos a lo largo del texto.

En la sesión 23 de séptimo grado vimos una interpretación geométrica del valor absoluto, considerándolo como la distancia entre un punto x de la recta numérica y el cero.

Ubiquemos en la recta numérica ℓ, los números 5 y -5 para encontrar su valor absoluto.



Vemos que:

- La distancia desde el origen hasta el punto 5 está dada por 5 unidades a la derecha del origen y representa el valor absoluto de 5 y se denota o $|5| = 5$
- La distancia desde el origen hasta el punto –5 está dada por 5 unidades a la izquierda del origen y representa el valor absoluto de –5. Como las ***distancias son no negativas***, decimos que $|-5| = 5$

Así, podemos definir

El ***valor absoluto*** de cualquier número real x, es x si x es positivo, es $-x$ si x es negativo y es 0 si x es igual a cero

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con esto queda claro que el valor absoluto de un número real nunca es negativo. Entonces, ¿cómo es?

Ejemplos:

1. Hallemos $|16|$ y $|-16|$

   $|16| = 16$ porque $16 > 0$

   $|-16| = -16(-16) = 16$ porque $-16 < 0$

2. Hallemos $\left|-\frac{2}{3}\right|$, $|-2|$, $|0.5|$

   $\left|-\frac{2}{3}\right| = -\left(-\frac{2}{3}\right)_{-} = \frac{2}{3}$ porque $-\frac{2}{3} < 0$

   $|-2| = -(-2) = 2$ porque $-2 < 0$

   $|0.5| = 0.5$ porque $0.5 > 0$

3. ¿Es $|a| = |-a|$ siendo a un número real?

Taller: **Distancia entre dos puntos de la recta numérica y valor absoluto.**

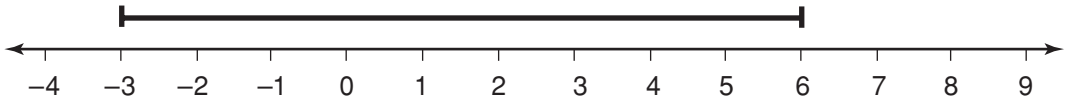
Forma un equipo de cuatro integrantes, uniendo tu pareja con otra.

1. En las siguientes representaciones en la recta numérica, halla la distancia señalada entre las coordenadas de cada par de puntos.

a)

b)

c)



Seguramente te será muy fácil contar el número de veces que cada segmento contiene el patrón de medida.

Para designar la distancia entre los puntos de coordenadas *2* y *8,* usa la notación *d (2, 8)*. ¿Cuál es su valor?

$$d(2,8) = |2-8| = |-6| = 6$$

- Y la distancia entre los puntos de coordenadas *6* y *2* ¿a qué es igual?, ¿será lo mismo *d (2, 8)* que *d (8, 2)*?

$$d(8,2) = |8-2| = |6| = 6$$

- Con base en la representación gráfica b) calcula *d (4, 9)* y *d (9, 4)*

- Según la representación gráfica c), es fácil observar que *d (–3, 6) = 9*. Haz el cálculo correspondiente.

- Calcula *d (6, – 3)*. Compara este resultado con el anterior.

> Como ves, la distancia entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* de una recta numérica, siempre es positiva, por eso puede decirse que *d (a, b) = d (b, a)* y que está dada por $|a-b|$

2. Verifica si son ciertas las siguientes igualdades:

$$|3\times 8| = |3|\times|8|$$

a) $|-4\times 5| = |-4|\times|5|$

$$|-2\times -7| = |-2|\times|-7|$$

¿Puedes generalizar?

b) $|5^2| = |5|^2$; $|-2^3| = |-2|^3$

¿Puedes generalizar?

c) $\left|\frac{24}{3}\right| = \frac{|24|}{|3|}$; $\left|\frac{4}{7}\right| = \frac{|4|}{|7|}$; $\left|\frac{-16}{4}\right| = \left|\frac{-16}{4}\right|$

¿Puedes generalizar? Habrá alguna condición para el divisor?

Compara tu trabajo y conclusiones con las de otro equipo.

Consulten los textos de matemáticas de la biblioteca y a su profesor(a).

Continúa trabajando con tu mismo equipo.

1. Resuelve aplicando el valor absoluto

   a. $-|12|$ b. $\left|-\frac{3}{4}\right|$ c. $-|3^2|$ d. $\left|\frac{-5}{8}\right|$

2. Analiza los ejercicios realizados por Antonio Cano:

   a. $|\ 2^{-3}| = |\ 2\ |^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

   b. $\frac{|\ 1\ |}{|2^{-3}|} = \frac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8$

¿Cuál es tu opinión?

   c. Aplica tu procedimiento para hallar $\left|\frac{2}{4^2}\right|$ y $-|5^{-2}|$

3. Encuentra la distancia entre cada par de puntos:

   a. -5 y 7 b. $-\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{2}$ c. $\sqrt{7}$ y -3

4. En las siguientes expresiones reemplaza el valor del literal y halla el valor absoluto.

   a. $|x|, x = -9$

   b. $|-x-7|, x = 0$

   c. $|-x-4|, x = -4$

   d. $|3x-81|, x = 5$

   e. $|12-4x|, x = -3$

5. Verifica mediante ejemplos que:

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Comparte tus resultados con los de otro equipo, si existen discrepancias consulten los textos de la biblioteca y posteriormente al profesor(a)

Trabaja en tu cuaderno en forma individual.

1. Contesta las siguientes preguntas y da ejemplos que permitan verificarlas.

   a) Si $|n| > n$, ¿qué tipo de número es n?

   b) Si $|n| = n$, ¿cómo debe ser n?

   c) Si $n > m$ y $|n| = |m|$, ¿qué clase de número debe ser m?

2. En el conjunto Z de los números enteros, considera una respuesta para cada una de las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué números enteros tienen valor absoluto mayor que 4?

   b) ¿Cuáles tienen valor absoluto menor que 4?

   c) ¿Cuáles tienen valor absoluto igual a cero?

3. Encuentra el valor absoluto de las siguientes expresiones:

a)	$\|6\| + \|-8\|$	d)	$\|-9+5\|$	g)	$\|9\| + \|-5\|$
b)	$\|-4\| + \|-5\|$	e)	$\|-9\| + \|5\|$	h)	$\|-5+9\|$
c)	$-\|-6\| - \|-6\|$	f)	$\|9+(-5)\|$	i)	$\|-5\| + \|9\|$

4. ¿Cuándo $|x+y| < |x| + |y|$?

CLAVE

4. Cuando los dos números tienen diferente signo.

3. a) 14 ; b) 9 ; c) – 12 ; d) 4 ; e) 14 ;

f) 4 ; g) 14 ; h) 4 ; i) 14

c) {0}

{ –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}

b)

{... –7, 6, –5} u {5, 6, 7,...}

2. a)

c) m es negativo
b) n es positivo o cero
1. a) n debe ser un número negativo.

52 DERRIBANDO BARRAS EN ECUACIONES E INECUACIONES

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto
Solución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Taller: **Derribando barras para resolver ecuaciones e inecuaciones**.

Forma una terna para involucrarte en este taller. Ten a la mano cuaderno, lápices de colores y regla.

I. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Aplica la definición de valor absoluto para resolver:

a) $|x-3| = 5$

◊ Por la **definición de valor absoluto** $\begin{cases} x - 3 = 5 \\ \text{ó} \\ x - 3 = -5 \end{cases}$

Tenemos ahora dos ecuaciones simples conectadas por la «ó». Ellas forman una **nueva frase** numérica compuesta, abierta.

- Resuelve cada una de las ecuaciones simples y escribe el conjunto de sus soluciones respectivo.

$x - 3 = 5$ ó $x - 3 = -5$

$x = 5 + 3$ $x = -5 + 3$

$x = 8$ $x = -2$

$\{ 8 \}$ ó $\{ -2 \}$

- ¿Cuál es entonces el conjunto de las soluciones de la frase compuesta?

Es la reunión de las soluciones de las ecuaciones simples:

$$\{ 8 \} \cup \{ -2 \} = \{ -2, 8 \}$$

◊ Verifica si los elementos de $\{ -2, 8 \}$ satisfacen la ecuación. ¿Es este el conjunto de sus soluciones?

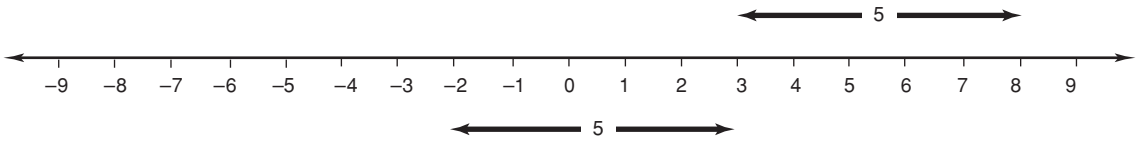
La ecuación inicial y la formada por las dos ecuaciones simples conectadas por la «ó» tienen el mismo conjunto de las soluciones, por eso se les denomina equivalentes.

◊ Busca ahora la solución mediante **interpretación geométrica** del valor absoluto.

La interpretación geométrica de la anterior igualdad permite pensar a $|x-3|$ como la distancia de x al punto de la recta numérica cuya coordenada es 3.

- ¿Cuáles son esos puntos?

Ubica el punto de coordenada 3 y a partir de él marca la distancia.



- ¿Cuáles son los extremos para que la distancia sea igual a 5?
- ¿Cuál es entonces el conjunto de las soluciones?

b) Resuelve $|x+2| = 6$

Considera $|x+2|$ como la distancia entre x y el punto de coordenada -2, es decir $|x+2| = |x-(-2)|$

e) La ecuación $|x-7| = -5$, ¿tiene solución?, ¿puede el valor absoluto de una expresión ser negativo?

II. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

A partir de tus conocimientos acerca de la resolución de inecuaciones y del concepto de valor absoluto, resuelve:

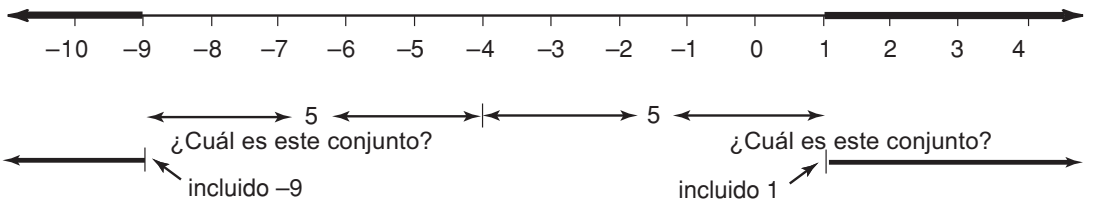
a) $|x+4| \geq 5$

- Escribe de una forma equivalente y desde el concepto de distancia el miembro izquierdo de la desigualdad.
- ¿Cuál es el conjunto de las soluciones para el que $|x-(-4)| \geq 5$?

¡Son los números reales tales que la distancia entre x y –4 es mayor o igual a 5!

- Haz la representación geométrica correspondiente.

Señala el punto de coordenada –4 y ubica los extremos de las distancias iguales a 5, ¿dónde puede la variable x, tomar sus valores?



- A partir de $|x+4| \geq 5$ obtén las dos inecuaciones equivalentes. Sigue el procedimiento:

$x + 4 \geq 5$ ó $x + 4 \leq -5$

$x \geq 5 - 4$ $x \leq -5 - 4$

$x \geq 1$ ó $x \leq -9$

El conjunto de las soluciones es la unión de los dos conjuntos soluciones: $\{x : x \geq 1, x \in \mathbb{R}\} \cup \{x : x \leq -9, x \in \mathbb{R}\}$

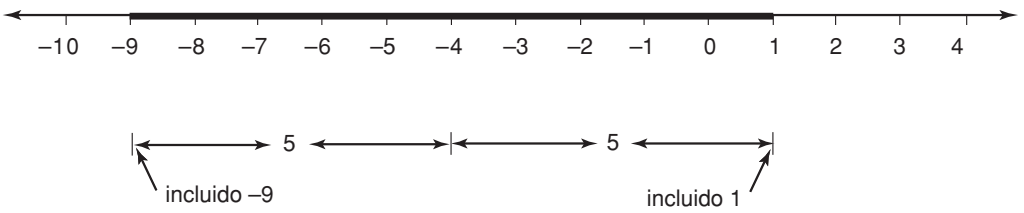
b) $|x+4| \leq 5$

- ¿Dónde debe estar x para que la distancia entre x y -4 sea menor o igual a 5?

$|x-(-4)| \leq 5$

- Haz la interpretación geométrica correspondiente.

Señala el punto de coordenada –4 y ubica los extremos de las distancias iguales a 5, ¿dónde puede x tomar sus valores?



Como puedes ver los valores de x que verifican $d(x, -4) \leq 5$ son los números reales comprendidos entre –9 y 1 incluidos ellos mismos, es decir:

$\{x : -9 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$

- Resuelve el ejercicio encontrando la desigualdad compuesta equivalente a la inecuación: $|x+4| \leq 5$

c) $|x| > 3$

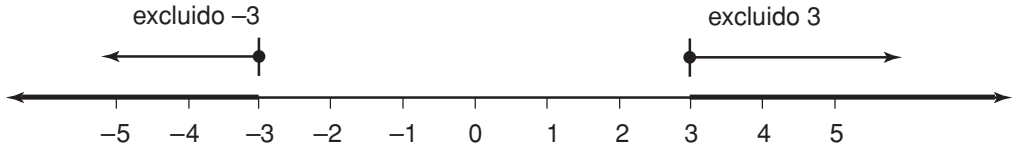
- ¿Qué valores de x satisfacen esta desigualdad o inecuación?

- ¿Cómo se interpretaría geométricamente?

Para que la inecuación dada sea cierta, los valores de x deben ser tales que:

$x > 3$ ó $x < -3$

Esta es una desigualdad compuesta de tipo «ó» equivalente a: $|x| > 3$.



- ¿Cuál es entonces el conjunto de las soluciones de la desigualdad compuesta de tipo «ó»?

¡Es la reunión de los dos conjuntos cuyos elementos son las soluciones de las desigualdades simples!

$$\{x : x < -3\} \cup \{x : x > 3\}$$

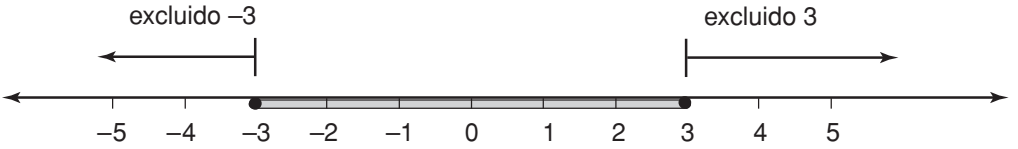
- ¿Satisfacen los elementos del **conjunto reunión** la inecuación $|x| > 3$?

Verifica con algunos valores reales, si este es el conjunto de las soluciones de la inecuación.

d) $|x| < 3$

- ¿Cuáles son los valores reales de x que satisfacen la inecuación?

Si empezamos por la **interpretación geométrica** de valor absoluto, estos valores son las coordenadas de los puntos cuya **distancia** al punto de coordenada cero, es **menor que 3**.

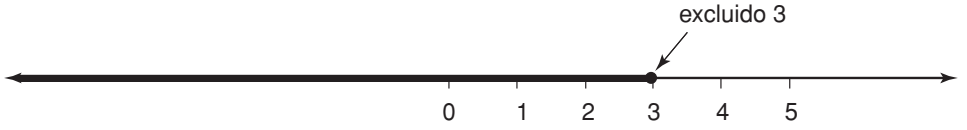


- ¿Cómo se puede caracterizar ese conjunto de números reales?

Exprésalo en tu cuaderno. Es la respuesta.

Vayámonos ahora por la **definición de valor absoluto**: $|x| < 3$ significa que $x < 3$ y $-3 < x$.

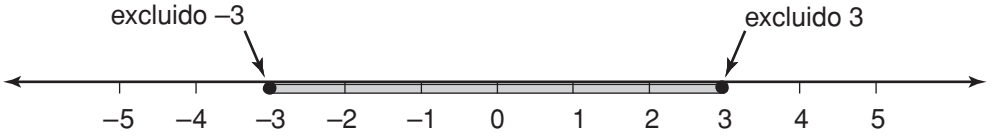
- Haz la interpretación geométrica de cada una de las desigualdades:



$\{x : x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

$\{x : x < -3, x \in \mathbb{R}\}$

Como la desigualdad compuesta es de tipo “y”, es fácilmente observable que el conjunto de las soluciones es el “traslape” o intersección de los dos conjuntos. Es decir:



- ¿Cuál es entonces el conjunto de las soluciones $|x| < 3$?

d) ¿Cuál sería el conjunto de las soluciones si se tratara de la inecuación $|x| \leq 3$?

e) ¿Cuál sería el conjunto de las soluciones para $|x| \geq 3$?

Con dos compañeros(as) forma una equipo. Trabaja en tu cuaderno.

1. De cada par de tarjetas forma la frase abreviada equivalente.

Ejemplo: Con $x \geq 3$ y $x \leq 7$ se forma $3 \leq x \leq 7$

a) $-1 < x$ y $x < 1$

b) $x < 2$ y $-2 \leq x$

2. Completa en tu cuaderno el procedimiento para hallar la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $|x+5| = 2$

- Si $x + 5 > 0$, entonces $|x+5| = x+5$ luego
  $x + 5 = 2$

  $x =$ ☐

  Si $x + 5 < 0$, entonces $|x+5| = -(x+5)$ luego
  $x + 5 = -2$

  $x =$ ☐

El conjunto de las soluciones es { , } Verifícalo.

b) $|x-3| = 8$

- Si $x-3 \geq 0$ entonces $|x-3| =$ ☐ luego

  $x-3 = -8$

  $x =$ ☐

- Si $x-3 < 0$ entonces $|x-3| = -(x-3)$ luego

  $x-3 = -8$

  $x =$ ☐

El conjunto de las soluciones es { , }. Verifícalo

3. Encuentra el conjunto de las soluciones de:

   a) $|3x-5| = 4$
   b) $|x-4| \leq 6$

Pista: Haz la interpretación geométrica pensando a $|x-4|$ como la distancia de los puntos de coordenadas x al punto de coordenada 4.

Hagan una plenaria para compartir aciertos y superar dificultades.

Resuelve en pareja

1. Si el conjunto de las soluciones, en los números reales, de una desigualdad es

   $\{x : x = 5\} \cup \{x : x < 5\}$

   a) ¿Cuál es la desigualdad?

   b) ¿Puedes escribir de otra manera el conjunto de las soluciones?

c) Haz la representación en la recta numérica.

2. Haz la gráfica de los siguientes conjuntos. La variable toma valores en el conjunto R de los números reales.

a) $\{x : -3 < x < 3\} \cap \{x : x < 0\}$

b) $\{x : -4 < x \leq 2\} \cup \{x : x > 5\}$

3. Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:

a) *8 ; –3* b) *–5 ; –11* c) *–10; – 3* d) *10 ; – 4*

4. Resuelve las siguientes proposiciones abiertas. El conjunto de sustitución es $\mathbb{R}$.

a) $|20 - 3x| = 7$ b) $|-3x + 6| < 9$

c) $|x - 4| = 4 - x$ d) $|x + 3| = |x|$

CLAVE

53

79 - 3

COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

Repaso parcial de los conocimientos adquiridos en el núcleo e integración de los mismos

El núcleo que finalizaste te amplió las posibilidades del trabajo con expresiones algebraicas y su importancia en la resolución de problemas. Al expresar éstos mediante el lenguaje algebraico pudiste apreciar su sencillez, claridad y estética, como también la facilidad para abordar estrategias en la resolución de los mismos.

¿Cómo te pareció el aporte de la geometría para modelar conceptos algebraicos y para visualizar el tratamiento de problemas?

¿Realmente lo comprendiste todo? ¿Te quedan dudas?

Para disiparlas y avanzar te proponemos esta sesión.

Forma un equipo de tres participantes y resuelve lo propuesto a continuación:

1. *La caja de disquetes.*

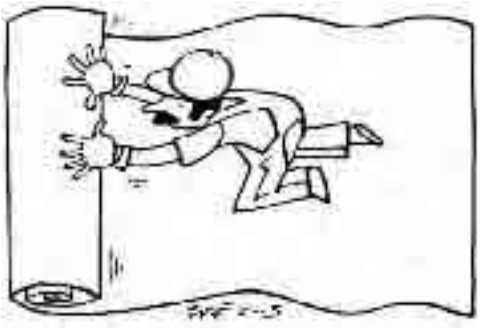
Hermes, Iván y Camilo compraron una caja de 10 disquetes para sus computadoras. El primero tomó 3, el segundo 5 y el tercero 2. Si el precio de la caja es de $9 600, ¿cuánto debe aportar cada uno?

¿Es este un problema de reparto proporcional?, ¿por qué?

¿Será cierto que $\frac{9\,600}{10} = \frac{h}{3} = \frac{i}{5} = \frac{c}{2}$, donde h, i, c representan el aporte de cada uno?

Resuelve el problema.

2. *La tela impermeabilizante.*



Con 24 rollos de tela impermeabilizante se cubrió un corredor de 18 m de largo por 80 cm de ancho. ¿Cuál será la longitud de otro corredor cuyo ancho es de 90 cm, si se cubrió con 16 rollos de dicha tela?

3. Desarrolla y simplifica las expresiones

   a) $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3)$

   b) $(x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2$

4. Calcula el valor de p para que los cocientes $\frac{2}{p-1}$ y $\frac{3}{p-2}$ sean iguales.

5. Si $a = 8+2\sqrt{3}$ y $b = 8-\sqrt{12}$ verifica que $a + b$, ab y $a^2 + b^2$ son números enteros.

Compara tu trabajo con el de otro equipo y luego en plenaria con todo el grupo.

Observa atentamente el video y anota aquellos aspectos que requieran una nueva mirada o explicación. Encontrarás sugerencias acerca de cómo resolver cierto tipo de ecuaciones.

Reúnete con un compañero(a) cercano y resuelve los siguientes ejercicios.

1. Determina el valor numérico de las incógnitas en las siguientes ecuaciones:

   a) $6m - (3m + 10) + 5 = -2(5m + 1) + 36$

   b) $\frac{8}{7y-6} = \frac{4}{3y-2}$

2. Despeja V_f en la fórmula siguiente:

   c) $a = \frac{V_f - V_i}{t}$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

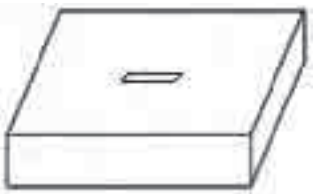
$2x + 3y + 4z = 4$ (1) $3x - 2y - 6z = 7$ (2) $5x + 7y + 8z = 9$ (3)

4. En tu cuaderno resuelve gráficamente el sistema siguiente:

$x - y = 1$ ecuación (1) $2x + y = 8$ ecuación (2)

En tu cuaderno resuelve individualmente.

5. *La cajita con monedas*



Una cajita contiene, entre monedas de $200 y de $500, un total de $8 300. Si tiene 19 monedas en total, ¿cuántas de $200 y cuántas de $500 tendrá?

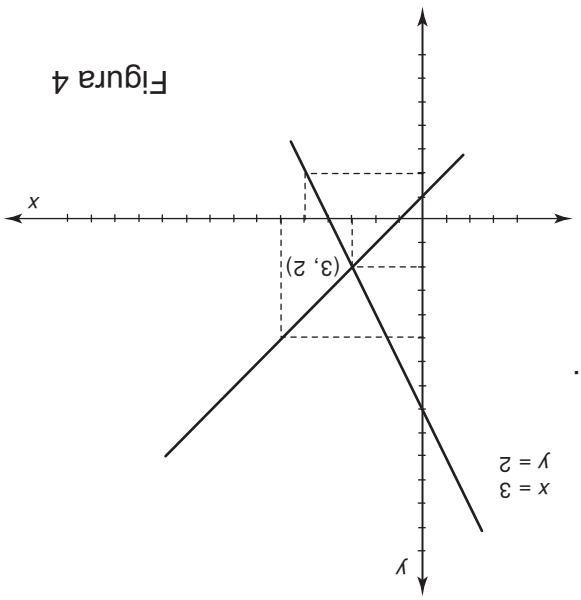
6. *La contratación de profesionales.*

Un empresa cuenta entre sus empleados con 23 matemáticos y 15 ingenieros. Se prevé contratar igual número de profesionales de estas dos carreras. ¿Al menos, cuántos de cada especialidad habrá que contratar, para que el número de ingenieros sea por lo menos igual a los tres cuartos del número de matemáticos?

Una vez que hayas terminado, consulta la clave para verificar tus resultados, en caso de duda pide la intervención de tu profesor(a).

CLAVE

Figura 4



1. a) $m = 3$; b) $y = 2$
2. $Vf = at + Vi$
3. $x = 3$; $y = -2$; $z = 1$
4. Figura 4
5. 15 monedas de $500 y 4 monedas de $200.
6. El número de matemáticos (m) es igual al número de ingenieros (i) que se van a contratar: $m = i$

$$15 + i \geq \frac{3}{4}(23 + m)$$

$$15 + i \geq \frac{3}{4}(23 + i)$$

$$60 + 4i \geq 3(23 + i)$$

$$60 + 4i \geq 69 + 3i$$

$$i \geq 9$$

54 VA Y VIENE

80 - 3 **Gráfica de funciones cuadráticas**
Identificación de la gráfica de una función cuadrática

El tema de esta sesión ya fue ampliamente tratado en el grado 8º. Lo traemos acá porque está íntimamente relacionado con los nuevos conocimiento que adquirirás en las sesiones siguientes. Esperamos que afiances tus aprendizajes, reflexiones y profundices en ellos.

Con tu equipo de trabajo haz las construcciones que te sugerimos y de tus observaciones deduce las características de las funciones cuadráticas.

1. Haz la gráfica de la función $y = x^2$, en tu cuaderno. Elabora una tabla dando valores a la variable independiente x para hallar el respectivo valor de la variable dependiente y.

x	y	**Puntos**
– 2	4	(– 2, 4)

Si $x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 = 4$

¿Qué forma tiene la gráfica que obtuviste?

¿Cómo se llama la curva obtenida?

Hacia dónde abre esta curva?

¿Cuál es su punto más bajo? ¿Cómo llamamos este punto?

2. Haz la gráfica de la función $y = -2x^2 - 1$

Completa una tabla como la siguiente:

x	y	**Puntos**
– 2	–9	(–2, –9)
⋮	⋮	⋮

Si $x = -2 \Rightarrow -2(-2)^2 - 1 = -9$

¿Cómo resultó la curva obtenida?
¿Cuál es su vértice? ¿Hacia dónde abre esta curva?
¿Corta en algunos puntos al eje de las abscisas?

Compara las gráficas de las funciones:

$$y = x^2 \qquad \text{y} \qquad y = -2x^2 - 1$$

¿Qué tienen en común? ¿Qué las hace diferentes?
¿Por qué una abre hacia arriba y otra hacia abajo?

3. El análisis de las dos gráficas que has hecho te da argumentos para hacer predicciones sobre las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = -x^2$ ¿Hacia dónde abre su gráfica? ¿Por qué?
¿Cuál es el vértice?

$y = 2x^2 + 1$ ¿Hacia dónde abre la parábola?
¿Cuál es su vértice? ¿Por qué?
¿Corta la parábola las abscisas?

4. Grafica $y = x^2 + 2x$

Haz la tabla de valores x y y que te ayudará en la construcción de la gráfica.

¿Hacia dónde abre la parábola?
¿Corta esta gráfica el eje de las abscisas?
¿En qué puntos?
¿Cuál es el vértice de esta parábola?

Si aseguramos que la gráfica de cualquier función de la forma $y = ax^2 + bx$ pasa por el punto $(0,0)$, ¿podrías explicar por qué ocurre este hecho?

5. Haz la gráfica de $y = x^2 - x + 1$.

¿Hacia dónde abre esta parábola?
¿Corta el eje de las abscisas?

6. ¿Qué opinas de las siguientes conclusiones sobre la gráfica de una función cuadrática?

   La gráfica de una función cuadrática siempre es una parábola, el sentido de ésta lo determina el coeficiente del término cuadrático; cuando éste es negativo, la parábola abre hacia abajo, esto es, su vértice es el punto más alto de ella; si el coeficiente del término cuadrático es positivo abre hacia arriba. Así mismo, el vértice puede quedar en el origen, sobre el eje de las ordenadas, en el de las abscisas o en cualquier otro punto del plano cartesiano.

Observa con atención el video, analiza con tus compañeros(as) los aspectos que encuentres más interesantes.

Analiza con tus compañeros(as) de equipo la información obtenida y contesta lo siguiente:

1. En la función $y = -3x^2$, ¿hacia dónde abrirá la parábola? ¿Por qué?

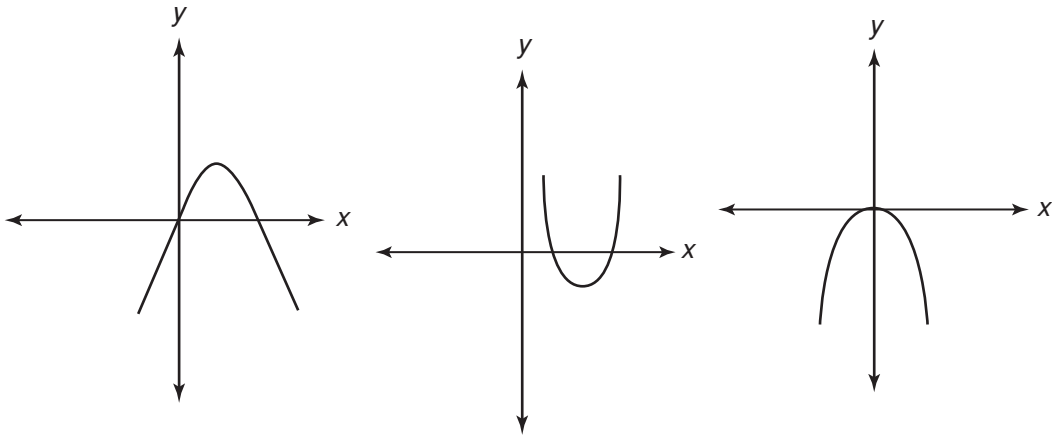
2. El vértice de la misma función, ¿en dónde queda localizado?

3. En la función $y = 3x^2 + 1$, ¿en dónde queda localizado el vértice?

4. En la función $y = x^2 + 5x$, ¿en dónde queda localizado el vértice?

Compara tus respuestas con las de otro equipo; si existen dudas, coméntalas.

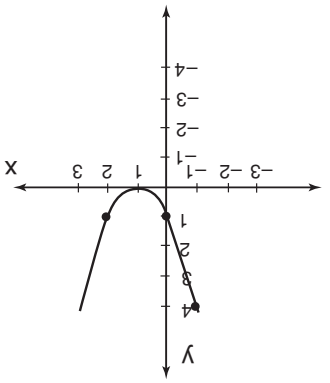
. scribe una función cuadrática que caracterice a cada una de las siguientes gráficas.

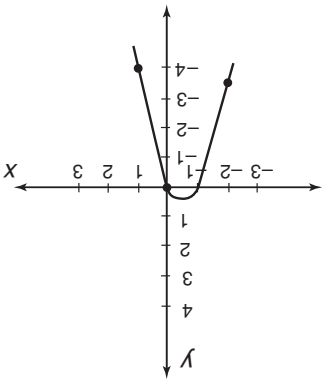


Compara y discute tu trabajo con el de tus compañeros(as). Si tienes dudas consulta con tu profesor(a).

CLAVE

a) $y = 2x^2 - 2x$ b) $y = x^2 - 2x + 1$





55

PASA TU TIEMPO... SIENDO CURIOSO

81 - 3

Ecuaciones de segundo grado
Caracterización de ecuaciones de segundo grado

Con tus compañeros(as) de grupo analiza y resuelve la siguiente situación:

Al aumentar en 6 m el área de un cierto cuadrado resulta ser 4 veces el área del cuadrado inicial. ¿Cuál es el lado del cuadrado inicial?

1. Haz un dibujo que ilustre la situación.

2. Si el lado del cuadrado inicial es x, ¿cuál es su área?

3. Si el lado del cuadrado inicial se incrementa en 6 m, ¿cómo expresas el área del nuevo cuadrado?

4. Escribe una expresión que relacione el área del nuevo cuadrado y la condición de que ésta debe ser igual a $4x^2$.

   ¿Cómo encontrarás el valor de x de la expresión: $(x + 6)^2 = 4x^2$?

   ¿Por qué es fácil extraer la raíz cuadrada en cada miembro de la igualdad?

   ¿Cuál es el valor de x? ¿Cuál es el lado del cuadrado inicial?

Compara tus resultados con los de tus compañeros(as).

Lee, analiza y realiza los desarrollos que te ayuden a comprender el siguiente texto:

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Existe infinidad de problemas que se modelan con una ecuación lineal, con un sistema de ecuaciones, y que al tener en cuenta las condiciones dadas se llega a expresiones que nos llevan a las soluciones deseadas. Sin embargo hay problemas como:

El perímetro de un rectángulo es de 70 cm, y su área es de 300 cm^2. ¿Cuál es la medida de la base y la altura?

Se sabe que una expresión para calcular el perímetro del rectángulo es:
$P = 2\,(a + b)$

Y para calcular su área: $A = bh$ entonces se tiene:

$a + b = 35$ *(semiperímetro)* ⟶ *ecuación (1)*
$ab = 300$ *(base por altura)* ⟶ *ecuación (2)*

Despejando b de la ecuación (1), se tiene:

$b = 35 - a$
$a\,(35 - a) = 300,$

Sustituyendo en ecuación (2), resulta: efectuando las operaciones en el primer miembro e igualando con cero, se obtiene:

$$-a^2 + 35^a - 300 = 0$$

Esto se considera una ecuación de segundo grado, ya que el exponente mayor en el polinomio de la izquierda es 2.

De este modo, una ecuación de segundo grado con una incógnita es cualquier ecuación que se puede escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

x es la incógnita.
a, b y c son constantes.

Ejemplos de ecuaciones de segundo grado son como las siguientes:

1. $x^2 + 3x - 15 = 0$

2. $4x^2 - 7 = 0$

3. $3x^2 + 4x = 0$

4. $x^2 + 5x = 18$, porque pasando 18 al primer miembro, resulta $x^2 + 5x - 18 = 0$

5. $x^3 + 3x^2 = x^3 + 18$, porque pasando todos los términos al primer miembro y reduciendo términos semejantes, se obtiene $3x^2 - 18 = 0$

6. $x = \frac{2}{x} - \frac{3}{4}$, porque puede reducirse a: $4x^2 + 3x - 8 = 0$

Compruébalo en tu cuaderno.

Si se observan los términos del polinomio de segundo grado, que en la ecuación se ha igualado a 0, éstas pueden clasificarse así:

a) ***Ecuaciones completas***	$ax^2 + bx + c = 0$
b) ***Ecuaciones incompletas***	$ax^2 + bx = 0$
	$ax^2 + c = 0$

Ecuaciones completas de segundo grado

Se llama ecuación completa de segundo grado con una incógnita, aquella operación en que, después de haber realizado las transformaciones y reducciones posibles, se cuenta con un término cuadrático **(tc)**, con un término lineal **(tl)** y con un término independiente **(ti)**.

Ejemplos:

	(tc)	**(tl)**	**(ti)**
1.	$x^2 - 3x + 6 = 0$	x^2	$-3x$	6
2.	$x^2 - x - 2 = 0$	x^2	$-x$	-2
3.	$3x^2 + 5x - 28 = 0$	$3x^2$	$5x$	-28
4.	$2x^2 - 6x - 30 = 0$	$2x^2$	$-6x$	-30

La forma general de la ecuación completa de segundo grado es la siguiente:

$$a x^2 + bx + c = 0, \text{ donde}$$

$a\,x^2$	es el término cuadrático
bx	es el término lineal
c	es el término independiente

Ecuaciones incompletas de segundo grado

En toda ecuación de segundo grado, después de haber hecho las transformaciones y reducciones posibles, debe figurar necesariamente el término de segundo grado, pero puede faltar el término de primer grado o el término independiente; estos casos reciben la denominación de ***incompleta***.

$3x^2 - 6x = 0$	Ecuación incompleta de segundo grado por carecer de término independiente.
$x^2 - 25 = 0$	Ecuación incompleta de segundo grado por carecer de término de primer grado.

La forma general de una ecuación incompleta de segundo grado en la que no existe término independiente, es:

$$a\,x^2 + bx = 0$$

Si la ecuación carece del término de primer grado, la forma general es:

$$a\,x^2, + c = 0$$

Ejemplos:

$x^2 + 5x = 0$ $x^2 - 2x = 0$ $3\,x^2 + 9x = 0$	Carece de término independiente, por lo tanto pertenecen a la forma $a\,x^2 + bx = 0$
$9\,x^2 - 7 = 0$ $4\,x^2 + 25 = 0$ $m^2 - 12 = 0$	Carecen de término lineal, por lo tanto pertenecen a la forma $a\,x^2 + c = 0$

Observa con atención el video, comenta con tus compañeros(as) los aspectos que más te hayan interesado.

Con un compañero(a) resuelve:

- ¿Cómo expresas una ecuación general de segundo grado?
- ¿Es la siguiente expresión una ecuación de segundo grado? ¿Qué haces para comprobarlo?

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

- ¿Cómo caracterizas la ecuación de segundo grado que tiene la siguiente expresión?

$$(2x - 5)(2x + 5) = 0$$

Compara tus resultados con los encontrados por tus compañeros(as).

En forma individual resuelve:

1. De las siguientes ecuaciones de segundo grado, menciona cuáles son completas y cuáles incompletas, indicando en estas últimas el término que falta.

   a) $x^2 = 3$

   b) $x^2 + x - 3 = 0$

   c) $3x^2 = -9x$

2. Identifica cada uno de los términos de la siguiente ecuación:

$$3x + 7 = x^2$$

3. Transforma la siguiente ecuación de segundo grado, que parece ser de primer grado, e indica si es completa o incompleta. En caso de ser incompleta menciona qué término le falta.

$$x(2x + 3) + 2 = -2$$

4. ¿Cuál es la diferencia que existe entre una ecuación completa y una incompleta de segundo grado?

Compara tus respuestas con la clave y, si tienes dudas, pregunta al profesor(a).

CLAVE

1. a) Incompleta, falta el término lineal, b) completa. c) incompleta falta el término independiente.

2. Término cuadrático x^2. Término lineal $3x$. Término independiente 7.

3. $2x^2 + 3x = 0$ incompleta falta el término independiente.

4. En que la ecuación incompleta de segundo grado puede carecer de término lineal o independiente y la completa tiene todos los términos.

56

82 - 3

¡TÚ SIEMPRE PUEDES!

Solución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$
Resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$

Con tus compañeros(as) de grupo.

Para encontrar las soluciones o raíces de algunas ecuaciones de segundo grado seguramente lo harás sin mayores problemas. Pruébalo:

1. Resuelve: $x^2 - 16 = 0$

   a) Modifica la expresión para tener a qué es igual x^2

   b) Extrae la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación.

      ¿Por qué hay dos soluciones?

   c) Reemplaza cada valor encontrado en la ecuación y verifica si obtienes 0.

Lee y analiza el texto, con tus compañeros(as).

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS DE LA FORMA $ax^2 + c = 0$

Las soluciones o raíces de una ecuación son los valores de las incógnitas que satisfacen a esa ecuación.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita admiten una sola solución o raíz. Las ecuaciones de segundo grado tienen siempre dos soluciones o raíces, porque existen dos valores de la incógnita que satisfacen a la ecuación.

Observa, mediante algunos ejemplos sencillos, el procedimiento a seguir para resolver este tipo de ecuaciones.

1. Sea resolver la ecuación $x^2 - 36 = 0$

   Sumando 36 en cada lado de la igualdad, se tiene:

   $$x^2 = 36$$

   Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, se obtiene

   $$x = \pm\sqrt{36}$$

   Por lo tanto, las raíces son:

   $$x_1 = 6$$

   $$x_2 = -6$$

   Comprobación

   Para $x^1 = 6$
   $(6)^2 - 36 = 0$

   $\boxed{36 - 36 = 0}$

   Para $x_2 = -6$
   $(-6)^2 - 36 = 0$

   $\boxed{36 - 36 = 0}$

2. Resolver la ecuación $3x^2 - 15 = 0$

   Sumando 15 en los dos miembros de la igualdad:

   $$3x^2 = 15$$

   Dividiendo los dos miembros entre 3, coeficiente del término de segundo grado, se tiene:

   $$x^2 = 5$$

   Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros, se obtiene:

   $$x = \pm\sqrt{5}$$

Las raíces son:

$$x_1 = +\sqrt{5}$$

$$x_2 = -\sqrt{5}$$

En este caso, resulta también que las raíces son números simétricos.

Comprobación

Para

$$x_1 = +\sqrt{5}$$

$$3\left[+\sqrt{5}\right]^2 - 15 = 0$$

$$3(5) - 15 = 0$$

$$\boxed{5 - 15 = 0}$$

Para

$$x_2 = -\sqrt{5}$$

$$3\left[-\sqrt{5}\right]^2 - 15 = 0$$

$$3(5) - 15 = 0$$

$$\boxed{15 - 15 = 0}$$

En general, la ecuación incompleta de segundo grado de la forma

$$ax^2 + c = 0$$

se resuelve siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores.

Restando c en los dos miembros de la igualdad:

$$ax^2 = -c$$

Debe tenerse muy en cuenta que el término $-c$ que figura en el segundo miembro, representa únicamente el término independiente, con el signo contrario al que poseía en el primer miembro.

Dividiendo los dos miembros entre el coeficiente de x^2 queda:

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Las dos raíces de la ecuación son:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Con base en lo anterior, se concluye que:

> La ecuación incompleta de segundo grado de la forma $ax^2 + c = 0$ tiene siempre dos soluciones, que son dos valores simétricos. Éstos se encuentran extrayendo la raíz cuadrada del cociente que resulta de dividir el término independiente, con signo contrario, entre el coeficiente de x^2, teniendo en cuenta el doble signo $\pm$ de la raíz cuadrada.

Observa el video que puede aclararte algunas dudas que tengas sobre la solución de ecuaciones tratadas en esta sesión.

Con un compañero(a)

1. Explica el procedimiento que usas para encontrar la solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + c = 0$.

2. Resuelve en tu cuaderno:

   a) $2x^2 - 72 = 0$ b) $3x^2 - 9 = 0$ c) $5x^2 - 8 = 0$

3. ¿Puedes resolver la siguiente ecuación?

   $x^2 + 4 = 0$ ¿Por qué?

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as).

Si tienes dudas consulta con tu profesor(a).

Resuelve y comprueba en forma individual los siguientes problemas:

1. $3x^2 = 11$

2. El área de un triángulo es 54 cm^2 y su altura es el triple de la base. Hallar sus dimensiones.

Consulta la clave de esta sección, que aparece enseguida. En caso de duda pregúntale a tu profesor(a).

CLAVE

1. $x_1 = +\sqrt{\frac{11}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{11}{3}}$ 2. base = 6 cm altura = 18 cm

57

83 - 3

SOLUCIONES SIMÉTRICAS

Gráfica de funciones de la forma $ax^2 + c = y$
Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

Como recordarás, el simétrico de un número es el mismo número, pero con signo contrario, ahora, ¿qué crees que indique el título?

Lee con atención y analiza el siguiente texto:

GRÁFICA DE ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + c = 0$

En la resolución de ecuaciones cuadráticas es conveniente visualizar gráficamente cómo presentar dichas ecuaciones, para ello se debe tener en cuenta que las ecuaciones son igualdades con respecto a cero, las que se estudiarán en esta sesión son de la forma $ax^2 + c = 0$.

Con polinomio asociado a la ecuación: $ax^2 + c$ se puede establecer la función cuadrática

$$y = ax^2 + c$$

Esta función puede representarse mediante una gráfica dando valores a la variable x.

Veamos su ejemplo:

ada la ecuación $x^2 - 4 = 0$

La función cuadrática correspondiente es:

$$y = x^2 - 4$$

Para graficar esta función ayuda la elaboración de una tabla asignando valores a x, entre –3 y 3 para hacerla fácil, en este ejemplo:

$$y = x^2 - 4$$

Al efectuar las sustituciones correspondientes en la función, se tiene:

Si $x = -3$, entonces:

$y = (-3)^2 - 4$

$y = 9 - 4$

$y = 5$

Si $x = -2$, entonces $y = 0$

Si $x = -1$, entonces $y = -3$

Si $x = 0$, entonces $y = -4$

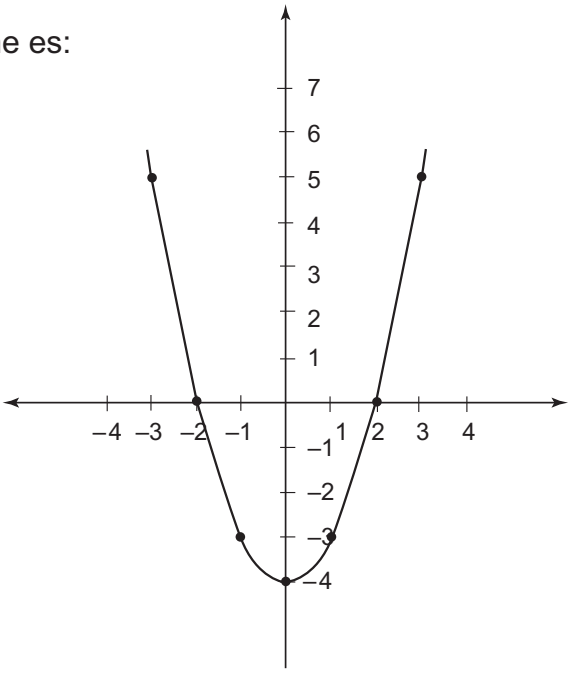
Si $x = 1$, entonces $y = -3$

Si $x = 2$, entonces $y = 0$

Si $x = 3$, entonces $y = 5$

x	*y*	**Puntos**
–3	5	(–3, 5)
–2	0	(–2 , 0)
–1	–3	(–1, –3)
0	–4	(0 , –4)
1	–3	(1, – 3)
2	0	(2, 0)
3	5	(3, 5)

La gráfica que se obtiene es:



De la gráfica se observa que la parábola corta al eje de las abscisas, en los puntos $2y - 2$:

$$x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -2$$

¿Qué le ocurre a la función $y = x^2 - 4$ en estos puntos?

Si $x_1 = 2$

$$y = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Si $x_2 = -2$

$$y = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

En estos puntos se cumple que:

$$0 = x^2 - 4$$

Es decir que cuando la función toma el valor 0, se tiene la ecuación que permite hallar los ceros de la función.

En resumen, cuando se tiene una función de la forma $y = ax^2 + c$, la ecuación $0 = ax^2 + c$ permite encontrar los ceros de la función.

En la gráfica de la función los puntos de corte de ésta con el eje de las abscisas representan las soluciones o raíces de la ecuación:

$(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$

Si en la ecuación despejas la variable x también encuentras las raíces o soluciones:

En el ejemplo:

$$0 = x^2 - 4$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x_1 = +\sqrt{4} = 2$$
$$x_2 = -\sqrt{4} = -2$$

En la ecuación general, es decir cuando el coeficiente de x es a se tiene:

$$0 = ax^2 + c$$

y cuyas raíces o soluciones ya conoces:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \cdot \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Es interesante que recuerdes las características de la función $y = ax^2 + c$

- Es una parábola.
- Su representación en el plano cartesiano es una parábola simétrica respecto al eje de las ordenadas.
- El punto máximo o mínimo se consigue cuando

  $x = 0$ y $y = c$, $(0, c)$

- Los puntos de corte de la curva con el eje de las abscisas permiten encontrar sus raíces.

$$\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right) \; ; \; \left(-\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

- ¿Cómo sabes si la curva se abre hacia la parte positiva del eje y o hacia su parte negativa?

Comenta tus impresiones con tus compañeros(as) y el profesor(a).

Observa con atención el video. Si tienes inquietudes coméntalas con tus compañeros(as).

Con un compañero(a) trabaja sobre los siguientes cuestionamientos:

2. En la ecuación: $7x^2 - 49 = 0$

   ¿Cuál es el valor del término independiente?

   ¿Cuál es el término cuadrático?

   Al graficar la función asociada $y = 7x^2 - 49$

   ¿Cómo se obtienen las raíces de la ecuación?

   ¿Cuál es el punto vértice de la parábola?

2. Calcula las raíces y verifica que son soluciones de la ecuación.

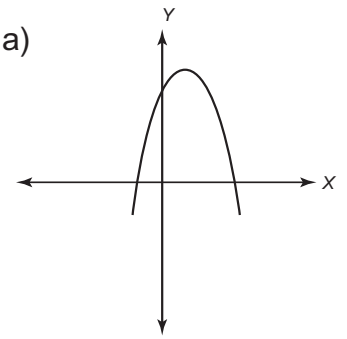
Comenta tus hallazgos con otros grupos.

En forma individual, trabaja en tu cuaderno.

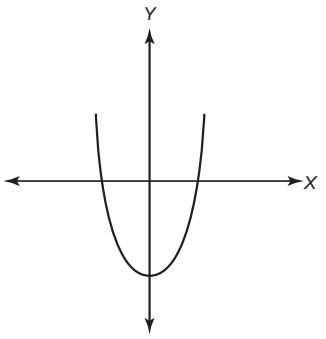
1. Si las raíces de una ecuación cuadrática son $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$, realiza un esquema de la gráfica de la función cuadrática correspondiente; debes considerar que el término cuadrático puede ser positivo o negativo y, además, que la parábola corta al eje de las abscisas en dichos valores.

2. Señala las gráficas que correspondan a funciones que dan origen a las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

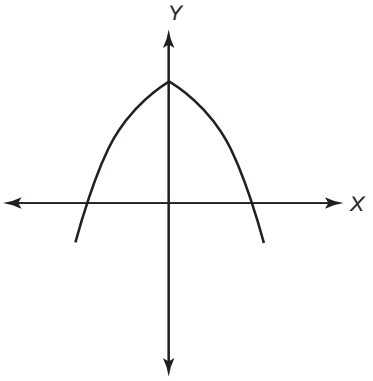
a)



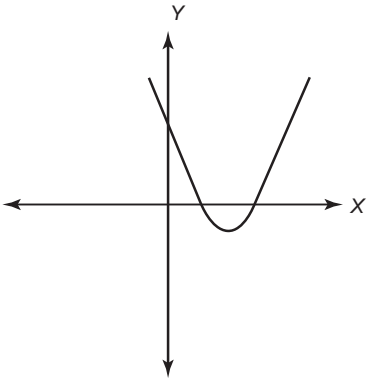
b)



c)



d)



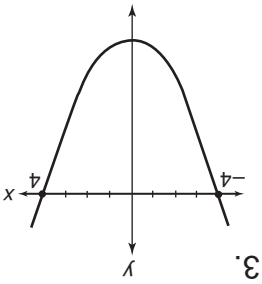
3. En tu cuaderno obtén gráficamente las raíces de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ mediante la gráfica de la función correspondiente.

Compara tus resultados con los de otro compañero(a), si existen dudas consulta la clave.

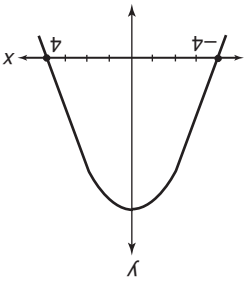
CLAVE

1. falta 2, b) , c)

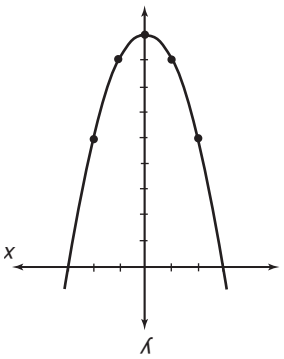
3.



Cuando el término cuadrático es negativo



Cuando el término cuadrático es positivo



58

SEPARACIÓN NECESARIA

84 - 3

Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ I
Obtención de las raíces de una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$ por factorización

Con tu grupo de trabajo.

Ya conoces y has estudiado ecuaciones y funciones cuadráticas. Afrontar un problema puede ser un buen camino para profundizar y aprender más acerca del tema.

Se sabe que el cuadrado de un número es igual al doble de dicho número. ¿De qué número estamos hablando?

¿Cómo expresas el cuadrado de un número cualquiera?

¿Cómo expresas el doble de dicho número?

Si estos dos valores son iguales, qué expresión matemática representa esta situación?

Tus respuestas te han llevado a la siguiente expresión:

$$x^2 - 2x = 0$$

Explícala.

¿Cómo saber cuál es el valor de x?

Intenta factorizando la x

$$x\,(\,x - 2\,) = 0$$

Para que el producto sea 0, uno de los factores debe ser 0, o los dos.

Si $x = 0$ ya tienes una solución: el cuadrado de 0 es 0 y el doble de 0, también es 0.

Si $(x - 2) = 0$ ¿cuánto vale x?

¿Satisface esta solución las condiciones del problema inicial? Explica.

Comenta tu trabajo con tus compañeros(as).

Observa con atención el video, te aclarará dudas que puedas tener.

Con tu compañero(a) de grupo, analiza y resuelve:

1. ¿Qué términos tiene una ecuación de la forma: $ax^2 + bx = 0$?

   ¿Por qué la factorización es una buena estrategia para encontrar las raíces de esta ecuación?

2. Resuelve las siguientes ecuaciones, ayúdate con la factorización.

a) $7x^2 + 21x = 0$ b) $6x^2 - 2x = 4x^2 + 5x$

Comparte tus resultados con otro grupo.

Individualmente, resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno.

a) $2x(x + 1) - x(x - 1) = 0$ b) $6x(-x + 2) = 0$

Compara tus resultados con la clave. Si tuviste errores, rectifica tu procedimiento o consulta a tu maestro(a).

CLAVE

A) $x_1 = 0;\ x_2 = -3$ B) $x_1 = 0;\ x_2 = 2$

59

85 - 3

¡QUÉ EXIGENTES!

Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ II
Obtención de raíces de una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$
Completando el trinomio cuadrado perfecto

Como ya has visto, una expresión de la forma $ax^2 + bx$ puedes transformarla en un trinomio cuadrado perfecto; este procedimiento puedes aplicarlo en la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Lee, analiza y trae a tu trabajo conocimiento que ya tienes sobre el tema. Hazlo con un compañero(a).

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + bx = 0$ II

Otra alternativa para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$, es utilizar el procedimiento que se denomina: completar el trinomio cuadrado perfecto.

Consiste en completar un trinomio cuadrado perfecto (TCP) en la expresión del miembro izquierdo, y posteriormente factorizarlo para resolver la ecuación.

Ejemplo:

El cuadrado de un número, más diez veces su valor, es igual a cero. ¿Cuál es ese número?

Sea x el número, su cuadrado es x^2 y diez veces su valor es 10x; entonces se plantea la siguiente ecuación:

$$x^2 + 10x = 0$$

Para resolver la ecuación se sigue este procedimiento:

Se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x a ambos miembros.

$$x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 0 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

Quedando en el primer miembro un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 10x + 25 = 25$$

Se factoriza el primer miembro obteniéndose un binomio al cuadrado.

$$(x + 5)^2 = 25$$

Se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros de la igualdad.

$$\sqrt{(x+5)^2} = \pm\sqrt{25}$$

De donde queda:

$$x + 5 = + 5$$

Para encontrar x_1, se toma el segundo miembro como $+5$ y para x_2 se considera como -5.

Para x_1 Para x_2

$x + 5 = 5$ $x + 5 = -5$

Restando 5 a ambos miembros de la igualdad se tiene:

$x + 5 - 5 = 5 - 5$ $x + 5 - 5 = -5 - 5$

$x_1 = 0$ $x_2 = -10$

Entonces, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -10$

Comprobación

Sustituyendo $x_1 = 0$ en

$$x^2 + 10x = 0$$
$$(0)^2 + 10(0) = 0$$
$$0 + 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Sustituyendo $x_2 = -10$

$$x^2 + 10x = 0$$
$$(-10)^2 + 10(-10) = 0$$
$$100 - 100 = 0$$
$$0 = 0$$

Solución del problema

El número buscado puede ser 0 ó -10

Observa con atención el video. Enriquecerás tus conocimientos.

Continúa trabajando en equipo para analizar la información obtenida en el video y la lectura del texto. Contesta las preguntas siguientes.

¿Qué procedimientos conoces para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$?

¿De qué manera transformas una expresión de la forma $ax^2 + bx$ en un trinomio cuadrado perfecto, si $a \neq 1$?

¿Qué procedimiento realizas para completar en trinomio cuadrado perfecto una expresión de la forma $ax^2 + bx$, si $a = 1$?

Explica, brevemente, el procedimiento de completar un trinomio cuadrado perfecto para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$

Compara tus respuestas con las de otro compañero(a), si no coinciden, consulta a tu profesor(a).

Trabaja con un compañero(a).

En la ecuación $x^2 + 12x = 0$

- ¿Qué término sumarás a cada miembro de la ecuación para tener un trinomio cuadrado perfecto?

- Factoriza el trinomio cuadrado perfecto que completaste en el primer miembro de la igualdad.
- Extrae la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad.
- ¿Qué valores de x obtienes en ese procedimiento?
- ¿Cómo encuentras la otra raíz de la ecuación?

Compara tus resultados con los obtenidos por otros(as) compañeros(as).

En tu cuaderno resuelve individualmente las siguientes ecuaciones, completando el trinomio cuadrado perfecto.

$a)\ x^2 + 20x = 0$ $\qquad$ $b)\ 4x^2 + 24x = 0$

Compara tus resultados con la clave, si existen diferencias, consulta a tu profesor(a).

CLAVE

$a)\ x_1 = 0,\ x_2 = -20$ $\qquad$ $b)\ x_1 = 0,\ x_2 = -6$

60

UNA SIEMPRE ES CERO

86 - 3

Gráfica de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx$
Solución gráfica de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

Trabaja con tu equipo.

En las sesiones anteriores has venido estudiando las ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx = 0$$

Nos preguntamos cómo resolverlas gráficamente.

De nuevo analicemos la relación entre la ecuación $ax^2 + bx = 0$ y la función $ax^2 + bx = y$.

Claramente observas que la ecuación es la expresión que se obtiene cuando la función y toma el valor 0.

1. Grafica la función que corresponde a la ecuación $x^2 + 2x = 0$

Haz una tabla donde coloques los valores que toma la función cuando le asignas valores a 0.

$y = x^2 + 2x$

x	y	**Puntos**
2	8	(2, 8)
1		
0		
–1		
–2		
–3		

Si $x = 2$ entonces:
$y = 2^2 + 2x2 = 8$

Haz la gráfica en el plano cartesiano.

¿Cuál es el punto vértice de la parábola?

¿Hacia dónde abre la parábola?

¿Qué valores toma x en los puntos de corte de la gráfica con el eje de las abscisas?

¿Satisfacen estos valores de x a la ecuación $x^2 + 2x = 0$?

¿Cómo dirías tú que la ecuación $x^2 + 2x = 0$ es representada en la gráfica?

Comparte tus hallazgos con los obtenidos por tus compañeros(as).

Ve con atención el video, éste te aclarará cómo interpretar una ecuación cuadrática asociada a la función $y = ax^2 + bx$, para encontrar los ceros. Discute con tus compañeros los aspectos relevantes.

Forma un equipo de trabajo y contesta lo siguiente:

En la gráfica de una función que corresponde a una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$, ¿dónde queda el vértice de la parábola?

¿Qué caracteriza a sus raíces?

Una de las raíces es 0, para todos los casos, ¿por qué?

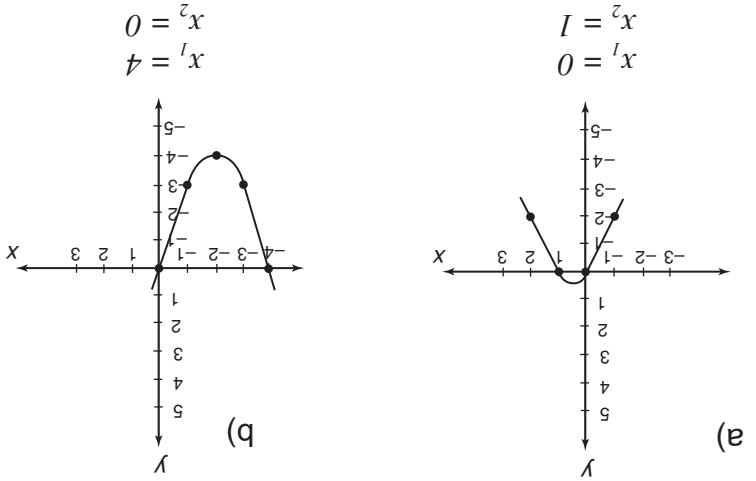
Explica cómo hallar gráficamente los ceros de la ecuación $ax^2 + bx = 0$.

En tu cuaderno obtén, gráficamente en forma individual, las raíces de las ecuaciones que se tienen a continuación:

a) $-x^2 + x = 0$ *b)* $x^2 + 4x = 0$

Compara tus resultados con la clave, si tienes dudas pregunta al profesor(a).

CLAVE



61

DOBLE SOLUCIÓN

87 - 3

Solución de ecuaciones cuadráticas completas
Factorización de ecuaciones cuadráticas completas

En esta sesión aplicarás los conocimientos que has adquirido en sesiones anteriores acerca de la factorización.

Trabaja con tus compañeros(as).

1. Factoriza los siguientes trinomios.

   a) $x^2 + 5x - 69$
   b) $x^2 + x - 12$
   c) $x^2 + 7x + 6$

   ¿Cómo procedes en cada caso?

   ¿Qué tienen en común los binomios que resultan como factores?

2. Factoriza los siguientes trinomios

   a) $x^2 + 6x + 9$
   b) $x^2 + 14x + 49$
   c) $x^2 + 2x + 1$

   ¿Qué tienen de especial estos trinomios? ¿Por qué resulta fácil factorizar?

   ¿Cómo son los binomios que resultan como factores?

3. Observa la siguiente ecuación cuadrática

   $$x^2 - x - 12 = 0$$

   ¿Por qué decimos que se trata de una ecuación cuadrática completa?

   Si factorizas el trinomio, ¿cómo expresas la ecuación? Escríbela.

   Seguramente has llegado a expresar la ecuación como un producto de factores igual a 0. ¿Cómo procedes en este caso para hallar las soluciones de la ecuación?

   ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - x - 12 = 0$?

4. Usa la factorización que hiciste en 1 para encontrar las raíces de las ecuaciones:

   a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
   b) $x^2 - 7x + 6 = 0$

5. Escribe las siguientes ecuaciones factorizando los trinomios:

   a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
   b) $x^2 - 14x + 49 = 0$
   c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

   Si las ecuaciones de segundo grado tienen dos raíces o soluciones, ¿cómo son estas raíces en las ecuaciones anteriores?

En una plenaria con los compañeros(as) y el profesor(a) discutan los resultados obtenidos en tus trabajos.

Con tus compañeros(as) y, luego de analizar las siguientes preguntas, contéstalas.

1. Explica, con tus propias palabras, el procedimiento de factorizar una ecuación cuadrática en donde se obtengan dos binomios con término común.

2. ¿Cómo se comprueba que las raíces de una ecuación cuadrática son verdaderas?

Compara tus respuestas con las de otros grupos, si hay dudas pregunta al maestro(a).

Observa con atención el video. Comenta con tus compañeros(as) los aspectos más importantes de éste.

En forma individual determina en tu cuaderno las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 8x - 65 = 0$

b) $x^2 + 3x - 40 = 0$

c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

Compara tus resultados con los de otro compañero, en caso de que sean diferentes recurre a la clave.

CLAVE

a) $x_1 = -13$ $\quad x_2 = 5$

b) $x_1 = -8$ $\quad x_2 = 5$

c) $x_1 = -4$ $\quad x_2 = -4$

62 LA GRAN CURVA

88 - 3 **Gráfica de funciones cuadráticas completas**
Solución de ecuaciones cuadráticas completas

La gráfica de una función cuadrática es una parábola y su principal característica es que el vértice puede tener tres posiciones, esto es, quedar sobre el eje de las abscisas, sobre el de las ordenadas o fuera de ellas; para conocer este comportamiento observa el video, ya que en éste podrás apreciarlo.

Analiza los desarrollos presentados en la siguiente lectura:

GRÁFICA DE ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS

Por último, se verán las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, al localizar las raíces de esta ecuación, en la gráfica de la función correspondiente, se observa que el vértice de la parábola puede quedar sobre el eje de las ordenadas o en el de las abscisas, también fuera de ellos, como se muestra a continuación:

1. Obtener la solución gráfica de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$

Para tabular la función asociada, esto es $y = x^2 + x - 6$ se procede así:
(Hazlo, también en tu cuaderno)

$y = x^2 + x - 6$

x	y	Puntos
–3	0	(–3 , 0)
–2	–4	(–2, –4)
–1	–6	(–1, –6
–1/2	–25/4	(–1/2, –25/4)
1	–4	(1, –4)
2	0	(2, 0)
3	6	(3, 6)

Si $x = -3$, entonces
$y = (-3)^2 + (-3) - 6 = 0$
$= 9 - 3 - 6 = 0$
$y = 0$

Si $x = -2$, entonces $y = -4$

Si $x = -1$, entonces $y = -6$

Si $x = -\frac{1}{2}$ entonces $y = -\frac{25}{4}$

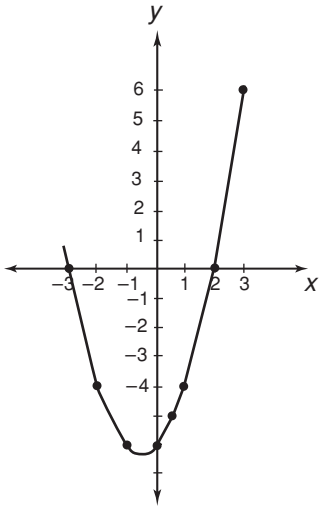
Si $x = 0$, entonces $y = -6$

Si $x = 1$, entonces $y = -4$

Si $x = 2$, entonces $y = 0$

Si $x = 3$, entonces $y = 6$

Por lo tanto, la gráfica queda:



Como se observa, el vértice de la parábola se encuentra fuera del eje de las ordenadas y como la parábola corta al eje de las abscisas en los puntos -3 y 2, esto indica que las raíces de la ecuación original son:

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = 2$$

Para comprobar que estas raíces satisfacen a la ecuación original, se sustituyen en ésta y se debe cumplir la igualdad, esto es:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Cuando $x_1 = -3$, entonces:

$$\begin{aligned} (-3)^2 + (-3) - 6 &= 0 \\ 9 - 3 - 6 &= 0 \\ 9 - 9 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Cuando $x_2 = 2$, entonces:

$$\begin{aligned} 2^2 + 2 - 6 &= 0 \\ 4 + 2 - 6 &= 0 \\ 6 - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Esto indica que las raíces de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, son $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$

2. Obtener la solución gráfica de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$

La función correspondiente y su tabulación queda así:

$$x^2 + 3x - 4 = y$$

x	y	**Puntos**
–4	0	(–4, 0)
–3	–4	(–3, –4)
–2	–6	(–2, –6)
–1	–6	(–1, –6)
–3/2	–25/4	(–3/2, –25/ 4)
0	–4	(0, –4)
1	0	(1, 0)
2	6	(2, 6)

Si $x = -4$, entonces:

$y = (-4)^2 + 3(-4) - 4$

$= 16 - 12 - 4$

$y = 0$

Si $x = -3$, entonces $y = -4$

Si $x = -2$, entonces $y = -6$

Si $x = -1$, entonces $y = -6$

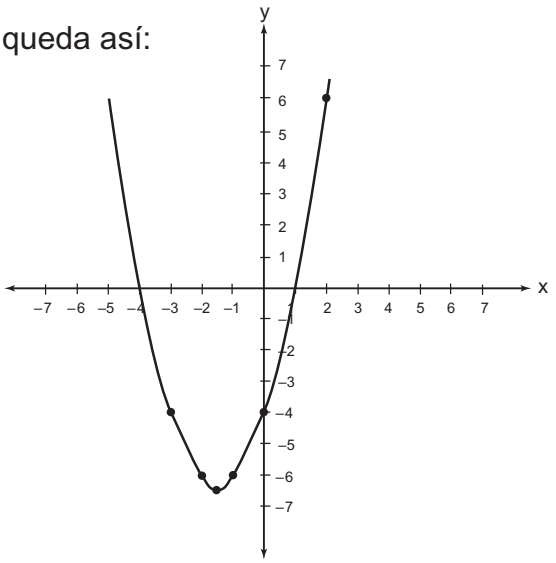
Si $x = -\frac{3}{2}$ entonces $y = -\frac{25}{4}$

Si $x = 0$, entonces $y = -4$

Si $x = 1$, entonces $y = 0$

Si $x = 2$, entonces $y = 6$

Por lo tanto, la gráfica queda así:



Como se observa, el vértice se halla fuera del eje de las ordenadas, la parábola corta al eje de las abscisas en los puntos –4 y 1, lo cual indica que las raíces de la ecuación original son:

$x_1 = -4$ y $x_2 = 1$

Para comprobar que estas raíces satisfacen a la ecuación original, se sustituyen en ésta y se debe cumplir la igualdad, esto es:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Cuando $x_1 = -4$, se tiene:

$$(-4)^2 + 3(-4) - 4 = 0$$

$$16 - 12 - 4 = 0$$
$$16 - 16 = 0$$
$$0 = 0$$

Cuando $x_2 = 1$, se tiene:

$$1^2 + 3(1) - 4 = 0$$
$$1 + 3 - 4 = 0$$
$$4 - 4 = 0$$
$$0 = 0$$

Esto indica que las raíces de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$, son:

$$x_1 = -4 \text{ y } x_2 = 1$$

3. Obtener la solución gráfica de la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$

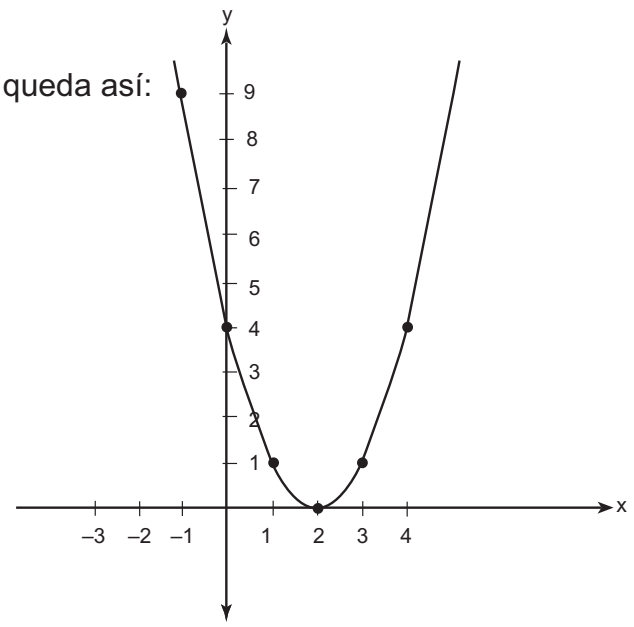
Se considera la función:

$$x^2 - 4x + 4 = y$$

x	y	**Puntos**
–1	9	(–1, 9)
0	4	(0, 4)
1	1	(1, 1)
2	0	(2, 0)
3	1	(3, 1)

Si $x = -1$, entonces $y = 9$
$y = (-1)^2 - 4(-1) + 4$
$= 1 - 4 - 4$
$y = 9$
Si $x = 0$, entonces $y = 4$
Si $x = 1$, entonces $y = 1$
Si $x = 2$, entonces $y = 0$
Si $x = 3$ entonces $y = 1$

La gráfica de esta función queda así:



Como se observa, el vértice de la parábola queda sobre el eje de las abscisas y sólo en un punto, esto indica que la ecuación original tiene una raíz repetida, la cual es:

$$x_1 = 2 \text{ y } x_2 = 2$$

De lo anterior se deduce que:

La parábola que resulta de graficar una función de la forma $ax^2 + bx + c = y$, puede tener su vértice fuera del eje de las ordenadas o sobre el eje de las abscisas, esto es, la ecuación correspondiente puede tener dos raíces diferentes o raíces repetidas.

En tu cuaderno realiza con tus compañeros(as) las gráficas de las ecuaciones que se tienen y determina sus raíces.

a) $x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as), en caso de ser distintos revisa los procedimientos.

En forma individual determina en tu cuaderno gráficamente las raíces de las siguientes ecuaciones valiéndote de las gráficas de las funciones correspondientes.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

x	y
0	
1	
2	
3	
4	

b) $x^2 + 4x - 8 = 0$

x	y
–2	
–1	
0	
1	
2	
3	
4	

Coteja tus resultados con la clave, si no coinciden, encuentra el error y corrígelo.

CLAVE

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

b) $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

63

RESUÉLVELOS TÚ MISMO

89 - 3

Problemas de ecuaciones cuadráticas
Resolución de problemas que impliquen ecuaciones cuadráticas

Cualquier tipo de ecuaciones son una herramienta indispensable en la resolución de algunos problemas, siempre y cuando sean bien empleadas; en esta sesión pondrás en práctica tu capacidad de plantear y resolver problemas con ecuaciones cuadráticas.

Observa con interés el video, el cual te proporcionará elementos que te permitirán plantear y resolver problemas con ecuaciones cuadráticas.

Con tu equipo, resuelve el siguiente problema. Para hacerlo, apóyate en las sugerencias:

El doble del cuadrado de un número es igual a diez veces el valor del mismo, ¿cuál es el número?

Si consideramos el número buscando con x, ¿cómo representas el doble del cuadrado de ese número? Y ¿diez veces su valor?

Puesto que el doble del cuadrado del número es igual a diez veces su valor, establece la igualdad correspondiente.

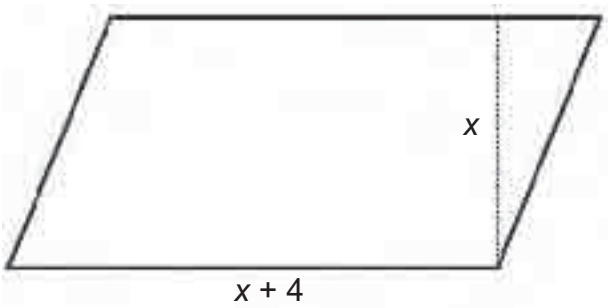
Transforma esta igualdad en una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$

Elige el procedimiento adecuado y resuelve la ecuación en tu cuaderno.

Compara tu resultado con el obtenido por tus compañeros(as).

Reúnete con un compañero(a) y resuelve el problema siguiente:

Calcula las dimensiones del siguiente paralelogramo, el cual tiene un área de 21 m



Verifica tu resultado con los compañeros(as) de otros grupos, en caso de duda, consulta a tu profesor(a).

Resuelve individualmente en tu cuaderno los siguientes problemas:

a) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, si se sabe que el área de dos de ellos es equivalente al área de un rectángulo que mide 16 cm de largo y de ancho el lado del cuadrado?

b) El largo de un terreno rectangular es 4 m más largo que el ancho. El área es de 140m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

CLAVE

a) El lado del cuadrado mide 8 cm b) Ancho = 10 m, largo = 14 m.

64 PARA TODAS

93 - 3 Expresión general para la solución de ecuaciones cuadráticas Deducción de la expresión general para la solución de ecuaciones cuadráticas

Seguramente ya sabes que las ecuaciones cuadráticas tienen varias formas de resolución. En esta sesión aprenderás una diferente y aplicable a todas las ecuaciones cuadráticas. Lo importantes es que tienes todos los conocimientos necesarios para que tú mismo la deduzcas.

Trabaja con tu equipo.

Una ecuación cuadrática puede resolverse por diferentes métodos de acuerdo con sus características.

Es interesante llegar a una expresión que permita resolver cualquier tipo de estas ecuaciones. Te acompañamos en esta búsqueda.

Recuerda: La expresión general de una ecuación cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En donde:

a	es el coeficiente del término cuadrático
b	es el coeficiente del término lineal
c	es el término independiente

Encontrar la expresión general para su solución, consiste en lograr despejar x en la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

1. Como el término ax^2 no es un cuadrado perfecto, tratemos de hacerlo multiplicando por $4a$.

$ax^2\,(4a) + bx\,(4a) + c\,(4a) = 0\,(4a)$
$4a^2x^2 + 4\,abx + 4ac = 0$

2. Dejemos los términos con la variable x en uno de los miembros de la ecuación; para ello restamos $4ac$.

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ac = -4ac$
$4a^2x^2 + 4\,abx = -4ac$

3. Para completar un trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro de la ecuación, debemos sumar b^2.

$4a^2x^2 + 4\,abx^2 + b^2 = -4ac + b^2$

¿Puedes factorizar el cuadrado del primer miembro de la ecuación? Hazlo.

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

4. Ahora es fácil, podemos sacar la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación.

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

5. ¡Procede a despejar a x!

$$2ax = b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. La expresión para x nos posibilita encontrar las dos raíces de la ecuación

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tenemos por fin una expresión que nos permite resolver cualquier ecuación de segundo grado a partir de los coeficientes de la variable y del término independiente de la ecuación.

Observa con atención el video. Seguramente despejarás cualquier duda que puedas tener sobre cómo llegar a una expresión que te garantiza resolver una ecuación de segundo grado.

Realiza con tu equipo los ejercicios siguientes:

1. En la ecuación $3x^2 - 2x - 8 = 0$

   a) ¿Cuál es el valor de a?

   b) ¿Cuál es el valor de b?

   c) ¿Cuál es el valor de c?

   d) ¿Cuántas raíces tiene esa ecuación?

   e) ¿Por qué?

   f) ¿Cuál es la expresión general que te permite solucionarlo?

   g) Sustituye los valores de a, b y c en la expresión y resuélvela en tu cuaderno.

Compara tu resultado con la clave adjunta. Si hay diferencias, verifica y corrige.

CLAVE

1. a) 3 b) – 2 c) – 8 d) 2

e) Porque la raíz cuadrada tiene dos valores.

f) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2b}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = \dfrac{8}{6}$

g) $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)}$

65 CON ESTO NO FALLO

94 - 3 Solución de ecuaciones cuadráticas por medio de la expresión general Aplicación de la fórmula o expresión general en la resolución de ecuaciones cuadráticas

Existe una serie de problemas que generan una ecuación cuadrática de cualquier forma. Existe un método seguro y rápido para la solución de cualquier tipo de ecuaciones cuadráticas, ya lo conoces, aplícalo.

Con tus compañeros(as), lee y analiza los ejemplos de soluciones de ecuaciones de segundo grado utilizando la expresión general.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR MEDIO DE LA FÓRMULA GENERAL

Las ecuaciones de segundo grado pueden resolverse por distintos métodos. Sin embargo, el método más seguro en cuanto a la resolución de cualquier forma de una ecuación cuadrática consiste en aplicar la fórmula general.

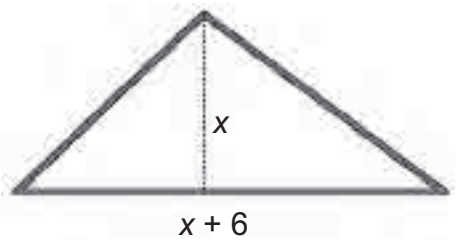
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ **Fórmula general**

En donde:

a = coeficiente del término cuadrático
b = coeficiente del término lineal
c = término independiente

Ejemplo 1:

La base de un triángulo mide 6 cm más que la altura y el área es de 20 cm^2. Calcular la base y altura.



altura = x
base = $x + 6$
área = 20 cm^2

Mediante la expresión para el área del triángulo: $A = \frac{b\,h}{2}$ y usando los valores del problema, se tiene:

$$20 = \frac{(x+6)x}{2}$$

Al hacer las operaciones indicadas se obtiene la ecuación cuadrática:

$$40 = x^2 + 6x$$

$x^2 + 6x - 40 = 0,$ que es una ecuación cuadrática completa.

Al determinar los valores de a, b, y c y aplicar la fórmula general, se tiene:

a = 1

b = 6

c = – 40

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$$

Primero se reducen los paréntesis del radicando:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-6 \pm 14}{2}$$

Por lo tanto, las dos raíces son:

$$x_1 = \frac{-6+14}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-6-14}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

En este caso, sólo se tomará en cuenta la primera raíz, ya que la segunda raíz es negativa; es decir, de acuerdo con las condiciones del problema, la altura no puede ser negativa, por lo tanto, la solución del problema es:

Altura = 4 cm
Base = 4 cm + 6 cm = 10 cm

Comprobación

$$A = \frac{b\,h}{2}$$

$$20\ cm^2 = \frac{(10\ cm)(4\ cm)}{2}$$

$$20\ cm^2 = \frac{40\ cm^2}{2}$$

$$\boxed{20\ cm^2 = 20\ cm^2}$$

Ejemplo 2:

Hallar un número distinto de cero, tal que el duplo de su cuadrado sea igual a 4 veces dicho número.

Condiciones del problema:

Número distinto de cero	$x \neq 0$
Cuadrado del número	x^2
Duplo de su cuadrado	$2x^2$
4 veces dicho número	$4x$

Se traducen en la ecuación:

$2x^2 - 4x$ Al igualar la ecuación a cero, se tiene:

$$\boxed{2x^2 - 4x = 0}$$

Ecuación cuadrática que carece de término independiente.

Esta ecuación se puede resolver por la fórmula general, por lo tanto, determinando los valores de a, b y c, y sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$a = 2$

$b = -4$ En este caso, como el término independiente no existe, se toma como cero.

$c = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)}$$

Al reducir paréntesis dentro y fuera del radical se obtiene:

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 0}}{4}$$

$$x = \frac{+4 \pm 4}{4}$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$x_1 = \frac{+4+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{+4-4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Ahora bien, como en el problema se dice que debe ser un número distinto de cero, por lo tanto el resultado es el valor de la primera raíz.

Solución: el número buscado es 2.

Como se habrá observado, la fórmula general es muy útil para resolver los problemas que generan una ecuación cuadrática de cualquier forma; es decir, de forma completa o incompleta. De esta manera es más fácil llegar a una solución correcta.

Observa el video, te dará más herramientas en la solución de problemas que requieren de una ecuación de segundo grado.

Con tu grupo resuelve los siguientes problemas:

1. El cateto mayor de un triángulo rectángulo mide 1 cm más que el menor y la hipotenusa mide 1 cm menos que el doble del cateto menor.

2. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo del que se sabe que un lado mide 5 cm más que el otro y que si disminuyéramos su lado corto en 2 cm el área de ese rectángulo sería 8 cm^2?

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as). Si tienes dudas consulta con tu profesor(a).

En forma individual resuelve en tu cuaderno los problemas siguientes, aplicando la fórmula general.

a) El largo de un rectángulo es tres centímetros más grande que su altura. Su área es de 54 cm^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

b) Hallar un número distinto de cero, tal que la mitad de su cuadrado es igual a 8 veces el mismo número.

CLAVE

a) largo = 9 cm, altura = 6 cm; b) Es el número 16

66 UNA DISCRIMINACIÓN NO RACIAL

92 - 3

Discriminantes
Aplicación del discriminante

Si se analiza el valor de cada una de las partes que resultan cuando se desarrolla la fórmula de una ecuación de segundo grado, se puede anticipar si las raíces de una ecuación cuadrática son iguales o diferentes.

Con tus compañeros(as) de grupo.

1. Encuentra las raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$. Usa la expresión general.

   ¿Qué valor obtuviste para: $\sqrt{b^2 - 4ac}$?

¿Por qué obtuviste dos raíces diferentes para la ecuación? Explica.

2. Resuelve la ecuación $9x^2 + 6x + 1 = 0$

   Cuando calculaste $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ¿qué valor obtuviste?

   ¿Cuáles son las raíces de la ecuación?

   ¿Cómo son éstas? ¿Por qué?

3. Resuelve la ecuación $x^2 + 2x + 3 = 0$

   ¿Puedes encontrar sus raíces? ¿Por qué?

Discute tu trabajo con tus compañeros(as) y el profesor(a).

Lee y analiza con tu grupo el siguiente texto.

DISCRIMINANTES

Como ya se ha visto, existe una fórmula que permite resolver cualquier ecuación cuadrática. Esta es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El radicando de esta fórmula $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante** y permite averiguar el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con el discriminante de la fórmula $\boxed{b^2 - 4ac}$

De acuerdo con el valor del discriminante, se presentan tres casos:

1. $b^2 - 4ac > 0$ El discriminante es mayor que cero, las raíces de la ecuación son diferentes.

Veamos un ejemplo:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$a = 1$
$b = -2$
$c = -15$

Al sustituir a, b y c en el discriminante se tiene:

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64$$

El discriminante es mayor que cero, por lo tanto, las raíces de la ecuación son diferentes.

Esto se verifica al resolver la ecuación.

$a = 1$
$b = -2$
$c = -15$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Se sustituyen los valores de a, b y c en la fórmula general y al realizar las operaciones indicadas se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Las raíces de la ecuación son 5 y –3, que son números diferentes.

2. $b^2 - 4ac = 0$

El discriminante es igual a cero, las raíces de la ecuación son iguales.

Ejemplo:

$$9x^2 + 24x + 16 = 0$$

$a = 9$
$b = 24$
$c = 16$

Al sustituir a, b y c en el discriminante, se tiene:

$$b^2 - 4ac = (24)^2 - 4(9)(16) = 576 - 576 = 0$$

El discriminante es igual a cero, por lo tanto, las raíces de la ecuación son iguales.

Esto se verifica resolviendo la ecuación:

$$9x^2 + 24x + 16 = 0$$

$a = 9$
$b = 24$
$c = 16$

Al sustituir los valores de a, b y c en la fórmula general y realizar las operaciones indicadas se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(9)(16)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 576}}{18}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{0}}{18}$$

$$x_1 = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3} \qquad x_2 = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3}$$

Las raíces de la ecuación son $-\frac{4}{3}$ y $-\frac{4}{3}$ son números iguales.

3. $b^2 - 4ac < 0$

Cuando el discriminante es menor que cero, no existen raíces dentro de los números que se han trabajado.

Ejemplo:

$$5x^2 - 4x + 4 = 0$$

$a = 5$
$b = -4$
$c = 4$

Al sustituir a, b y c en el discriminante se tiene:

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\,(5)\,(4) = 16 - 80 = -64$$

El discriminante es menor que cero, por lo tanto, no existen raíces dentro de los números que se han trabajado.

Esto se verifica resolviendo la ecuación.

$$5x^2 - 4x + 4 = 0$$

$a = 5$
$b = -4$
$c = 4$

Al sustituir los valores de a, b y c en la fórmula general y realizar las operaciones indicadas se se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\,(5)\,(4)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{10}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{10}$$

Dentro de los números que se han trabajado, un número negativo no tiene raíz cuadrada, por lo que $\sqrt{-64}$ no es un número conocido.

Obsérvese que el discriminante ayuda a tener una idea de las características que deberán tener las raíces de una ecuación cuadrática.

Con un compañero(a), contesta las preguntas.

Escribe la expresión general que permite resolver cualquier ecuación cuadrática.

Escribe la expresión del discriminante.

¿Para qué sirve conocer el valor del discriminante en la solución de ecuaciones cuadráticas?

Si el discriminante es mayor que cero, ¿cómo son las raíces de la ecuación?

Si el discriminante es igual a cero, ¿cómo son las raíces de la ecuación?

Si el discriminante es menor que cero, ¿cómo son las raíces de la ecuación?

Compara tus respuestas con las de otros grupos.

Continúa trabajando con tu pareja para calcular el valor del discriminante y determinar el tipo de raíces que tienen las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$
$b^2 - 4ac =$

¿Cómo son las raíces de la ecuación?
Resuélvela para comprobar tu respuesta.

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$
$x^2 - 4ac =$

¿Cómo son las raíces? Resuelve la ecuación.

c) $x^2 + 7x + 10 = 0$
$b^2 - 4ac =$

¿Cómo son las raíces? Comprueba tu respuesta.

Determina individualmente el tipo de raíces de las siguientes ecuaciones, calculando el discriminante, luego verifica tus respuestas, resolviendo las ecuaciones.

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$

b) $4x^2 + 8x - 5 = 0$

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$

Si es necesario, consulta la clave.

CLAVE

a) $b^2 - 4ac = 0$, $x_1 = x_2 = -5$

b) $b^2 - 4ac = 144$, $x_1 \neq x_2$. $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{5}{2}$

c) $b^2 - 4ac = -16$, No hay soluciones reales.

67 SE NECESITAN NUEVOS NÚMEROS

Un nuevo número: $\sqrt{-1}$

Los números complejos

En la búsqueda de las raíces de una ecuación cuadrática te encontraste con ejemplos en los cuales al calcular el discriminante no lo pudiste hacer. ¿Por qué?

Chocaste con la imposibilidad de extraer cuadrados de números negativos . ¡En los reales no encuentras un número que multiplicado por sí mismo sea negativo!

¿Qué hacer?

Con tu grupo resuelve las siguientes incógnitas:

1. Encuentra un número tal que si lo elevas al cuadrado y le sumas 1 te da cero.

   Escribe la ecuación que te permitirá hallar este número buscado.

   ¿Qué ocurre cuando tratas de encontrar el valor de x?

2. Tienes otras herramientas para buscar qué ocurre con esta ecuación que te traduce el problema inicial.

   ¿Qué tal si representas la función asociada a la ecuación? ¿Podrás visualizar los ceros de la función?

   Haz la gráfica de $x^2 + 1 = y$
   Apóyate en una tabla con valores de x y y

x	y
5	11
3	7
1	2
0	1
–1	2
–3	⋮
–5	⋮

$Si \quad x = 5 \Rightarrow y = 5^2 + 1 = 11$
$Si \quad x = 3 \Rightarrow y = 3^2 + 1 = 7$
$Si \quad x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 = 2$
$Si \quad x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1$
$Si \quad x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 1 = 2$

¿Cómo es la parábola que representaste en la gráfica? ¿Hacia dónde se abre?

¿Cuál es el vértice?

¿Corta la gráfica el eje de las abscisas?

¿Dónde representabas los ceros de una función cuadrática?

¿Pudiste por medio de este procedimiento encontrar las raíces de $x^2 + 1 = 0$?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros(as). ¿Qué conclusión proponen?

Lee, analiza y sigue los desarrollos del siguiente texto.

UN NUEVO NÚMERO: $\sqrt{-1}$

Procederemos como lo hicieron los primeros algebristas cuando intentaron resolver ecuaciones de segundo grado y no encontraron raíces en los números reales.

La más sencilla de ellas es la que trataste de resolver en la sesión anterior:

$$x^2 + 1 = 0 ?\ \ x^2 = -1 \Rightarrow\ x\ = \pm\sqrt{-1}$$

Cuando se llegó a esta situación se analizó la imposibilidad de encontrar en los números reales uno cuyo cuadrado sea un número negativo.

Así que la expresión $\sqrt{-1}$ no tenía ningún sentido en los números reales.

Entonces hubo necesidad de inventar unos nuevos números. Fue así como se definió y se le dio nombre al primero de ellos, al más sencillo de ellos: se llamó entonces:

Unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$

Y mira lo que pasa cuando tratamos de encontrar el cuadrado de i

$$i^2 = (\sqrt{-1}\ )^2 = -1$$

En conclusión: se construirán los nuevos números partiendo de las siguientes definiciones:

El cuadrado de la unidad imaginaria i es la unidad negativa –1

$$i^2 = -1$$

Una raíz de la unidad negativa –1 es la unidad imaginaria i

$$= i$$

Otros nuevos números.

Al resolver una ecuación como $x^2 + 4 = 0$

Se tiene: $x^2 = -4$

$$x = +\sqrt{-4} = +\sqrt{4(-1)} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1}$$

$$= +2i$$

Es así como la ecuación $x^2 + 4 = 0$ tiene dos raíces, no reales, sino imaginarias

$$x_1 = +2i \quad ; \quad x_2 = -2i$$

Admitimos nuevos números como $+2i$ y $-2i$ y todos aquellos que van a tener como forma general:

$$(\text{número real}) \cdot i$$

Por ejemplo: $2i$, $7i$, $-3i$, $\frac{3}{5}i$, $\sqrt{7}i$ y a los cuales llamaremos **números imaginarios**.

Ahora resolvamos una ecuación como:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Antes de buscar las raíces de esta ecuación veamos qué predice el discriminante.

$$-b^2 - 4ac$$

Reemplazando: $a = 1,\ \ b = -4,\ \ c = 5$ se tiene:

$$(-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

El discriminante $b^2 - 4ac < 0$ indica que la ecuación no tiene raíces reales.

Y, ¿cuáles son entonces las raíces?

Calculémoslas teniendo en cuenta el número $i = \sqrt{-1}$

Reemplazando en la expresión general se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-(-4)^2 - 4(5)}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4\sqrt{-1}}}{2}$$

$$x = 2 \pm 2i$$

De esta manera podríamos decir que la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$, que no tiene raíces reales, tiene como raíces las expresiones:

$$x_1 = 2 + 2i \qquad , \qquad x_2 = 2 - 2i$$

Estos números obtenidos en la búsqueda de raíces de una ecuación de segundo grado permiten ampliar la nueva colección de números. Ahora tendremos números de la forma general:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Número real} & + & (\text{número real}) \,.\, i \\ a & + & bi \end{array}$$

donde a y b son reales e $i = \sqrt{-1}$

En nuestro ejemplo tendremos números como

$$2 + 2i \qquad \text{y} \qquad 2 - 2i$$

Estos números están constituidos por dos partes:

$a+bi$

a se llama parte real.

b se llama parte imaginaria.

Les daremos un nombre:

Números complejos

Veamos cómo son estos números complejos cuando a ó b son 0.

Si $a = 0$ entonces $a + bi = bi$, tendremos un número **imaginario puro**.

Si $b = 0 \Rightarrow\ a + bi = a$, tendremos un número real, es decir el número complejo sólo tiene parte real.

Este hecho nos permite considerar que los números reales forman parte de los números complejos.

¿Cómo llamamos a los números complejos cuando b es diferente a 0?

Todos los complejos, de la forma $a + bi$, con $b = 0$ como por ejemplo:

$3 + \sqrt{2i}$; $-5 - i$, $4i$, i se llaman **números imaginarios**. En los ejemplos $4i, i$ son **imaginarios puros** porque su parte real es 0.

Con tus compañeros(as) de grupo, analiza y contesta:

1. Clasifica los siguientes números. ¿Cuáles son reales? ¿Cuáles imaginarios? ¿Cuáles complejos?

   $4i$; $-4 - \frac{2}{3}i$; $\sqrt{5i}$; $\sqrt{3}, 0$; i ; $\frac{3}{7}i$

2. Escribe ejemplos de números imaginarios puros.

3. Escribe un número complejo que tenga parte imaginaria.

4. Escribe un número complejo cuya parte imaginaria sea 0.

Con tus compañeros(as) de grupo resuelve:

1. ¿Cómo son las raíces de las siguientes ecuaciones?

   a) $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 4 = 0$

   b) $3x^2 - 2 = 0$, $3x^2 + 2 = 0$

2. Encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 - 3x + 4 = 0$

   b) $x^2 - x + 7 = 0$

   c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

Compara tus resultados con los de tus otros compañeros(as).

68

93 - 3

COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ... ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

Repaso parcial

Con tus compañeros(as), observa el video. Analiza los contenidos más importantes y aquellos en los cuales todavía puedas tener dudas coméntalos con el profesor(a) para que decidan un plan de refuerzo de dichos aspectos.

Con tu compañero(a) que tenga tus mismas inquietudes, resuelve el plan acordado con tu profesor(a).

Trabaja en grupo. Analiza, discute y resuelve las siguientes preguntas.

1. a) ¿Cómo identificas una función cuadrática?

   b) ¿Cómo describes la ecuación cuadrática asociada?

   c) ¿Cuál es el significado de las soluciones de la ecuación cuadrática en relación con la función cuadrática asociada?

2. Considera la siguiente función:

$y = 5\,x^2 + x - 3$

a) ¿Es ésta una función cuadrática? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la función cuadrática asociada?

c) ¿Qué criterio permite anticipar si las soluciones son números reales o no?

d) ¿Cuándo las soluciones de una ecuación cuadrática no son números reales? ¿Por qué no son reales? ¿Qué números se han definido para expresar estas soluciones?

Si tienes alguna duda pregúntale a tu maestro(a).

CLAVE

1. a) Cuando el mayor exponente de la variable independiente es 2.

b) Al igualar la función a cero, se tiene la ecuación cuadrática asociada.

c) Las soluciones de la ecuación cuadrática son los ceros de la función cuadrática asociada.

2. a) Sí porque el término $5x^2$ contiene la variable x con exponente 2.

b) $5x^2 + x - 3 = 0$.

c) El cálculo del discriminante.

$b^2 - 4ac = 1 + 60 = 61$.

$61 > 0$ entonces las soluciones son números reales.

d) Cuando $b^2 - 4ac < 0$.

No son reales porque habría que encontrar raíces cuadradas de números negativos.
Para estos casos se han definido los números imaginarios. El más sencillo de ellos es $\sqrt{-1} = i$

69 EVALUACIÓN PERSONAL

94 - 3 Repaso de lo aprendido

Con tus compañeros(as) observa con atención el video. La importancia de esta actividad está directamente relacionada con la reflexión personal acerca de tus aprendizajes. Podrás identificar tus fortalezas y también los aspectos que ameriten ser reforzados.

Enfrenta los siguientes problemas como un reto individual.

1. Haz la gráfica de la siguiente función

   $y = x^2 - 5x + 6$

   Completa la tabla

x	y
⋮	
–3	
–2	
–1	
0	
1	
2	
3	
⋮	

   a) ¿Qué forma tiene la gráfica? ¿Es simétrica con respecto a alguno de los ejes coordenados?

   b) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica?

   c) ¿En que puntos corta la gráfica al eje de las abscisas?

   d) ¿Cómo procedes para encontrar estos puntos de corte y verificar que la gráfica te quedó bien?

2. Analiza las siguientes funciones cuadráticas y sin hacer las gráficas anticipa si las parábolas abren hacia arriba o hacia abajo.

a) $y = -2x^2 + 3$ b) $y = 4x^2 + 9$ c) $y = -x^2$

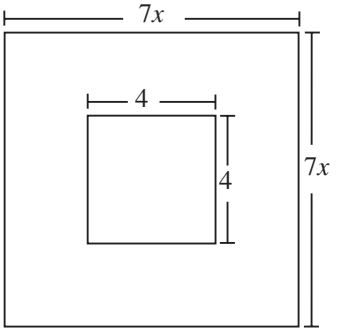
3. Analiza las siguientes funciones cuadráticas, haz sus gráficas y compáralas.

a) $y = \frac{1}{2}x^2$ b) $y = x^2$ c) $y = 2x^2$

Relaciona la forma de las parábolas con el valor del coeficiente de x^2. ¿Qué hipótesis puedes proponer? ¿Cuándo es más esbelta la curva?

4. A un cuadrado de lado $7x$ se le quita un cuadrado interior y central de lado 4.

Encuentra las dimensiones de un rectángulo que tenga la misma área de la figura resultante.



CLAVE

4. $49x^2 - 16 = (7x - 4)(7x + 4)$
$a = 7x + 4$ $b = 7x - 4$

3. Cuando el coeficiente de x es positivo, a un mayor valor de él corresponde una gráfica más esbelta.

2. a) Abre hacia abajo b) Abre hacia arriba c) Abre hacia abajo

1.

x	y
⋮	⋮
−3	30
−2	20
−1	12
0	6
1	2
2	0
3	0
⋮	⋮

a) Parábola No

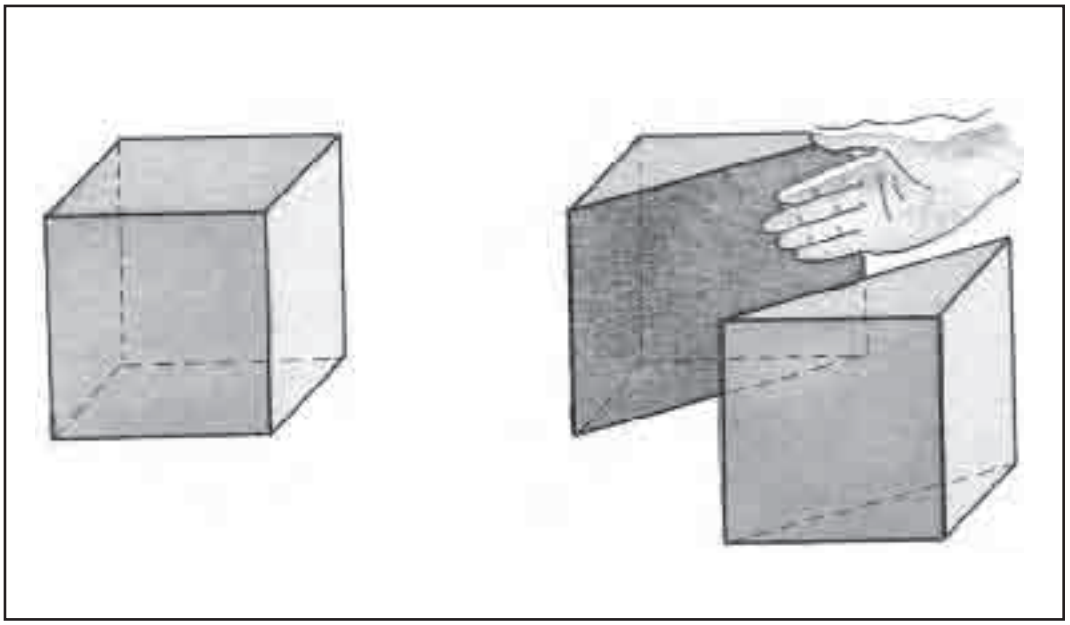
b) $(\frac{5}{2}, 6)$

c) $(3, 0), (2, 0)$

d) $0 = x^2 - 5x + 6$
$0 = (x - 3)(x - 2)$
$\Rightarrow x = 3 \quad o \quad x = 2$

Núcleo Básico 5

SÓLIDOS



El desarrollo de este núcleo amplía el estudio de los sólidos geométricos que realizaste en el grado 8º. Mediante cortes en cuerpos como cubos y paralelepípedos podrás construir otros cuerpos como pirámides, tetraedros y octaedros.

La búsqueda de regularidades y de relaciones entre dimensiones de un cuerpo y otro que se ha producido al realizar cortes, te permitirá encontrar expresiones para calcular longitudes de aristas y diagonales, áreas de caras y volúmenes.

Entre los llamados sólidos de revolución como el cilindro, el cono y la esfera se buscarán relaciones basadas en regularidades propias de su naturaleza para, a partir de ellas y de sus conexiones, encontrar expresiones para las áreas y los volúmenes, de forma intuitiva.

70
113 - 3

DOS EN UNO

Cortes en cubos y paralelepípedos
Obtención de pirámides a partir de cubos y paralelepípedos

A partir de sólidos geométricos, como cubos y paralelepípedos se pueden obtener pirámides. Este trabajo se asemeja al que realizan escultores o talladores con materiales como madera, cristales o piedras.

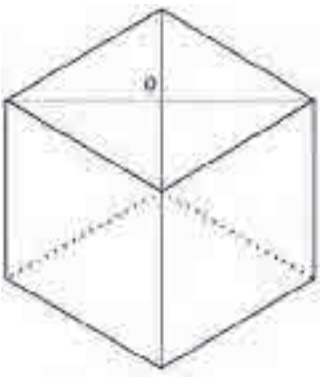
Te invitamos a leer y analizar cómo podrían ser estas construcciones. Luego puedes ensayar a modelar estos cuerpos con materiales apropiados.

CORTES EN CUBOS Y PARALELEPÍPEDOS

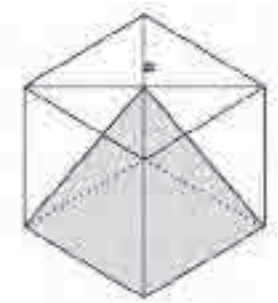
Los cubos y los paralelepípedos guardan otro cuerpo geométrico en su interior, para descubrirlo es necesario efectuar ciertos cortes. En esta sesión se ilustrará gráficamente la forma de obtener una pirámide cuadrangular y una rectangular.

Para obtener una pirámide cuadrangular observa y visualiza el siguiente procedimiento:

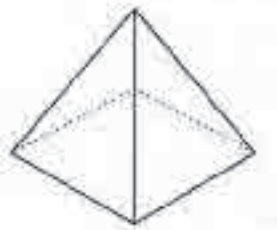
En un cubo, se trazan las diagonales de la cara superior con lo cual se obtiene el punto *O* en la intersección de dichas diagonales.



Se trazan segmentos de recta a partir de cada vértice de la base al punto O



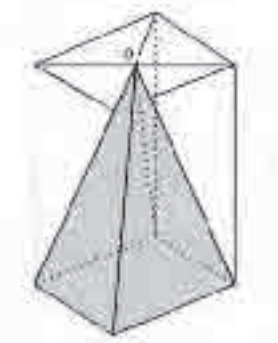
Una vez que ya se tienen marcados los segmentos de recta se procede a realizar los cortes correspondientes, con lo cual se obtiene una pirámide cuadrangular.



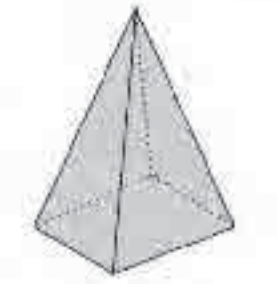
En forma análoga se puede obtener una pirámide rectangular, a partir de un paralelepípedo.

Se trazan las diagonales de la cara superior y se obtiene el punto O en la intersección de éstas.

Se trazan segmentos de recta de los vértices de la base al punto O.

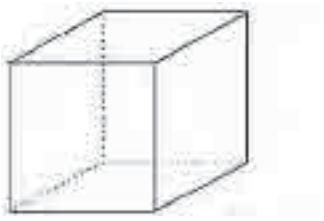


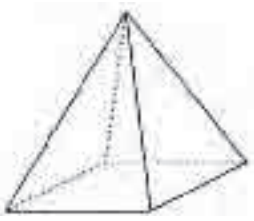
Al efectuar los cortes correspondientes sobre los segmentos de recta marcados se obtiene una pirámide rectangular.



Trabaja con dos de tus compañeros(as).

1. Usa un material como plastilina, greda, un pedazo de queso o una pasta de jabón. Modela un cubo o un paralelepípedo, y a partir de él trata de hacer los cortes necesarios para construir una pirámide.





2. En tu cuaderno dibuja a lápiz un cubo de 6 cm de arista. Haz los trazos correspondientes para obtener una pirámide, después borra los trazos que sobren y colorea el dibujo de la pirámide que obtuviste.

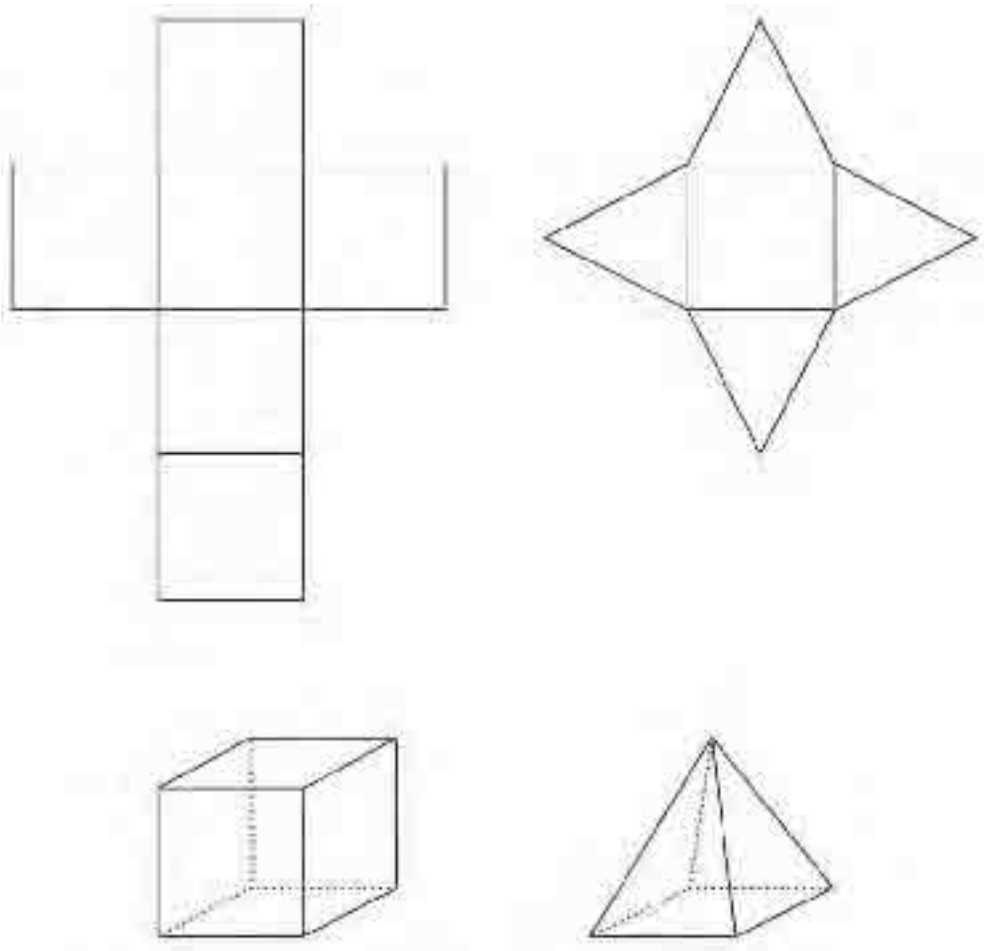
Compara tus construcciones y dibujos con los de tus compañeros(as).

Observa, con tus compañeros(as) de grupo, el video. Comenta los aspectos que encuentres más interesantes.

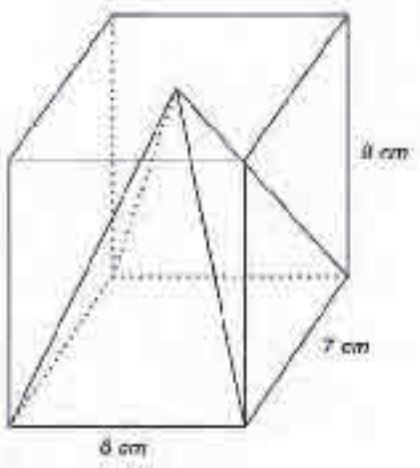
Con tu equipo de trabajo, describe en tu cuaderno el procedimiento necesario para obtener una pirámide a partir de un cubo o de un paralelepípedo.

En forma individual haz el siguiente trabajo:

- Construye en cartulina un modelo de cubo, de 8 a 10 cm de arista.
- Construye un modelo de pirámide cuya base sea cuadrada, de las mismas dimensiones de una cara del cubo. Para el trazado de los triángulos laterales mide la longitud desde el centro de una de las caras a un vértice de la base.
- Con tus modelos en cartulina puedes ilustrar la obtención de una pirámide a partir de un cubo.



Para ilustrar mejor el procedimiento puedes dejar el cubo sin su base. Ésta puede ser reemplazada por la base de la pirámide, lo cual te permitirá ensamblarlas como un rompecabezas de dos piezas.



Comparte tu trabajo con tus compañeros(as).

71
114 - 3

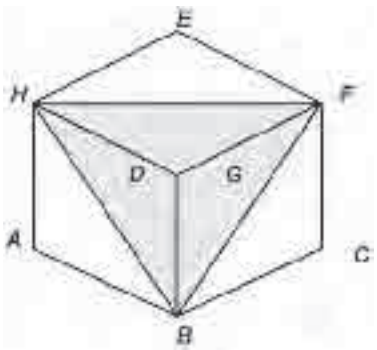
CAMUFLAJE PERFECTO

Tetraedro y octaedro
Obtención del tetraedro y del octaedro a partir del cubo

Para visualizar cómo hacer cortes sobre un cuerpo sólido en forma de cubo y obtener tetraedros y octaedros, te proponemos que con tu grupo de trabajo utilices modelos huecos de los que seguramente son expertos en desarrollar.

Con tu grupo de compañeros(as) y con base en un modelo de cubo hecho en cartulina:

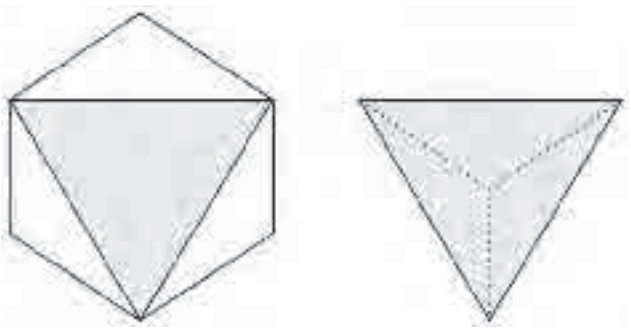
1. Traza las diagonales BH, BF y FH sobre las tres caras frontales, como lo ilustra el dibujo



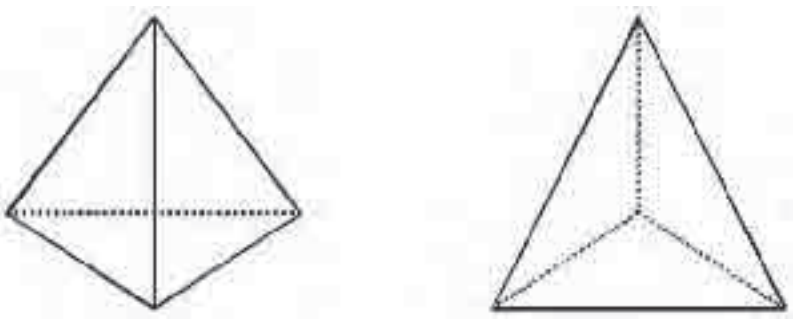
Teniendo cuidado corten su modelo por las diagonales señaladas. Obviamente no van a obtener sólidos, pero pueden completar sus modelos construyendo dos triángulos congruentes: uno para poner la cara que falta en el tetraedro y otro para cubrir el corte que se ha hecho sobre el cubo.

Sus modelos lucirán como los del dibujo.

Triángulos que completan los modelos de sólidos

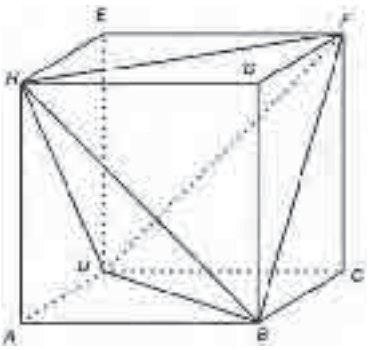


El tetraedro obtenido se puede observar de las siguientes dos formas:

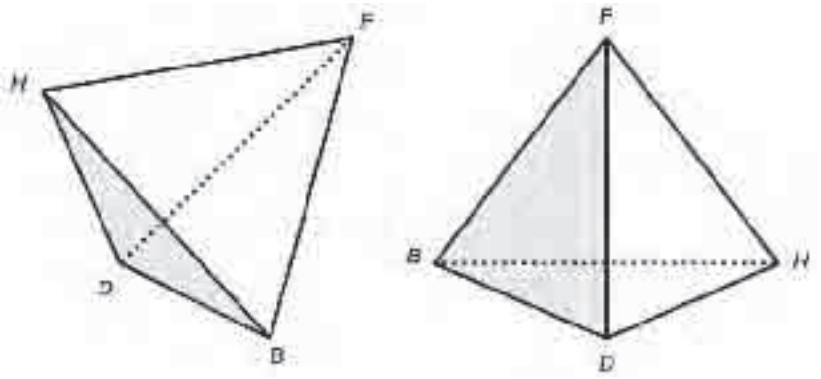


¿Se trata de un tetraedro regular? ¿Tiene sus cuatro caras congruentes? ¿Por qué sí o por qué no?

2. Hay otra forma de obtener un tetraedro realizando cortes sobre un cubo. Para visualizar el procedimiento te invitamos a que, sobre un modelo de cubo traces las diagonales BD, BH, DH, FH, BF y DF, las cuales se observan en la siguiente figura.

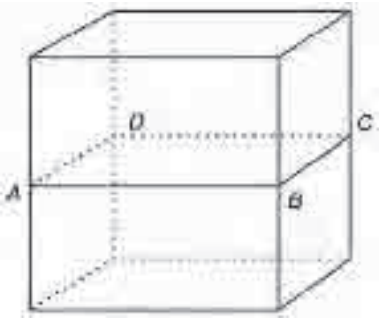


En este caso te invitamos a que imagines los cortes necesarios sobre algunas de las diagonales trazadas para obtener el tetraedro, que podría observarse de dos formas, como en estas figuras.

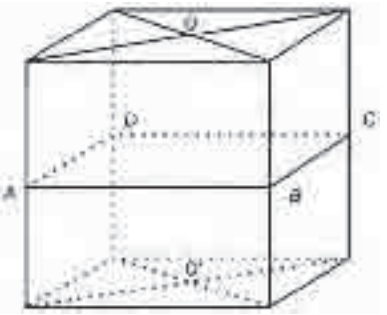


¿Cómo son las aristas de este tetraedro?
¿Qué dimensión tienen en relación con el cubo?, ¿se trata de un tetraedro regular?, ¿por qué?

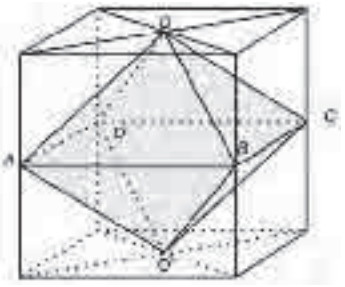
3. En lo que respecta al octaedro también se parte del cubo, y la forma de obtenerlo es similar al procedimiento que se empleó para obtener una pirámide cuadrangular. Para visualizar el procedimiento sobre un modelo de cubo, traza un segmento de recta paralelo a cada una de las aristas superiores o inferiores, exactamente a la mitad de cada una de sus caras, como en el dibujo, para determinar los puntos A, B, C y D.



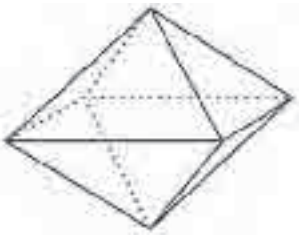
Traza las diagonales en cada una de las caras superiores e inferiores del cubo, para observar los puntos O y O'.



Imagina que se unen los puntos A, B, C y D con cada uno de los puntos O y O'



Si se efectúan los cortes necesarios sobre las diagonales trazadas se observará el octaedro, que se muestra en la figura.



¿Cómo son las ocho caras de este sólido? ¿Podría asegurarse que son congruentes entre sí?
¿Se trata de un octaedro regular? ¿Por qué sí o por qué no?

Al final del taller comparte sus experiencias y las respuestas a las preguntas con tus demás compañeros(as) y el profesor(a).

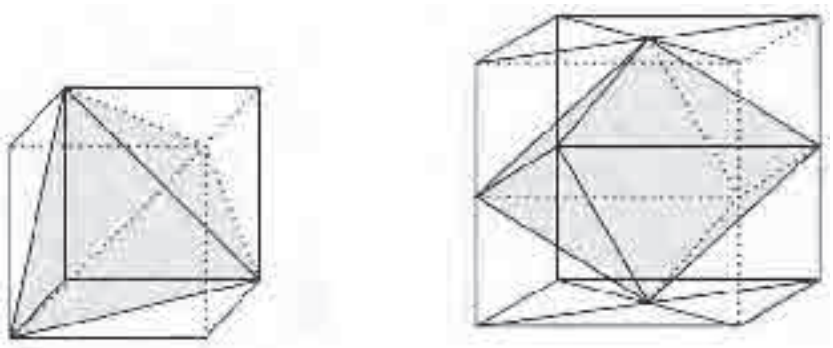
Observa el video y comenta con tus compañeros(as) los aspectos que hayan contribuido a comprender mejor tus aprendizajes.

Realiza con tus compañeros de equipo modelos en cartulina, de un cubo, del tetraedro regular asociado, es decir manteniendo las dimensiones pertinentes y del octaedro correspondiente.

Para esta última construcción debes establecer algún mecanismo para medir la longitud de la arista del octaedro determinada por puntos como AO, BO, CO, o DO. La arista AB, BC, DC, o AD es muy fácil de conocer en el modelo del cubo, puesto que es de igual dimensión que una de sus aristas.

Con estos modelos puedes explicar a tus compañeros(as) la obtención de tetraedros y octaedros, a partir de un cubo.

Tus modelos lucirán como en la ilustración, podrás acomodar dentro del cubo hueco los modelos de tetraedro y octaedro asociados.



72
115 - 3

EL CAMINO MÁS CORTO

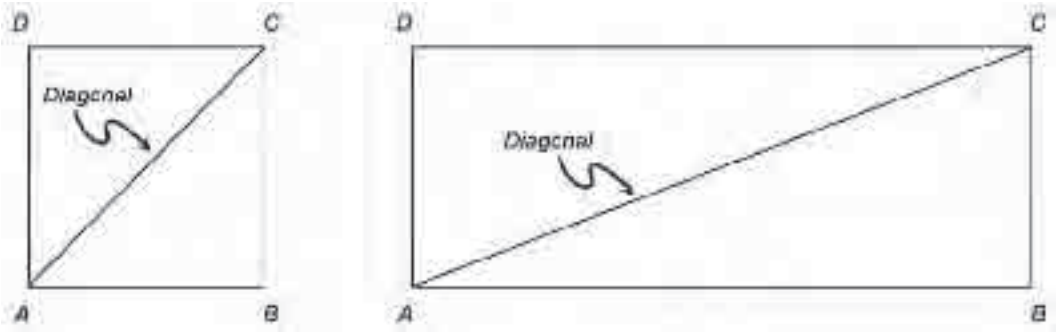
La diagonal en cubos y en paralelepípedos
Cálculo de la diagonal de cubos y de paralelepípedos

¿Sabías que la distancia más corta que hay para llegar de un vértice al opuesto en un cubo y en un paralelepípedo es la diagonal?

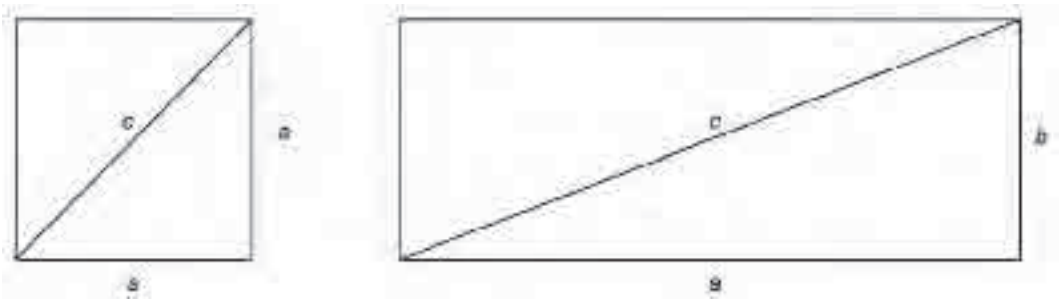
Con tu equipo de trabajo, lee y analiza el siguiente texto:

LA DIAGONAL EN CUBOS Y EN PARALELEPÍPEDOS

Como se recordará, la diagonal es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos en las figuras geométricas. Para determinar el valor de la diagonal, tanto en un cuadrado como en un rectángulo, se emplea el teorema de Pitágoras, debido a que al trazar una diagonal en éstos se obtienen dos triángulos rectángulos.



Ahora se tendrán las dos figuras en donde se representan los catetos con las letras a y b, mientras que la hipotenusa se representa con la letra c.



El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los catetos y la hipotenusa: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Hecho que permite escribir las igualdades:

$$c^2 = a^2 + a^2$$

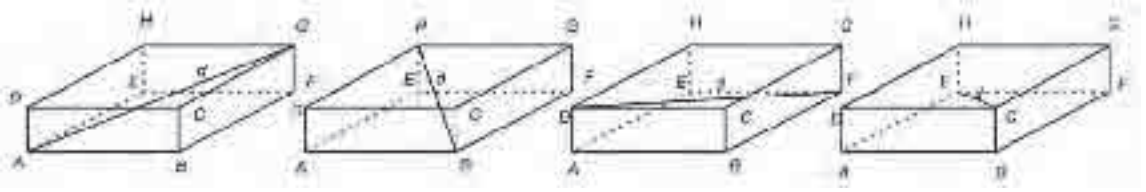
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{2a^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ahora, para determinar la diagonal de un cubo y un paralelepípedo, observa lo siguiente:

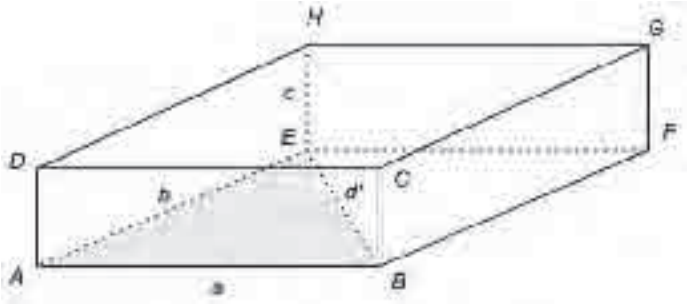
La diagonal de un paralelepípedo puede ser el segmento de recta AG, BH, EC o DF, ya que cualquiera de éstas cruza completamente al cuerpo geométrico.



Pero, ¿cómo determinar la longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectangular?

Observa y analiza:

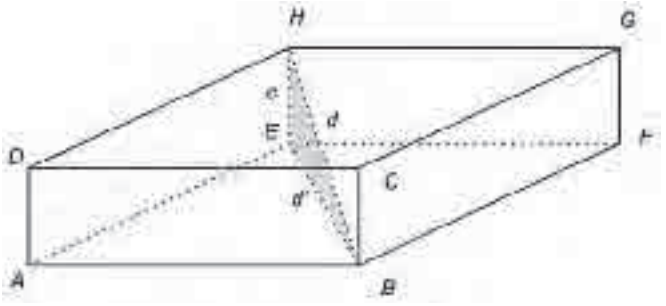
Se toma como punto de referencia el vértice B y se traza una diagonal al vértice E, la cual es d'.



De aquí se observa que se forma el triángulo rectángulo ABE, en donde los catetos son a y b, mientras que d' es la hipotenusa, para determinarla se aplica el teorema de Pitágoras, con lo que se tiene:

$$(d')^2 = a^2 + b^2$$

Ahora, si se traza la diagonal d del vértice B al vértice H, se forma el triángulo rectángulo BEH, en donde c y d' son los catetos y d es la hipotenusa.



Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo BEH se tiene:

$$d^2 = d'^2 + c^2$$

Pero se debe tener en cuenta el valor de la diagonal d'^2, el cual es $a^2 + b^2$, por lo que la expresión anterior queda:

$$d^2 = d'^2 + c^2$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

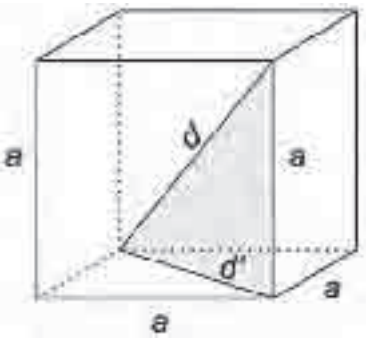
Se extrae raíz cuadrada al segundo miembro de la expresión, con lo que se tiene:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Esta es la expresión para determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular, de aquí se observa que las dimensiones del paralelepípedo son: ***largo***, ***ancho*** y ***altura***, y están representadas mediante las letras a, b y c, respectivamente.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo. Deduce una expresión que te permita calcular la diagonal de un cubo.

a) Aplica el teorema de Pitágoras y calcula la diagonal d' de la base.



b) Encuentra la expresión para la diagonal d del cubo. Aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo cuyos catetos son a y d' y cuya hipotenusa es d.

Sigue con tus compañeros(as) de trabajo, usa la calculadora y resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

1. Halla la arista de un cubo cuya diagonal mide 6 cm.

2. Un paralelepípedo rectangular tiene las siguientes dimensiones: largo 15 cm, ancho 9 cm y altura 6 cm. ¿Cuál es la diagonal de una de sus caras laterales?

Compara tus resultados con los obtenidos por otros grupos.

En forma individual, continúa usando tu calculadora y resuelve en tu cuaderno los problemas siguientes.

1. La diagonal de un paralelepípedo rectangular mide 13 cm, si su altura es de 3 cm y el ancho es de 4 cm, ¿cuánto mide de largo?

2. Si la arista de un cubo mide 5.3 cm, ¿cuánto mide su diagonal?

3. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya diagonal mide 9 cm?

Compara tus resultados con los de otro compañero(a), en caso de ser diferentes, consulta la clave.

CLAVE

1) 12 cm, 2) 9. 179 cm, 3)140.29 cm^3

73
116 - 3

ARQUITECTOS EGIPCIOS

Pirámides
Desarrollo plano y armado de pirámides

¿Has escuchado alguna vez comentarios o relatos acerca de las pirámides de Egipto? Estas construcciones reciben ese nombre por la forma que tienen, pues su base es un polígono y sus caras laterales, triángulos.

Otras culturas, como la azteca en México, también construyeron pirámides en honor a sus dioses.

El hombre ha utilizado estas formas en la arquitectura, ingeniería, los objetos del arte y en muchos otros campos. Seguramente has visto productos empacados en cajas de forma piramidal.

Con tus compañeros(as) de grupo, te invitamos a que desarrolles modelos planos de pirámides regulares.

1. Trae tus conocimientos acerca de las pirámides.
¿Cómo definirías este cuerpo geométrico?
Escribe una definición y compárala con la siguiente:

> Se llama pirámide al cuerpo geométrico constituido por una base en forma de polígono y sus caras, triángulos, que se unen en su punto más alto.

2. Describe la pirámide del dibujo

¿Cuántas caras tiene?

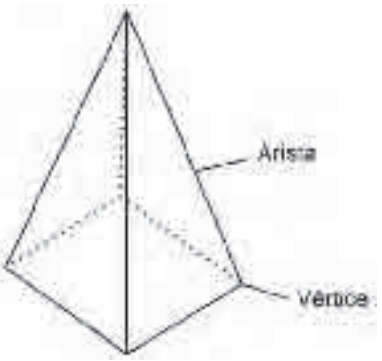
¿Qué forma presentan?

¿Cómo es su base?

¿Cuántas aristas tiene?

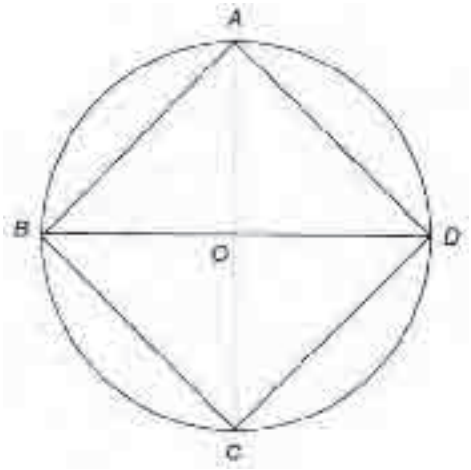
¿Cuántos vértices?

¿Qué nombre le darías?



3. Las ***pirámides regulares*** son aquellas cuya base es un polígono regular. Sus caras laterales son triángulos isósceles congruentes.
Para hacer un desarrollo plano se inicia con el trazo de su base. Como ésta debe ser un polígono regular, hay diferentes métodos de trazarlo. Uno de ellos es inscribiendo el polígono en un círculo.

Traza un círculo e inscribe un cuadrado. Para ello, debes recordar que las diagonales del cuadrado forman 4 ángulos centrales de 90º cada uno. Este hecho te ayuda a trazar el cuadrado. Hazlo en tu cuaderno.



Resulta muy sencillo.

- Puedes trazar dos diámetros perpendiculares.
- Puedes señalar ángulos de 90º, uno seguido del otro, con vértice en el centro del círculo.
- Para determinar el cuadrado se unen los puntos determinados por los diámetros o por los ángulos sobre la circunferencia.

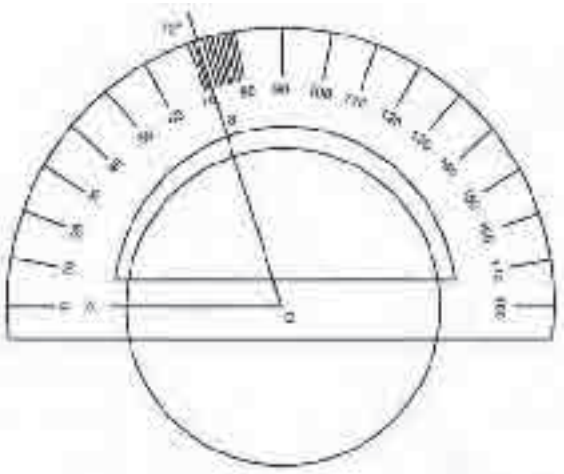
Te fijaste que el cuadrado, por tener 4 lados determinó 4 ángulos centrales de igual medida:

$$\text{Ángulo central} = \frac{360°}{4} = 90°$$

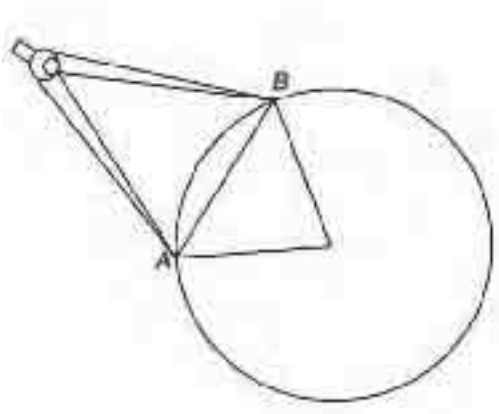
4. ¿Cómo inscribirán un pentágono regular?

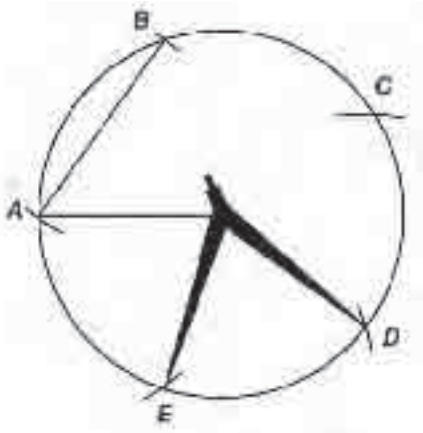
¿Cuánto medirá cada uno de los ángulos centrales determinados por los lados del pentágono?

Los dibujos te ayudarán para hacer tu construcción



$$\frac{360°}{5} = 72°$$



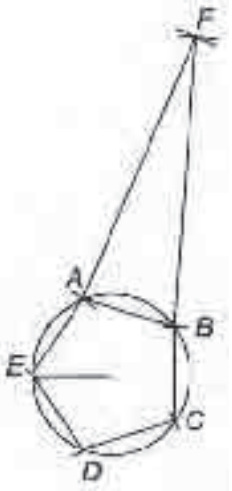


Una vez que señalas uno de los ángulos, determinas el lado del polígono y con ayuda del compás señala los otros vértices sobre la circunferencia.
Para obtener el polígono unes puntos consecutivos.

¿Te resultó tu construcción?

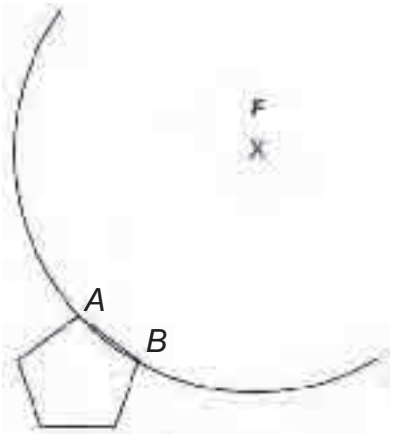
5. Ya dibujaste una base para el desarrollo de la pirámide. Ahora, ¿cómo dibujar las caras laterales?
Sigue este procedimiento que te llevará a la construcción del modelo de pirámide pentagonal.

Una vez que tienes el pentágono $ABCDE$, toma como base uno de los lados, por ejemplo AB.



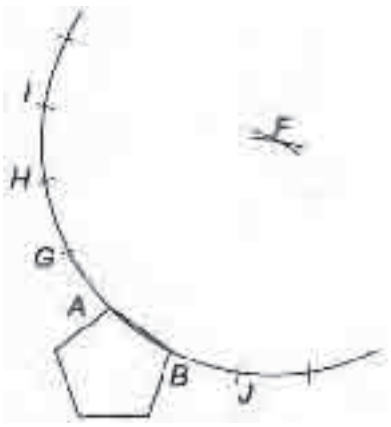
Elige una longitud para la arista de la pirámide y con ayuda del compás trazas el triángulo isósceles ABF.

Con radio AF y centro en F, traza un semicírculo que pase por los puntos A y B.



Con la longitud AB y a partir de A, o de B, señala arcos consecutivos sobre el semicírculo.

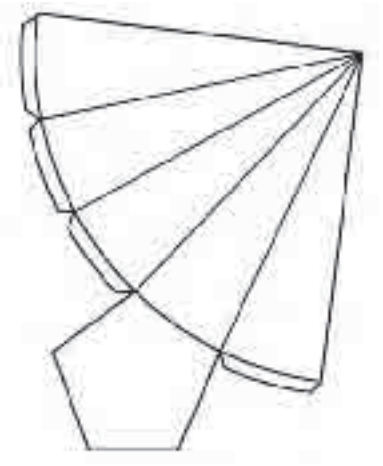
Tantos segmentos como lados del polígono. En este caso 5, correspondientes al pentágono de la base.



Traza los segmentos que determinan los triángulos laterales. Deja pestañas para el pegado del modelo.

Completa tu modelo en cartulina.

Compara tu modelo con el realizado por otros compañeros(as).



Observa el video y comenta con tus compañeros(as) los aspectos que encuentres relevantes.

Con tus compañeros(as) de grupo, elabora un cuadro en donde determines el ángulo central de un polígono inscrito según el número de lados.

Triángulo	**Ángulo central =** $\frac{360^{o}}{3}$	**Ángulo central = 120º**
Cuadrado		
Hexágono		
Heptágono		
Octágono		

Compara tus hallazgos con los de tus compañeros(as). Quizás quieras ampliar el cuadro.

Construye un modelo de pirámide regular, elige el polígono de la base y las longitudes que quieras usar. Especifica sus características: polígono de la base, caras laterales, aristas, vértices.

Socializa tu trabajo con tus compañeros(as) y el profesor(a).

74
117 - 3

BARQUILLOS SIN HELADO

Conos
Desarrollo plano y armado de conos

Tanto en la naturaleza como en lo creado por el hombre encontramos al cono. ¿Recuerdas algunas cosas con esa forma?

Ve atentamente el video. Observa objetos que tienen esa forma, comenta sobre las ventajas que ello les da.

Lee, analiza y realiza las construcciones sugeridas en la lectura siguiente:

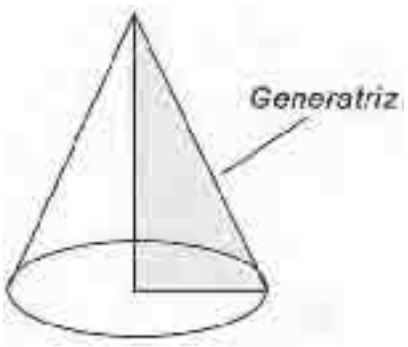
CONOS

El cono es una forma geométrica que comúnmente se ve en objetos del medio cotidiano.

Ejemplos de ellos son los silos donde se almacenan granos, los deliciosos barquillos de galleta, los útiles embudos, algunos árboles de zonas frías (coníferas), etcétera.

Ya sabes que el cono es un cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo que gira sobre uno de sus catetos. De esta forma tendrá una base en forma de ***círculo*** y una superficie curva llamada ***superficie cónica de revolución***.

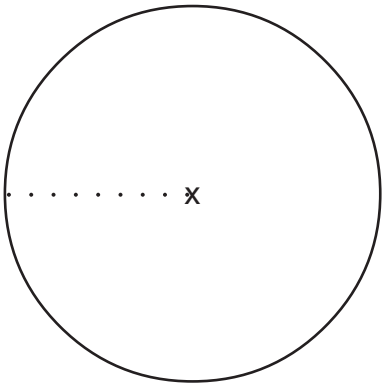
La hipotenusa del triángulo también se conoce como generatriz, pues es la que genera la superficie cónica.



Es importante no confundir la generatriz con la altura del cono. ¿Qué dimensión del triángulo generador corresponde a la altura del cono?

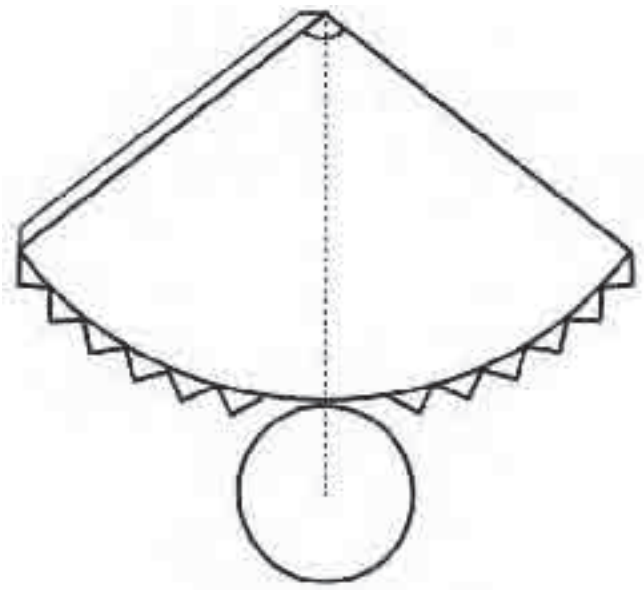
Te invitamos a elaborar un desarrollo plano de este cuerpo geométrico.

Primero se elige el radio con el cual se va a trazar la base.



Enseguida, se elige la medida de la generatriz. Esta medida se utiliza para construir el sector circular que constituye la superficie lateral del cono.

La longitud del arco de este sector debe tener el mismo perímetro del círculo de la base.



Para evitar el cálculo en centímetros se recurre a la relación entre los ángulos y los radios del círculo de la base y del sector circular del área lateral.

$$X° = \frac{radio\ de\ la\ base \times 360°}{radio\ del\ sector}$$

Donde $X°$ representa la amplitud del arco del sector circular que forma la superficie lateral del cono y cuyo radio es la generatriz.

Así, por ejemplo, si eliges como radio del círculo de la base 4 cm y como longitud de la generatriz 12 cm, el arco del sector circular se calcula así:

$$X° = \frac{radio\ de\ la\ base \times 360°}{radio\ del\ sector} = \frac{4 \times 360°}{12} = 120°$$

El sector circular tiene un radio de 12 cm y el arco es 120°.

Debes dejar pestañas, como las sugeridas en el dibujo, para pegar el modelo.

Con tus compañeros(as) de grupo:
Construye un desarrollo plano de un cono.

- Elige el radio de la base.
- Elige la longitud de la generatriz.
- Calcula el arco del sector circular que conformará la superficie lateral.

Usa cartulina, tijeras y pegante.

Recorta el desarrollo plano del cono y ármalo.

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as).

75
118 - 3

LO QUE DA FORMA

Líneas de pirámides y conos
Cálculo de la altura, la arista, o la apotema de pirámides rectas y conos de revolución

Dada la importancia de los cuerpos con forma de pirámide o de cono, es conveniente conocerlos más a fondo.

Observa con atención el video que te mostrará aspectos importantes sobre estos cuerpos geométricos. Coméntalo con tus compañeros(as) de grupo.

Trabaja con tu grupo.

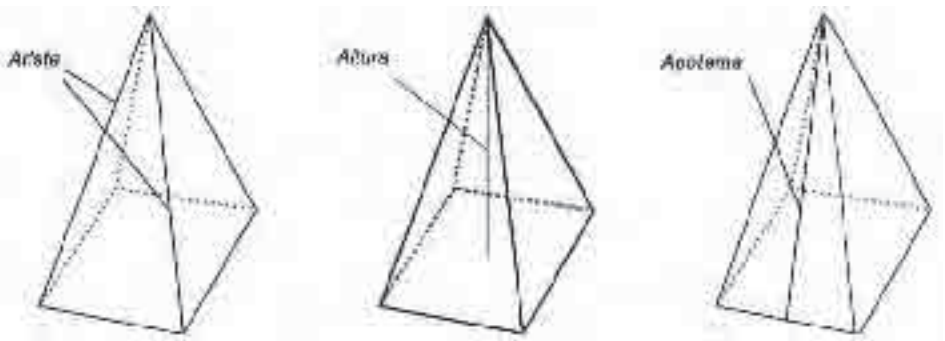
1. Debes tener claro que en una ***pirámide regular*** su base es un polígono regular cualquiera y tiene tantas caras triangulares como lados tenga su base.

   Define a qué llamamos aristas de una pirámide.
   ¿Cuáles son las aristas laterales y cuáles las aristas de la base?

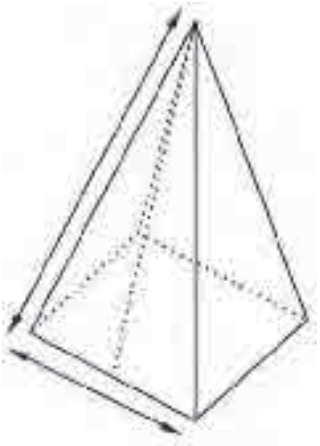
   Has visto en el video cómo podemos identificar otras magnitudes en la pirámide.

   Altura: Distancia entre el vértice y el centro de la base.

   Apotema: Altura de cualquiera de sus triángulos laterales.



Si tienes una pirámide cuadrangular como la mostrada en el dibujo, de la cual conoces la longitud de la arista lateral y el lado del cuadrado de la base, ¿cómo encuentras la apotema o altura del triángulo lateral?

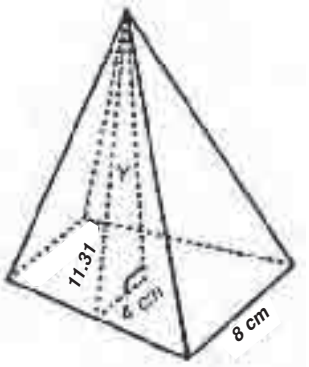


Fíjate en los triángulos congruentes que se forman sobre la cara lateral, al trazar su altura.

Si la arista mide 12 cm y el lado del cuadrado de la base es 8 cm, explica por qué la siguiente expresión te permite hallar la apotema

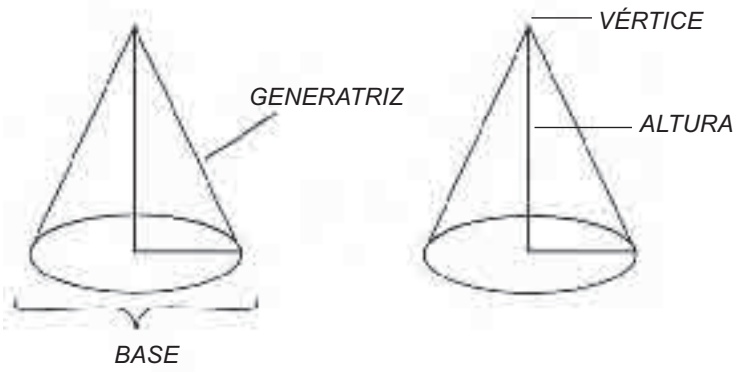
Apotema = $\sqrt{(12cm)^2 - (4cm)^2}$

Una vez calculada la apotema,



- ¿Cómo puedes calcular la altura de la pirámide?
- ¿Qué triángulo forman la apotema, la altura y el segmento que une el centro de la base con el punto del lado donde corta la apotema?
- ¿Qué expresión te permite hallar la altura? Escríbela y explica.

2. El cono se forma con el giro de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. Así, la generatriz es la arista del cono. Su altura está determinada por el cateto del triángulo rectángulo que lo genera, y va del vértice a la base.

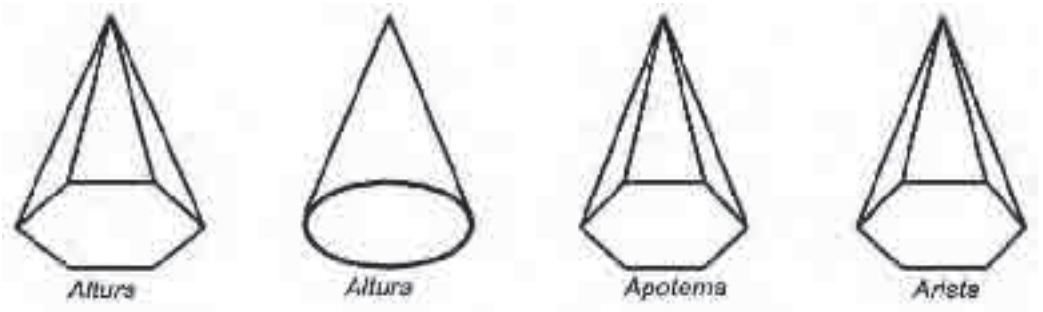


Si de un cono conoces la longitud de la generatriz y el radio de la base, ¿cómo calculas la altura?

Hazlo para un cono cuya generatriz mide 10 cm y el radio de la base es 3 cm.

Discute tus hallazgos con los compañeros(as) de grupo y el profesor(a).

Con un compañero(a) haz los siguientes dibujos en tu cuaderno y traza en ellos las líneas que se indican.



Compara tus trazos con los de otros grupos.

De manera individual, resuelve el siguiente ejercicio: haz el dibujo de la figura que a continuación se te pide. Realiza en tu cuaderno las operaciones.

1. Calcula la apotema de una pirámide cuadrangular cuya base mide 25 cm^2 y la arista 7 cm.

   a) ¿Cuánto mide la superficie de la base de la pirámide?

   b) ¿Cuánto mide cada lado de la base?

   c) ¿Cuánto mide la mitad de un lado de la base de la pirámide?

   d) ¿Cuánto mide la apotema de la pirámide?

2. Si el perímetro de la base de un cono mide 18.84 cm y su generatriz mide 8.5 cm, ¿cuánto mide la altura? Usa $\pi = 3.14$

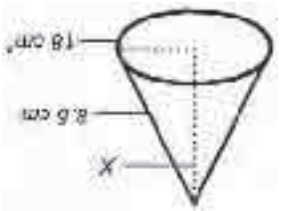
a) ¿Cuánto mide el diámetro de la base?

b) ¿Cuánto mide el radio?

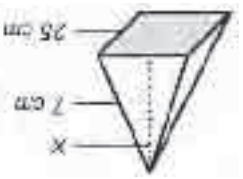
c) ¿Cuánto mide la altura del cono?

Compara tu ejercicio con la clave y, si tienes errores, corrígelos.

CLAVE



a) 6 cm
b) 3 cm
c) 7.95 cm



a) 25 cm
b) 5 cm
c) 2.5 cm
d) 6.53 cm

76

119 - 3

UN PUNTO EN LA CUMBRE

Pirámides y conos
Representación plana de pirámides y conos

A través de la geometría plana se pueden representar en dos dimensiones figuras y cuerpos geométricos.

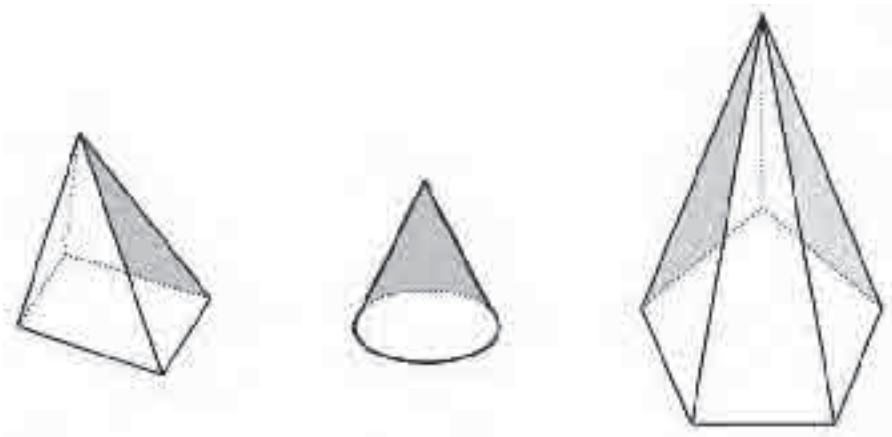
Ve atentamente el video y observa la representación plana de pirámides y conos.

Con tus compañeros(as) de grupo lee y analiza el siguiente texto.

PIRÁMIDES Y CONOS

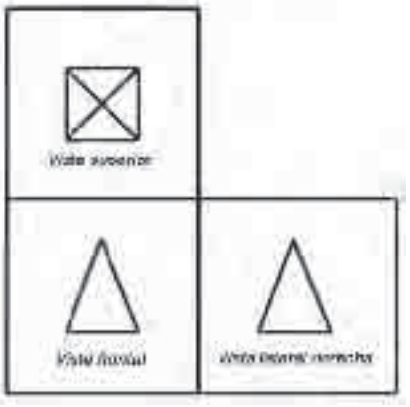
Anteriormente se vio la representación plana de algunos cuerpos geométricos, para lo cual se recurrió a sus vistas. Ahora se verán las pirámides y los conos.

Como ya sabes, los cuerpos no son visibles en su totalidad al ojo humano y al representarlos en un plano se recurre a diversas formas, una de las cuales puede ser el dibujo con líneas gruesas para las caras visibles y líneas segmentadas para las caras ocultas. Observa:



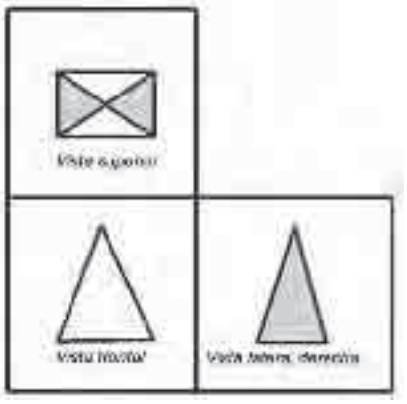
Otra forma, como se mencionó al principio, es la de recurrir al dibujo de las vistas del cuerpo para lo que es necesario señalar que sólo se tomarán en cuenta las siguientes:

Si la pirámide es de base cuadrangular, sus vistas quedarán así:



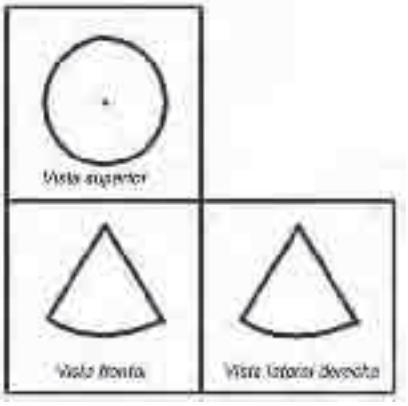
En este caso, como la base de la pirámide es un cuadrado, la base de los triángulos que forman las caras laterales medirá lo mismo; y por tratarse de una pirámide recta, la altura de las caras también será la misma.

Ahora se presentan las vistas de una pirámide rectangular.



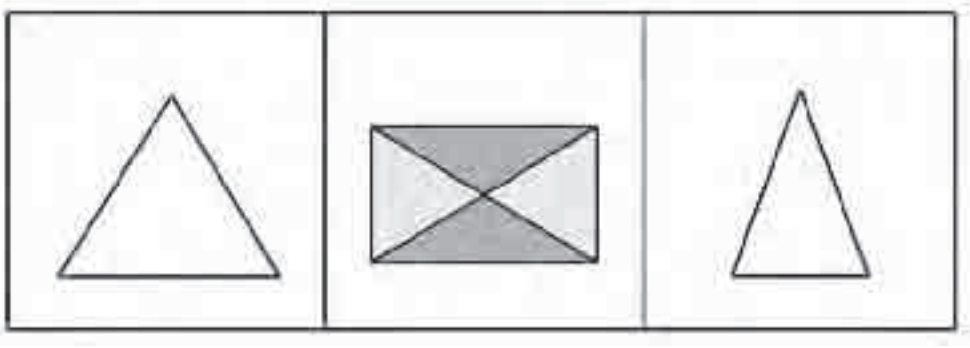
Nota que hay dos caras cuya base es mayor que las otras, pues corresponden a los lados más largos del rectángulo base. También es conveniente hacer hincapié en que si la vista frontal corresponde al lado más largo de la base, entonces la vista lateral será el triángulo con menor base. En cambio, si la vista frontal es el triángulo con menor base, la vista lateral derecha corresponderá al triángulo con mayor base.

En seguida, se representan las vistas principales de un cono.



Puedes notar que cualquiera de las vistas laterales del cono es igual a la vista frontal, sólo la vista superior será diferente de éstas.

Continúa con tu equipo, realiza en tu cuaderno el siguiente dibujo, coloca en cada cuadro el nombre de la vista que se ilustra.



¿De cuál cuerpo geométrico se trata?

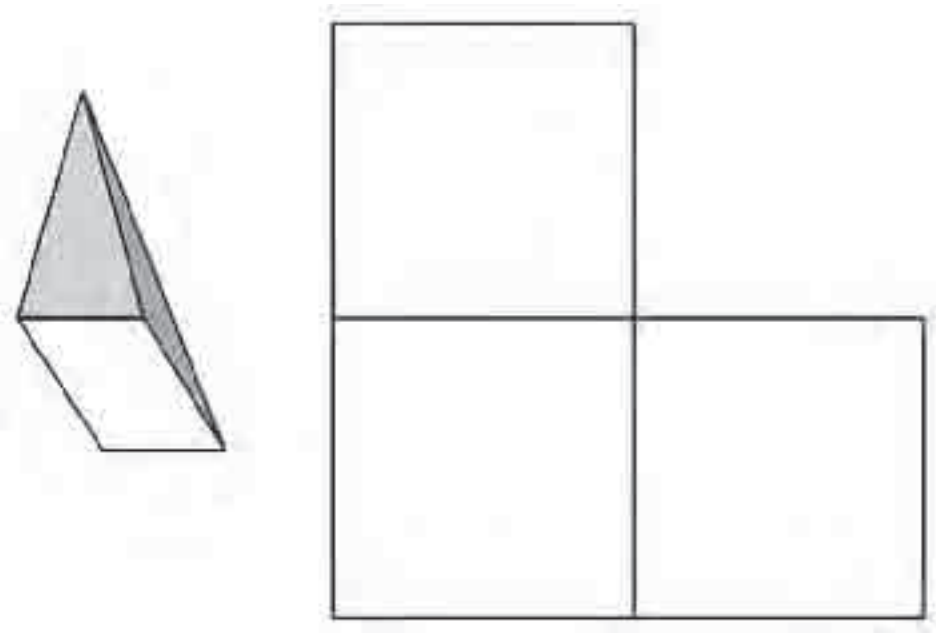
Compara tu ejercicio con el de tus compañeros(as).

Con un compañero(a), dibuja las tres vistas principales de los siguientes cuerpos:

a) Pirámide hexagonal cuya altura es de 3 cm y cada lado de la base mide 1.5 cm.
b) Cono, cuya altura mide 3 cm y el radio de la base mide 1 cm.

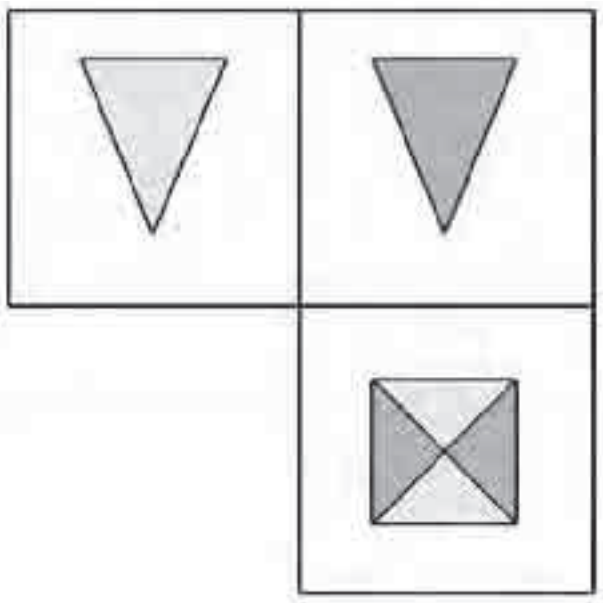
Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as).

Individualmente, resuelve esta sección y dibuja las tres vistas principales de esta pirámide (las caras opuestas tienen el mismo dibujo).



Compara las vistas que dibujaste con las que aparecen en la clave.

CLAVE



77
120 - 3

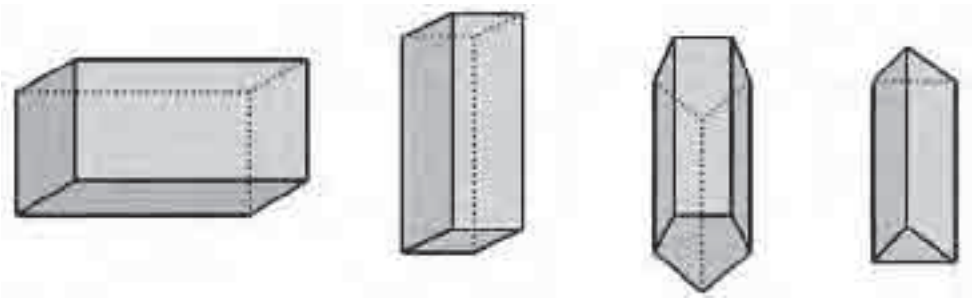
PRISMAS EN REBANADAS

Cortes de prismas
Representación de los cortes horizontal y vertical de prismas

Al comprar jamón o queso generalmente los venden en rebanadas, así mismo algunas frutas como son la piña, la sandía y el mango; pero... ¿prismas en rebanadas?, ¿qué significa?

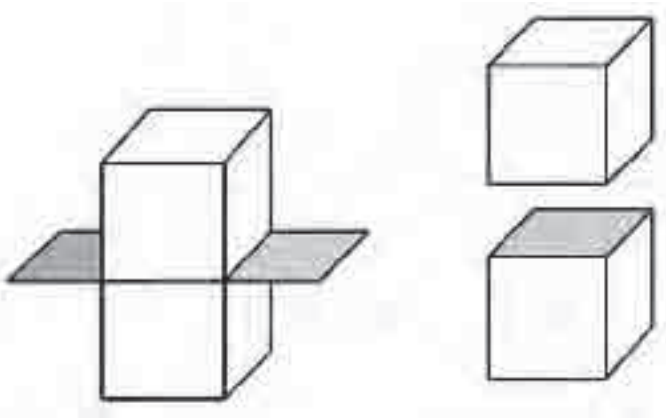
Invita a dos compañeros(as) para realizar el siguiente taller:

1. Construyan modelos de prismas sencillos, cuadrangulares, rectangulares o triangulares, en un material fácil de manejar. Te sugerimos plastilina, greda, queso, gelatina, jabón u otro material sobre el que fácilmente y sin peligro puedas realizar cortes.

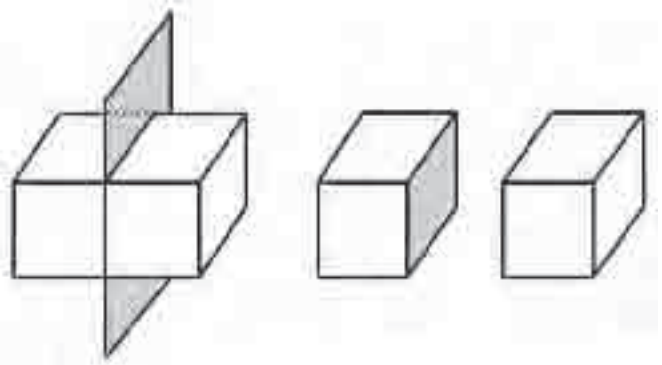


2. Elige un prisma cuadrangular. Efectúa un corte horizontal, a cualquier altura. Se obtienen dos prismas cuadrangulares, los cuales pueden ser o no congruentes.

   Realiza dibujos que ilustren el trabajo que has hecho. Seguramente se parecerán a la siguiente figura.



3. Sobre un prisma rectangular, haz un corte vertical. Realiza los dibujos correspondientes. Podrán ser como los siguientes:
Explica las condiciones que te permitan obtener dos prismas congruentes, en este caso.



4. Elige ahora un prisma triangular, realiza un corte horizontal. Ilustra tus dibujos. Sobre el mismo modelo de prisma haz un corte vertical. Haz los dibujos que ilustren el procedimiento. Comparte tus trabajos físicos como gráficos con tus demás compañeros(as) y el profesor(a).

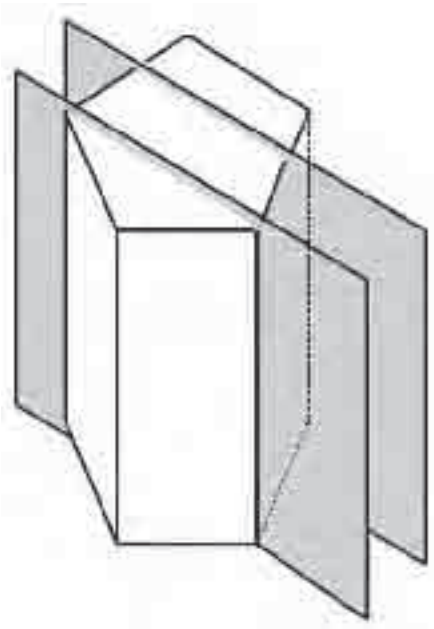
Observa el video. Comenta los aspectos que complementen el trabajo que has hecho.

Con tus compañeros de grupo lee la siguiente conclusión que recoge el trabajo que has realizado.

> Siempre que se realice un corte horizontal a un prisma recto se obtienen otros prismas similares que pueden ser o no congruentes.
>
> Cuando se realicen cortes verticales y paralelos a un prisma recto, se pueden obtener otros prismas diferentes en forma y dimensiones del original.

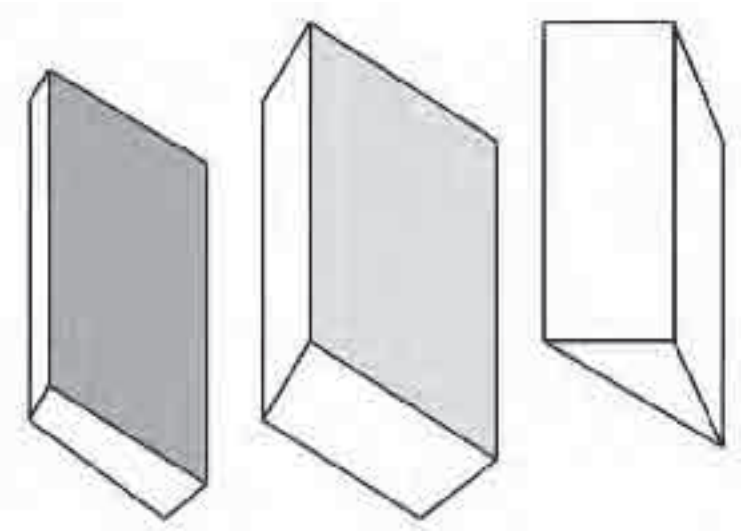
Discute con tus compañeros(as) e ilustra estas generalidades con ejemplos gráficos en cada caso.

En forma individual dibuja los prismas que resultan al efectuar dos cortes paralelos verticales a un prisma pentagonal como el que se tiene a continuación:



Compara los prismas que obtuviste con los de otros compañeros(as), en caso de ser diferentes, consulta con la clave.

CLAVE



78
121 - 3

CUERPO CORTADO

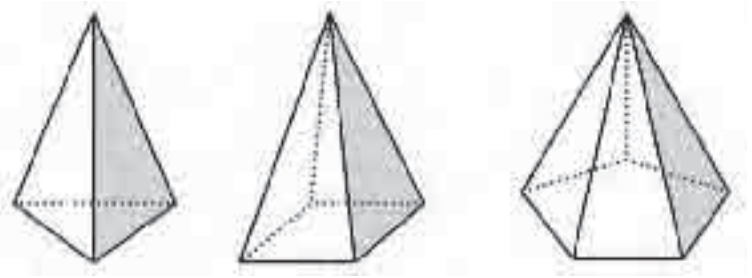
Cortes de pirámides
Representación de los cortes horizontal y vertical de pirámides

La relación entre el dibujo técnico y la geometría es evidente cuando se ve que gran parte de las figuras o piezas dibujadas resultan de la combinación de elementos geométricos, como líneas rectas, líneas curvas, circunferencias, pirámides, polígonos, etc. La relación entre ambos no sólo existe en el aspecto gráfico, sino también en el teórico, es decir conceptos de paralelismo, perpendicularidad, simetría, etc.

Observa detenidamente el video, en donde podrás ver con claridad los cortes que se hacen en una pirámide.

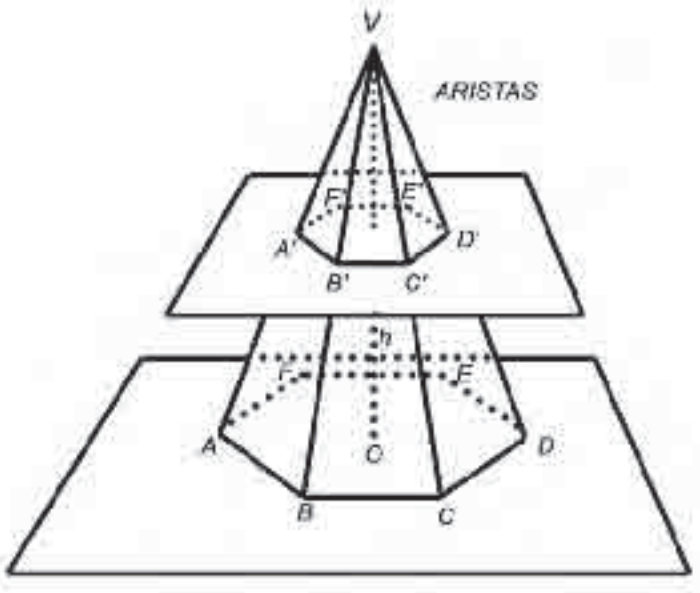
Con tus compañeros(as) de grupo lee y analiza el siguiente texto.

Cortes de pirámides



Debes tener claro que nos referimos a una pirámide como aquel poliedro, en el que una de sus caras es un polígono cualquiera y las demás son triángulos que concurren en un punto llamado cúspide. Se clasifican, de acuerdo con el tipo de polígono en su base, en regulares e irregulares.

Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base, el plano divide las aristas y la altura proporcionalmente.



Un objeto puede ser dibujado y su representación quizá dé una idea aproximada de cómo es. Las vistas son un sistema de representación que permite definir de manera más completa un objeto (en este caso una pirámide) mediante dibujos.

Cada vista recibe un nombre de acuerdo con el punto desde donde se mira al objeto, teniéndose así las vistas siguientes:

Vista Frontal *(VF)*: Imagen que resulta de observar el objeto desde el frente.

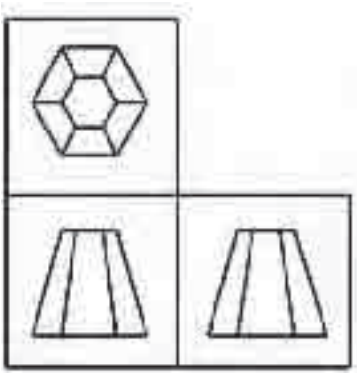
Vista Superior *(VS)*: Imagen que resulta al mirar el objeto desde arriba.

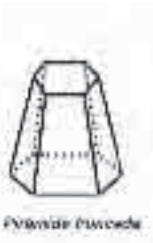
Vista Lateral Derecha *(VLD)*: Imagen que resulta al mirar el objeto desde el lado derecho (del observador).

Representando las vistas en un plano (superficie), quedan en el orden que se muestra en la siguiente ilustración:

VS	
VF	*VLD*

De esta forma, si se dibuja el corte de la parte de debajo de la pirámide anterior se puede visualizar mejor como queda.

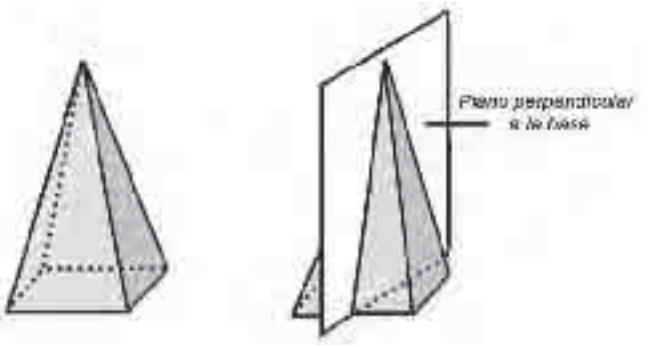




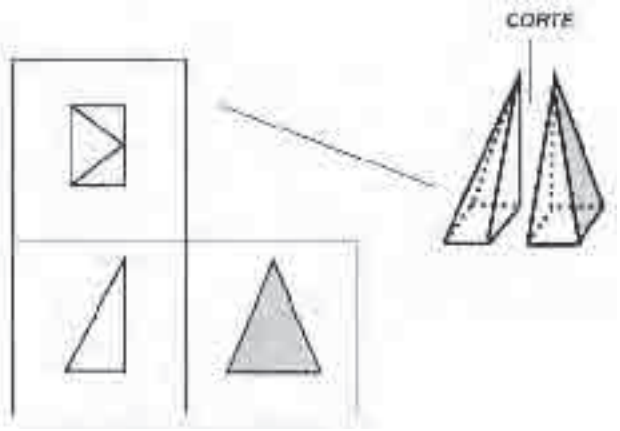
De acuerdo con lo anterior, la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección determinada por un plano paralelo a la base se llama ***pirámide truncada***.

Las caras de un tronco de pirámides o pirámide truncada son ***trapecios***.

Ahora bien, si se corta una pirámide por la cúspide por un plano cualquiera perpendicular a la base, se observa:



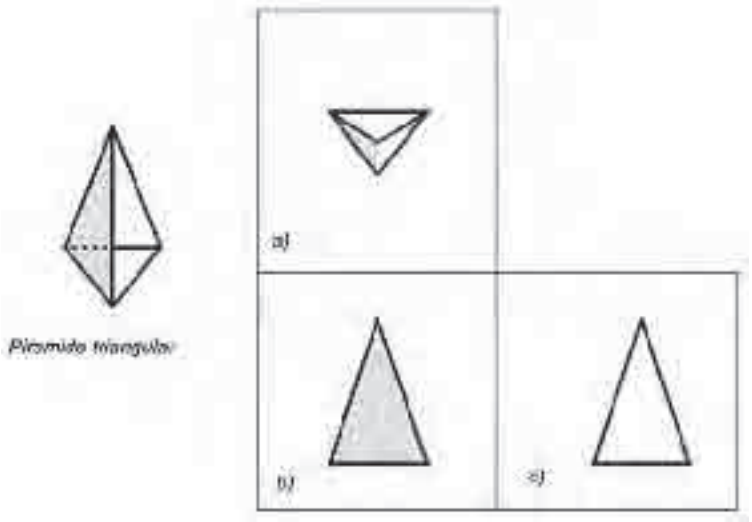
Proyectando la vista de uno de los cortes, como por ejemplo la pirámide que queda en la parte lateral izquierda, se observa:



Vistas

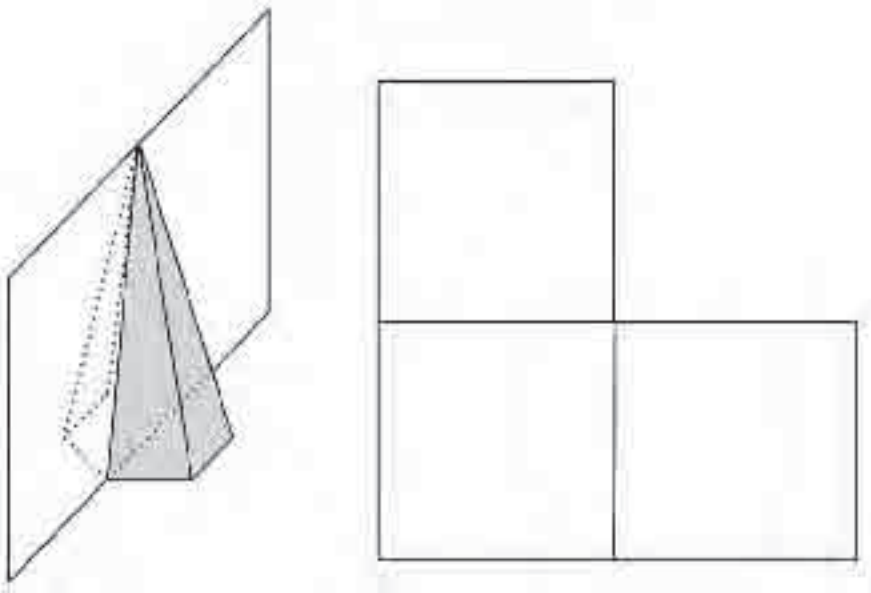
Nótese que la vista frontal es un triángulo rectángulo, y la vista lateral derecha es un triángulo isósceles.

De acuerdo con la figura de la izquierda, identifica la vista que se ilustra en cada cuadro. Haz tus dibujos en tu cuaderno.



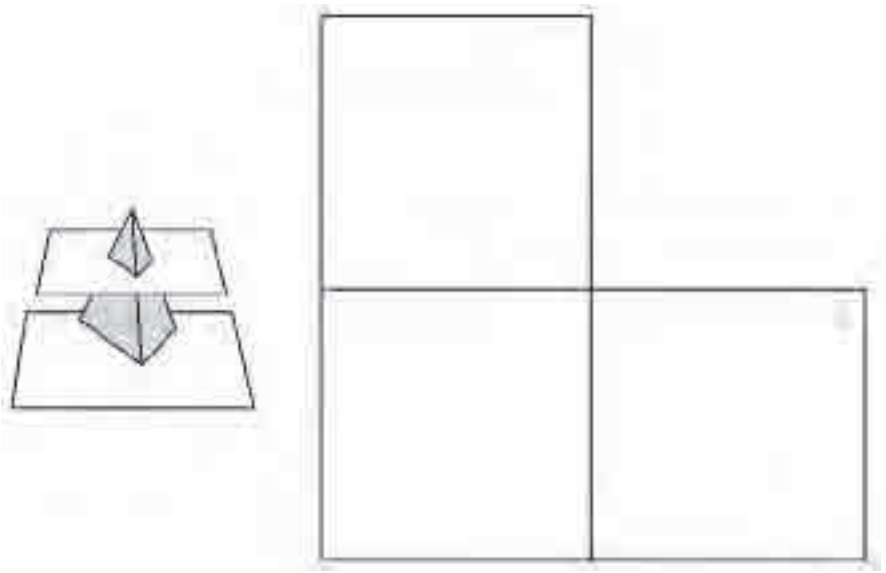
Comparte tus trabajos con los demás compañeros(as).

Con un compañero(a) traza las vistas de una parte de la pirámide cortada verticalmente.



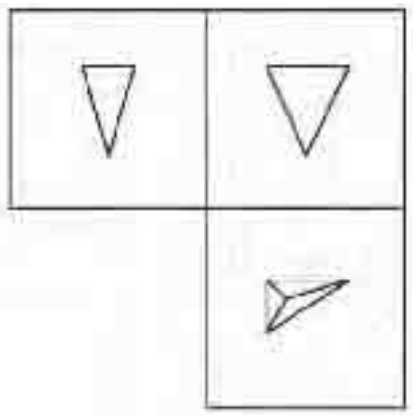
Compara tus dibujos con los de otros grupos. En caso de duda pregunta al profesor(a).

En forma individual dibuja las vistas de la parte superior de la pirámide dejada por el corte del plano.



Compara tus dibujos con los de la clave.

CLAVE



79

123 - 3

OCUPAN UN LUGAR EN EL ESPACIO

Volumen de pirámides y conos
Deducción y aplicación de las fórmulas respectivas

El espacio ocupado por un sólido recibe el nombre de volumen. Éste se determina fácilmente cuando el cuerpo tiene forma regular y se conocen algunas de sus dimensiones.

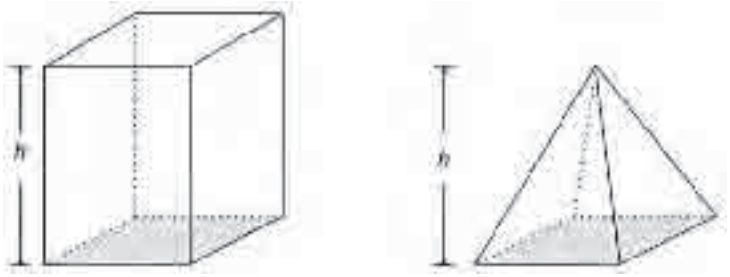
Trabaja con tus compañeros(as) de grupo.

A esta altura de tu trabajo en matemáticas ya sabes cómo hallar el volumen de un prisma.

$$volumen = Área\ de\ la\ base \times altura$$
$$V = A_B \times h$$

Pero, ¿cómo hallar el volumen de una pirámide?
Te invitamos a realizar una comprobación que solucione la pregunta anterior.

1. Construye en cartulina modelos de un ***prisma*** y una ***pirámide huecos***, con la misma base y con la ***misma altura***.

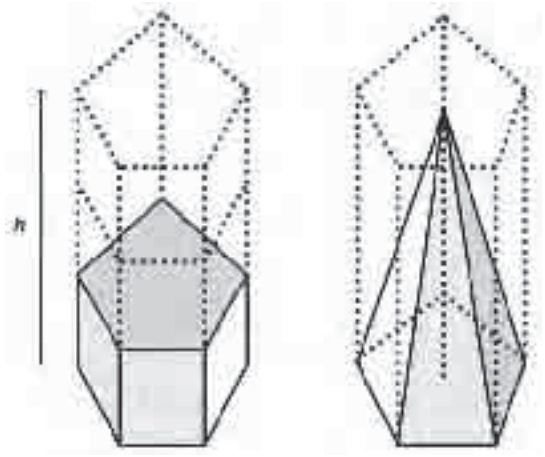


Si tus modelos son fuertes y muy bien pegados llena con agua la pirámide y con esta medida llena el prisma. ¿Cuántas veces debes repetir el procedimiento para lograr llenar el prisma? ¿Qué relación encuentras entre el volumen del prisma y el de la pirámide?

(En lugar de agua puedes usar arena para llenar los modelos huecos).

¿Estarías de acuerdo en usar la siguiente expresión para calcular el volumen de la pirámide?

$$V\ pirámide = \frac{1}{3} A\ base \times h$$

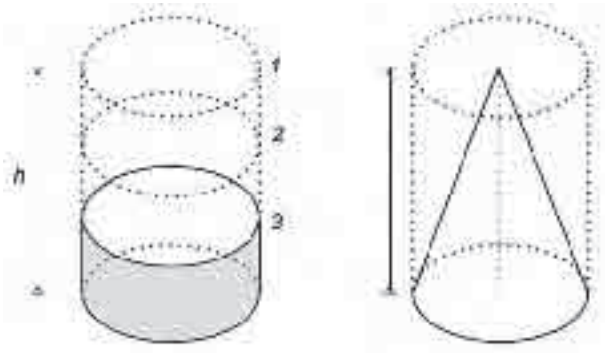


2. Respecto al volumen del cilindro conoces cómo calcularlo:

$$V\ cilindro = A\ base \times altura$$

Y, ¿cómo hallar el volumen de un cono?

Construye modelos huecos de un cilindro y un cono de base y alturas congruentes. Procede como en el caso anterior y, usando agua o arena, llena el cilindro con el contenido del cono.



¿Cómo resulta ser el volumen del cono comparado con el del cilindro?

¿Te lleva tu experiencia a verificar que: $V\ cono = \frac{A\ base \times h}{3}$

Comparte tus hallazgos con los que hayan logrado tus compañeros(as) de grupo.

Observa el video y comenta con tus compañeros(as) los aspectos de éste que consideres relevantes.

Resuelve individualmente el siguiente problema:

¿Cuál es el volumen en dm^3 de una pirámide cuadrangular que mide 28 cm de altura y 9 cm por lado de su base?

Compara tus resultados con el que se muestra en la clave;

CLAVE

$V = 0.756\ dm^3$

80
123 - 3

EL ESPACIO QUE OCUPA UN BALÓN

Área y volumen de la esfera
Aplicación de las fórmulas para el cálculo del área y el volumen de cada cuerpo

En los objetos construidos por el hombre, al igual que en los sólidos de la naturaleza encontramos formas esféricas. Los balones, las canicas, las naranjas, las uvas, son ejemplos de estas formas.

Has aprendido a definir la esfera, como un sólido limitado por una superficie curva cuyos puntos, cualquiera de los que forman esa superficie, equidistan de un punto interior llamado centro. Los términos radio y diámetro tienen un significado análogo a los del círculo.

Con tus compañeros(as) de grupo trabaja y analiza.

Dibuja sobre cartulina un semicírculo. Recórtalo y sobre el diámetro pega una varilla delgada, que puede ser de balso. Si giras el semicírculo sobre la varilla:

¿Qué cuerpo se genera en una rotación de una vuelta completa?

¿Cómo es la superficie engendrada por el giro completo de la semicircunferencia?

¿Cómo definirías la esfera como un cuerpo de revolución?

Comparte con tus compañeros(as) tus hallazgos.

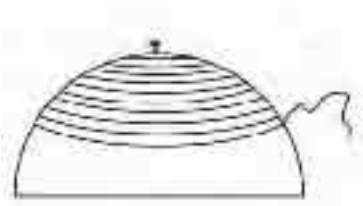
Continúa con tu grupo para realizar unas experiencias que nos acerquen a contestar la pregunta:

¿Cómo calcular el área de la superficie de la esfera y también su volumen?

1. Para el experimento vas a usar: una semiesfera, es decir una esfera partida a la mitad. (Puedes usar como modelo una esfera de icopor o, en su defecto, una naranja), un hilo grueso (pita o lana), un par de chinches o alfileres.

   Con ayuda del chinche, sostén la punta de la lana y enróllala de tal manera que se cubra la superficie de la semiesfera.

   Procede como cuando enrollas la pita sobre un trompo. Procede en forma similar para cubrir la superficie del círculo máximo determinado al cortar la esfera a la mitad.



Al finalizar estas dos tareas, compara las longitudes de la lana o pita empleada.

¿Qué observas?

¡Seguramente la lana empleada en cubrir la superficie de la semiesfera es el doble de larga que la empleada para cubrir el círculo máximo de la semiesfera!

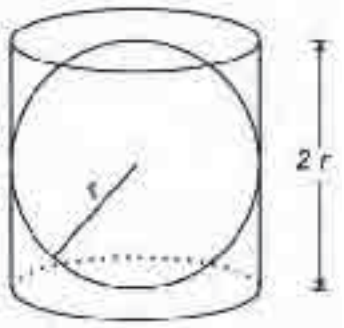
Si el experimento te resulta, ¿qué podrías decir del área de la semiesfera comparada con el área del círculo máximo correspondiente?

Ya sabes que el área de un círculo es:

$$A_C = \pi\, r^2$$

¿Cómo expresas, entonces el área de la semiesfera? Y, ¿cómo el área de toda la esfera?

2. Otro experimento que nos lleva a encontrar una expresión para el área de la esfera, es buscar la relación entre el área lateral de un cilindro circunscrito a una esfera.



Usa un modelo de esfera, como una pelota de ping pong, o de icopor.

Construye el área lateral del cilindro circunscrito en papel delgado.

Trata de cubrir la esfera con el papel, con el que construiste el área lateral del cilindro. Para ello deberás hacer muchos cortes y con los pedazos ir recubriendo la superficie de la esfera. ¿Qué observas?

Al final de la tarea podrás comprobar cómo el área lateral del cilindro circunscrito es igual al área de la esfera.

¿Cuál es la expresión general para calcular el área lateral del cilindro, cuya altura es *2 r* ?

$$A_{LC} = 2\pi\, r \times 2r = 4\pi\, r^2$$

Compara esta expresión, con la encontrada para el área de la esfera en el punto 1. ¿Qué puedes concluir? ¿Te parece sorprendente?

Hemos recurrido a formas experimentales para calcular el área de una esfera por el hecho de que no es posible hacer un desarrollo plano de la superficie de la esfera. Una demostración matemática rigurosa no está al alcance de nuestro curso. Más adelante contarás con el conocimiento matemático necesario para este fin.

3. ¿Cómo acercarnos a una expresión para calcular el volumen de la esfera?

Consigue con tus compañeros(as) un recipiente de forma semiesférica, como un casquete de pelota de caucho rota, medio melón o media naranja que han sido vaciados de su contenido. Haz una medida aproximada del radio de este recipiente.

Construye un modelo de cono hueco cuya base tenga el mismo radio y cuya altura sea también ese mismo radio.

Llena con arena el cono hueco. Con esta medida llena la semiesfera hueca.

* ¿Con cuántas medidas de arena del cono llenas la semiesfera?

* ¿Cómo resulta la comparación entre el volumen de la semiesfera y el volumen del cono?

* ¿Cómo puedes usar este hecho para calcular el volumen de toda la esfera?

Si el volumen del cono de radio r es:

$$V = \frac{\pi r^2 \times r}{3}$$ (la altura es r)

$$V = \frac{\pi r^2 \times r}{3}$$

(altura es r)

$$V = \frac{\pi r^3}{3}$$

¿Cuál es entonces el volumen de la esfera de radio r?

Comparte y discute con tus compañeros(as) las conclusiones a las que has llegado con los experimentos anteriores.

Observa con atención el video. Las actividades hechas en las sesiones anteriores te han dado elementos para comprenderlo mejor. Comparte con tus compañeros(as) los aspectos más interesantes tanto del video como de los experimentos realizados.

En forma individual, trabaja en tu cuaderno.

Escribe las expresiones que te permiten calcular el área y el volumen de una esfera.

¿Cuál es el área y el volumen de una pelota que tiene un diámetro de 3 dm?

Compara tus respuestas con las de la clave. En caso de que no coincidan, verifica tus procedimientos.

CLAVE

$A = 4\pi r^2$ $\qquad$ $Area = 28.26\ dm^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad$ $Volumen = 14.13\ dm^3$

81
124 - 3

RESUÉLVELOS TÚ MISMO

Problemas
Aplicación de expresiones para encontrar el volumen de algunos sólidos

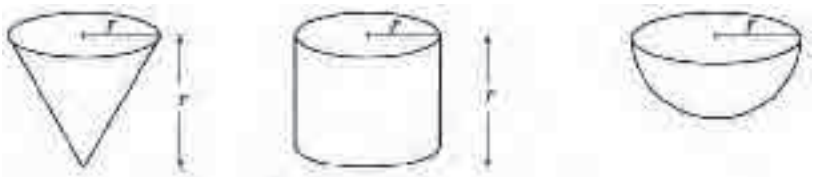
La capacidad de aplicar los conocimientos es más importante que el simple hecho de poseerlos. En esta sesión tendrás oportunidad de demostrar tu capacidad para aplicar los conocimientos en la solución de problemas que impliquen cálculos de volúmenes.

Observa el video que te mostrará procedimientos para solucionar problemas relacionados con el volumen de algunos sólidos.

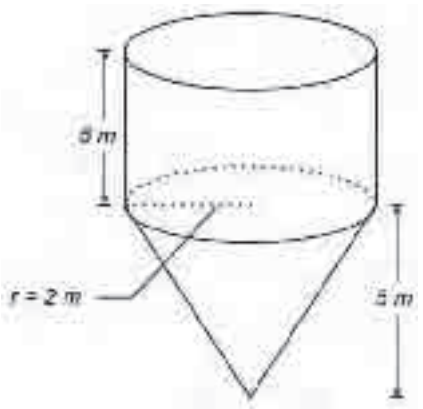
Con dos de tus compañeros(as) resuelve los siguientes problemas.

1. ¿Qué relación encuentras entre el volumen de un cilindro y el de un cono cuyas bases tienen el mismo radio y cuya altura es también la misma?

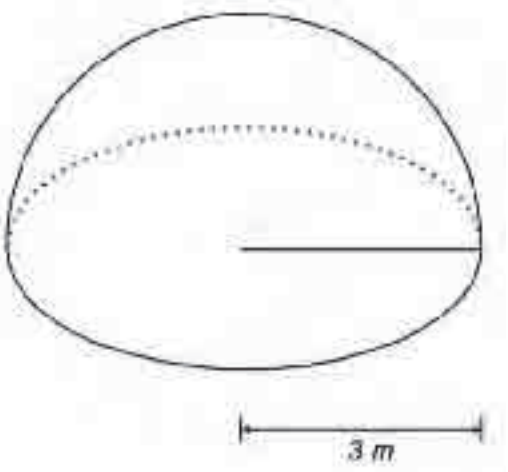
2. Usa el volumen de un cono de radio *r* y altura *r* para comparar los volúmenes de un cilindro, de radio *r* y altura también *r*, y de una semiesfera de radio *r*.



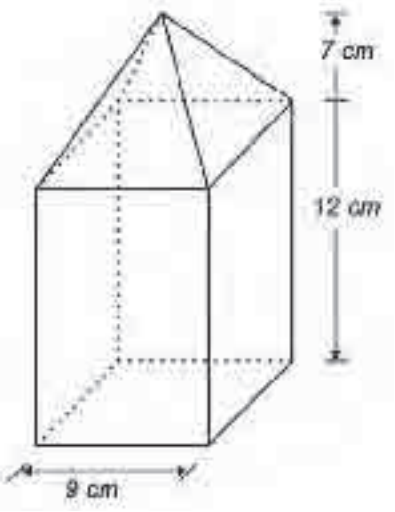
3. ¿Cuál es el volumen de un depósito cuyas medidas se especifican en la figura siguiente?



4. Un tanque de gas en forma de semiesfera tiene un diámetro de 6 m. ¿Cuál es el volumen del tanque?



5. ¿Cuál es el volumen de un depósito cuyas medidas se especifican en la figura siguiente?



Compara tus resultados con los de otros compañeros(as); en caso de error, verifica tus operaciones para que corrijas.

En forma individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

a) El tanque de almacenamiento de agua de una fábrica es de forma esférica y mide 2 m de radio. Calcula su volumen.

b) Si una pirámide de base cuadrada mide 14.5 m de lado en la base y 8.75 m de altura, calcula su volumen.

Compara tus resultados con los de la clave, en caso de que no coincidan, verifica tus operaciones.

CLAVE

a) 33.493 m^3 , b) 613.229 m^3

82
125 - 3

COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

Sobre los conocimientos adquiridos
Integración de lo aprendido

Esta sesión es un repaso de los temas que aprendiste. Con ella tendrás oportunidad de recordar y aplicar nuevamente los conocimientos vistos en este núcleo; por otra parte, podrás retomar aquellos que aún no son suficientemente claros para trabajar en ellos y comprenderlos.

Observa el video que te presenta los conocimientos claves de esta sesión. Si aún tienes dudas trata de aclararlas con tus compañeros(as) y con tu profesor(a).

Con un compañero(a) realiza el siguiente trabajo.

1. Explica en qué consiste cada una de las vistas principales que puedes dibujar de un cuerpo sobre un plano. Ilustra tu explicación con un ejemplo.

2. Para encontrar las diagonales de las caras de un paralelepípedo usas el teorema de Pitágoras. Explica cómo lo puedes usar para hallar la diagonal de este cuerpo.

3. Si la expresión $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ te permite encontrar la longitud de la diagonal de cualquier paralelepípedo, ¿qué consideraciones haces para formular una expresión general para calcular la longitud de la diagonal de un cubo cualquiera?, ¿cuál es entonces esta expresión?

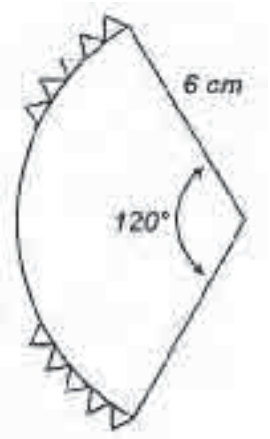
4. ¿Por qué al cilindro, al cono y a la esfera los llamamos cuerpos de revolución?

5. Explica las relaciones entre:

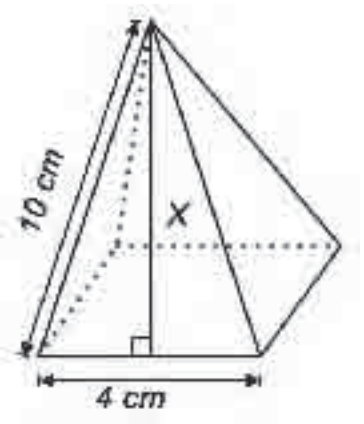
   - El área de una esfera y el área del círculo máximo de esta misma esfera.
   - El área de una esfera y el área lateral de un cilindro cuya base tiene el mismo radio de la esfera y cuya altura es igual a la longitud del diámetro de ésta.
   - El volumen de un prisma y el de una pirámide que tiene la misma base y la misma altura del prisma.
   - El volumen de un cilindro y el volumen de un cono, cuando los cuerpos tienen la misma base y la misma altura.
   - El volumen de una esfera y el volumen de un cono cuya base es igual al círculo máximo de la esfera y la altura es igual al radio de ésta.

En forma individual, realiza lo siguiente:

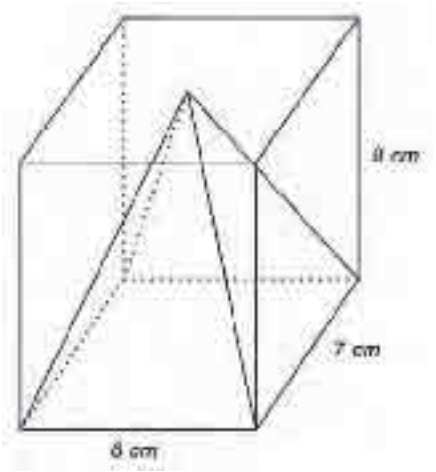
6. Traza la base del cono que se muestra en la figura. Para ello, debes calcular su radio.



7. Calcula la apotema de la pirámide siguiente:



8. Calcula el volumen del prisma y la pirámide representadas enseguida.



9. En una fábrica de helados se está diseñando un recipiente que contenga la tercera parte de lo que contiene un recipiente cilíndrico de 3 cm de radio y 5 cm de altura. El nuevo recipiente debe tener la misma base y altura del cilindro. ¿Qué forma y dimensiones debe tener el nuevo recipiente?

10. La diagonal de un paralelepípedo rectangular mide 7 cm, si su altura es de 6 cm y su largo es de 3 cm, ¿cuánto mide su ancho?

Al concluir el trabajo, consulta con tu maestro(a) la forma como llevará a cabo la evaluación correspondiente.

83
126 - 3

¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

Demostración del aprendizaje logrado
Evaluación personal de los conocimientos adquiridos

Has concluido un núcleo más; por lo tanto es el momento de demostrar que efectivamente has aprendido nuevas cosas. Ten mucha tranquilidad y seguridad porque esta evaluación es como un ejercicio más de lo que ya sabes.

Observa con atención el video y en forma individual trabaja siguiendo las indicaciones que se dan en él, para que resuelvas la primera parte de tu evaluación personal.

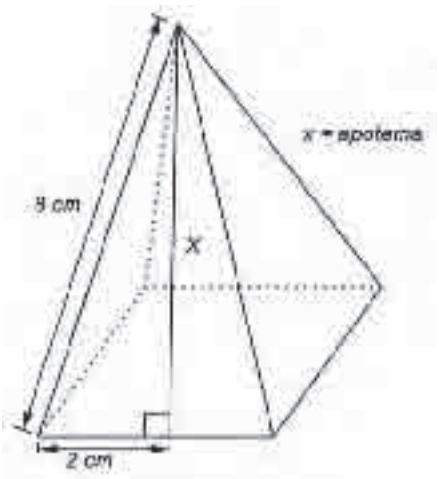
1. a) _____
   b) _____
   c) _____

2. a) _____
   b) _____
   c) _____

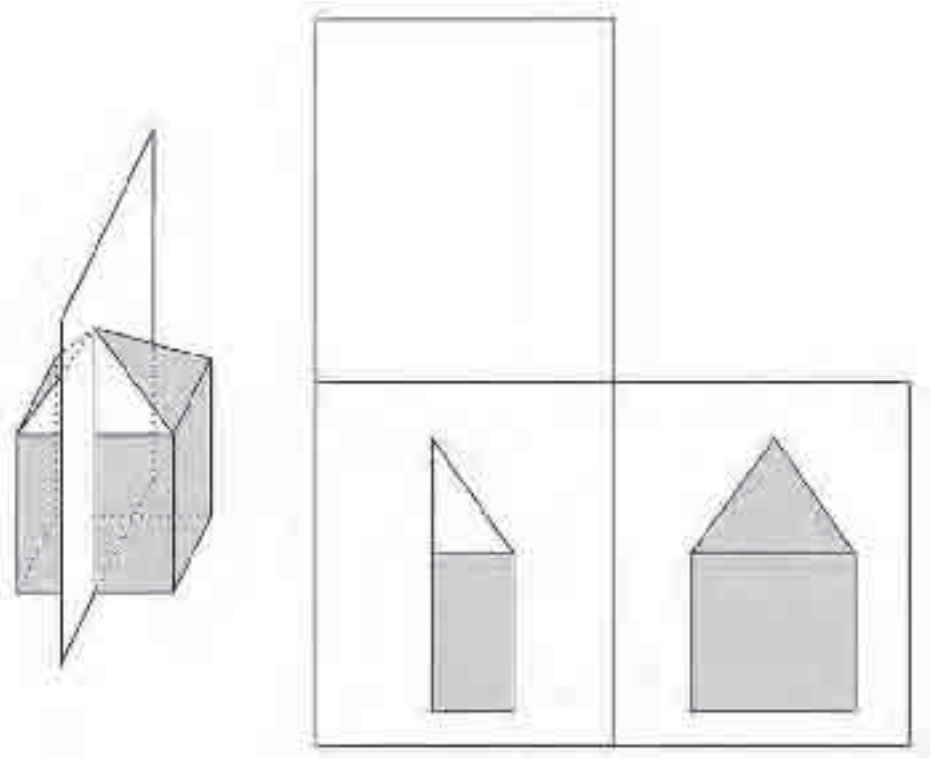
3. a) _____ b) _____

Continúa con tu evaluación sin la ayuda del programa y de forma individual, resuelve los problemas siguientes:

4. Calcula la apotema de la pirámide que se ilustra a continuación.



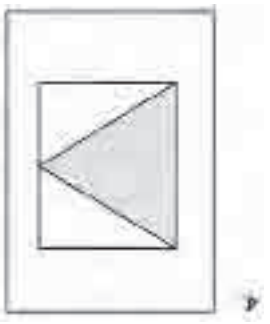
5. Dibuja la vista superior que falta del siguiente cuerpo geométrico cortado.



Compara tus respuestas con las de la clave. Si tienes errores corrígelos. En caso de duda sobre algún resultado consulta con el profesor(a).

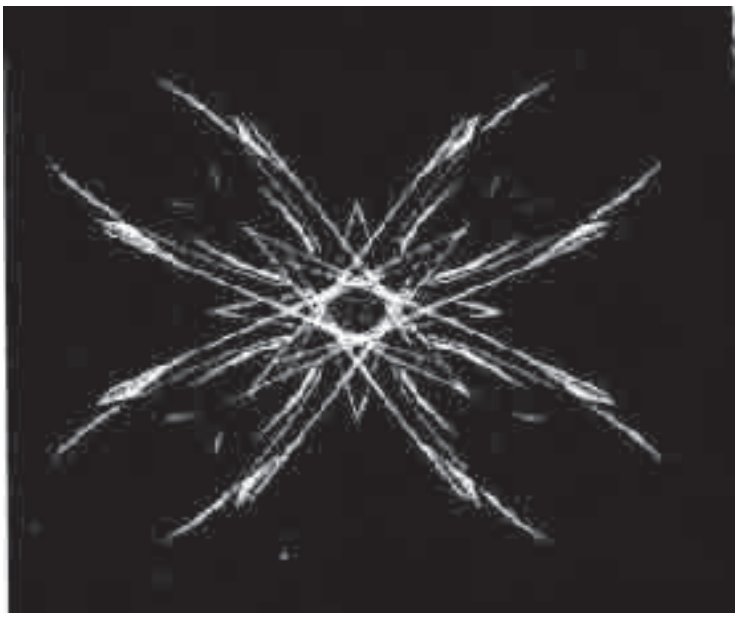
CLAVE

1. g), e), d), h), c), i), k), j), b), a), f)
2. $r = 2\ cm$
3. $X = 9.7\ cm$



Núcleo Básico 6

SEMEJANZA



La geometría, como toda ciencia, se ha desarrollado a través del tiempo. Inicialmente, los egipcios fueron quienes comenzaron su estudio de una forma práctica; después, los griegos lo continuaron empleando para ello el método deductivo. Uno de sus representantes, Tales de Mileto, considerado uno de los siete sabios de Grecia, calculaba la altura de pirámides por medio de la proyección de sus sombras; asimismo, desarrolló el teorema que lleva su nombre, el cual fue empleado en la Edad Media por varios científicos para fundamentar algunos de sus descubrimientos.

Los temas que se verán en este núcleo permitirán determinar la relación que existe entre superficies de figuras y volúmenes de cuerpos, cuando están a escala; por otra parte, se estudiarán los criterios de semejanza de triángulos; se obtendrá una figura semejante con base en la homotecia y se estudiará la justificación del teorema de Tales, el cual permitirá facilitar la construcción de la cuarta y media proporcional.

Algunos de los conceptos desarrollados son básicos para comprender algunas demostraciones que se realizan en trigonometría.

A IMAGEN Y SEMEJANZA

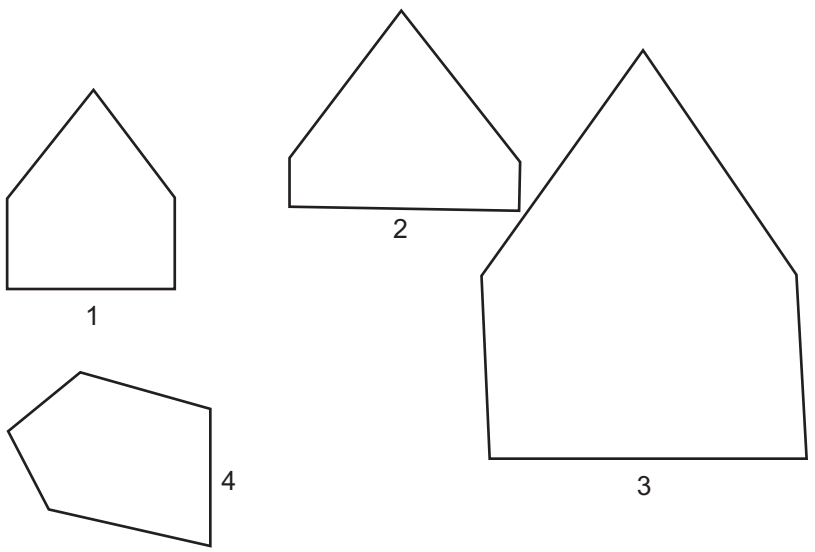
84
127 - 3

Escalas en líneas y superficies
Análisis de la razón entre las longitudes y superficies de figuras trazadas a escala

En el lenguaje cotidiano decimos que dos o más cosas son «semejantes» cuando advertimos características comunes en ellas. Oímos decir que «debemos amar a nuestros semejantes». ¿Quiénes son, pues, nuestros semejantes? ¿Por qué son semejantes nuestros?

En matemáticas debemos precisar mucho más este concepto y encontrar todas las condiciones que nos permiten asegurar que dos o más objetos matemáticos son semejantes.

Con dos de tus compañeros(as), realiza la siguiente actividad:



El dibujo muestra las figuras 1, 2, 3 y 4.

Los lados de la figura 1 son paralelos a los lados de la figura 2.

Compruébalo usando una regla y una escuadra.

Los lados de la figura 1 tienen la misma medida que los lados de la figura 4.

¿Podrías decir que la figura 1 y la figura 2 tienen la misma forma?, ¿o que la figura 1 y la figura 4 tienen la misma forma?

Estarías de acuerdo en decir que el hecho de tener lados paralelos no garantiza que las figuras tengan la misma forma. Tampoco el hecho de tener lados de igual medida hace que las figuras sean de la misma forma.

¿Pero qué puedes decir de las figuras 1 y 3?

¿Tienen estas figuras la misma forma? ¿Dirías que son figuras semejantes?

¿Tienen estas figuras lados paralelos?

¿Tienen sus lados igual medida respectivamente?

¿Qué otra característica tienen en común?

¿Cuál es tu hipótesis?

Comparte con tus compañeros(as) las conjeturas que hagas.

Con tu equipo lee y analiza el siguiente texto.
En él encontrarás muchas cosas que ya sabes de tus cursos anteriores.

ESCALAS EN LÍNEAS Y SUPERFICIES

Los automóviles pequeños de juguete “modelo a escala” son sumamente parecidos a los originales, es decir, son una réplica exacta de ellos.

¿Cómo los hacen tan parecidos?

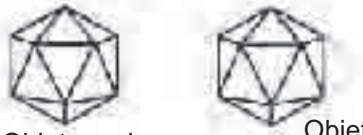
La presente sesión trata sobre las relaciones o escalas que se emplean para lograrlo.

Las escalas se utilizan para ampliar, reducir, o realizar dibujos de objetos y consisten en la aplicación de una razón de semejanza determinada que permite representar dichos objetos en el tamaño deseado.

Según la razón de proporcionalidad, las escalas son:

Escala natural: Es aquella en la que el dibujo tiene las mismas dimensiones que el objeto real. Si se le llama A a una unidad del dibujo y B a una unidad del objeto real, la razón de semejanza es:

$$\frac{A}{B} = 1$$

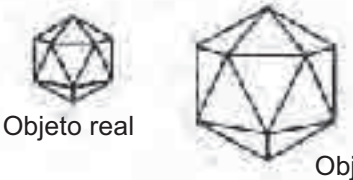


Objeto real

Objeto dibujado a escala natural

Escala de ampliación: Es aquella que se utiliza para dibujar un objeto de mayor tamaño que el que tiene en la realidad. La razón de semejanza es:

$$\frac{A}{B} > 1$$



Objeto real

Objeto dibujado a una escala de ampliación

Escala de reducción: Es la escala que se utiliza para dibujar un objeto de menor tamaño que el que tiene en la realidad. La razón de semejanza es:

Objeto real

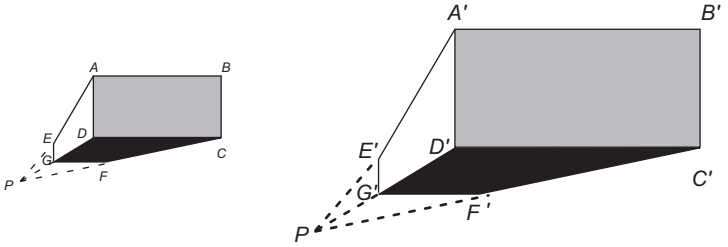
Objeto dibujado a una escala de reducción

$$\frac{A}{B} < 1$$

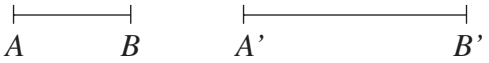
Por lo tanto, la escala es la razón de proporcionalidad entre dos figuras semejantes.

Observa los siguientes dibujos que representan un paralelepípedo rectangular en perspectiva. Nota que sus formas son iguales para los tamaños diferentes.

¿En qué son diferentes?



Ahora, si se dibujan los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, se tiene:



Midiendo cada uno de los segmentos, resulta:

$$AB = 2\ cm \quad , \quad A'B' = 4\ cm$$

Ahora, comparando sus medidas, observa que:

$A'B' = 2AB$
ya que
$4\ cm = 2\ (2\ cm)$

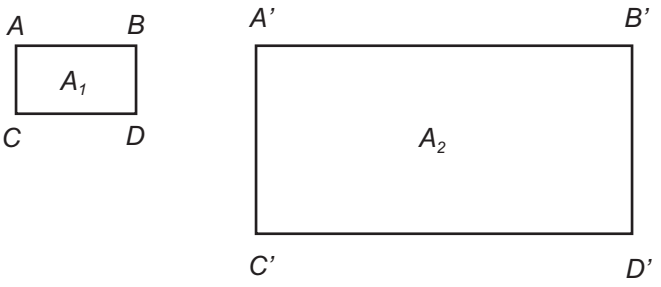
Estableciendo una razón, resulta:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{4\ cm}{2\ cm} = 2 > 1$$

Por lo tanto, esto quiere decir que es una ampliación, es decir que en el segundo dibujo sus longitudes son el doble que las del primero.

Ahora ve qué ocurre en cuanto a las áreas de las regiones del plano que se forman en las mismas escalas.

Observa el rectángulo $ABCD$ y su correspondiente $A'B'C'D'$.



Sus medidas respectivas son:

$AB = 2\ cm$ $\quad A'B' = 4\ cm$
$BD = 1\ cm$ $\quad B'D' = 2\ cm$

Sus áreas correspondientes son:

$A_1 = 2\ cm^2$ $\qquad A_2 = 8\ cm^2$

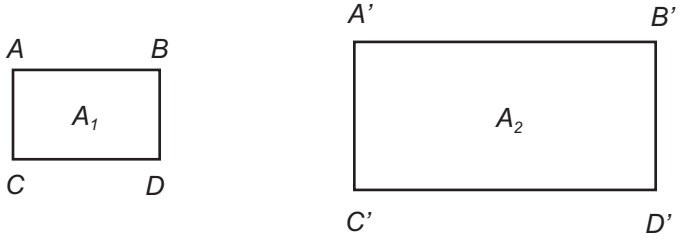
Al compararlas por cociente, resulta:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{8\ cm^2}{2\ cm^2} = 4$$

Significa que el área de A_2 es cuatro veces el área de A_1

Así que $\quad A_2 = 4\,A_1$
$A_2 = 2^2\,A_1$

¿Qué ocurre si las dimensiones, en relación con A_1, se triplican?



Sus medidas respectivas son:

$AB = 2\ cm$ $\qquad$ $A'B' = 6\ cm$
$BD = 1\ cm$ $\qquad$ $B'D' = 3\ cm$

Sus áreas correspondientes son:

$A_1 = 2\ cm^2$ $\qquad$ $A_2 = 18\ cm^2$

Al compararlas por cociente, resulta:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{18\ cm^2}{2\ cm^2} = 9 = 3^2$$

De esta forma, al elaborar un dibujo a escala se puede concluir que:

> Cuando las dimensiones se duplican, el área se multiplica por 2^2
> Cuando las dimensiones se triplican, el área se multiplica por 3^2
> Cuando las dimensiones se cuadruplican, el área se multiplica por 4^2

De otra forma, si se le llama L a la longitud original de una superficie y L_1 a la longitud obtenida, se tiene que:

Si $L_1 = 2L$, entonces $A_1 = 4A$
Si $L_2 = 3L$, entonces $A_2 = 9A$
Si $L_3 = 4L$, entonces $A_3 = 16A$

> Esto es, cuando las dimensiones de una figura se multiplican por una cantidad n, el área que se obtiene es el producto de $A_1\ (n^2)$, donde A_1 es el área de la figura antes de multiplicar por una cantidad n sus dimensiones.

Observa el video y al finalizar comenta con tus compañeros(as) los aspectos que encuentras más interesantes y que amplían tus aprendizajes.

Continúa con tus compañeros(as) y resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

1. Un rectángulo de 36 cm^2 tiene el triple del área de otro rectángulo proporcional de 2.5 cm de ancho. ¿Cuál debe ser la medida correspondiente al largo?

2. Si un triángulo tiene de base 4 cm y 6 cm de altura, ¿cuál es el área de un triángulo que tenga el triple de las dimensiones mencionadas?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as).

En forma individual, contesta lo que se pide a continuación:

1. Un cuadrado tiene 144 cm^2 de área. ¿Cuál es la medida del lado de otro cuadrado que tiene la cuarta parte de esa área?

2. Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{4\ cm^2}{16\ cm^2} = \frac{1}{4}$ ¿Esto qué quiere decir?

Compara tus resultados con los de la clave. Si tienes dudas, pregunta al profesor(a).

CLAVE

1. 6 cm; 2. Quiere decir que el área de A_1, en comparación con A_2, es su cuarta parte.

DE TAL PALO...

85

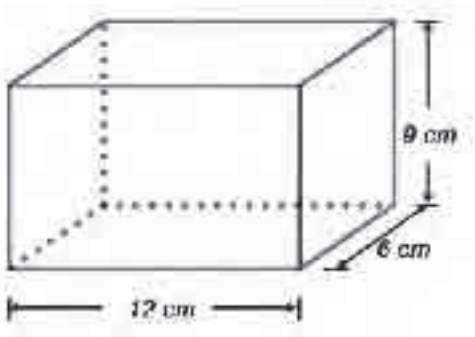
128 - 3

Razón entre los volúmenes de dos cuerpos
Análisis de la razón entre los volúmenes de dos cuerpos trazados a escala

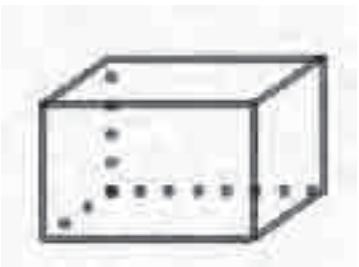
Ya sabes que si dos cuerpos son semejantes, es decir tienen la misma forma pero diferente tamaño, la razón entre las dimensiones de sus lados te permite hallar la escala que los relaciona. Pero ¿sabes cómo es la razón entre los volúmenes de estos dos cuerpos?

Te invitamos a que realices con tus compañeros(as) de grupo unas construcciones que te permitirán resolver la pregunta anterior.

1. Construye un paralelepípedo en cartulina cuyas dimensiones podrían ser: 12 cm, 9 cm y 6 cm.



2. Construye otro paralelepípedo, semejante al anterior, cuyas dimensiones guarden una relación tal que 3 cm del original representen 1 cm del nuevo.



¿Cuáles son, entonces, las dimensiones de este paralelepípedo?
¿Largo?, ¿ancho?, ¿alto?

¿Cuál es la razón entre los lados respectivos de los paralelepípedos?

¿Cuál es, entonces, la escala con la cual está construido el segundo cuerpo respecto al primero?

3. Calcula los volúmenes respectivos y compáralos.

   ¿Cuál es esta relación? ¿Cuál podríamos decir que es la escala de volumen entre ellos?

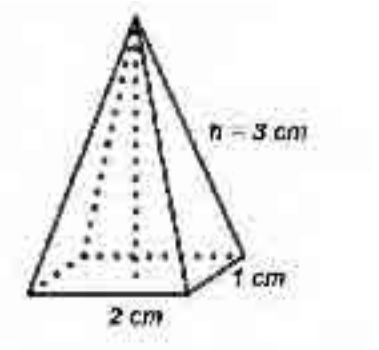
4. ¿Qué relación encuentras entre la escala de semejanza, es decir la escala de los lados de los paralelepípedos y la razón o escala de volumen de éstos?

Comparte tus hallazgos con los de otros compañeros(as) y discutan sus resultados con el profesor(a).

Lee y analiza, con tus compañeros(as) de grupo.

RAZÓN ENTRE LOS VOLÚMENES DE DOS CUERPOS SEMEJANTES

Se desea construir una pirámide a una escala de volumen $\frac{8}{1}$ ó 8:1 de la siguiente:



En la actividad anterior se encontró que la razón o escala de volumen es el cubo de la razón o escala de semejanza de los lados del sólido. Por esta razón es necesario para nuestro problema encontrar la raíz cúbica de la escala de volumen que se usará para la construcción.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{1}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{1}}$$

Es decir, se busca un número que se utiliza como factor tres veces y que dé como resultado el número que está dentro del radicando. En este caso es 2, porque 2(2) (2) = 8, por lo tanto:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad y \quad \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{1}} = \frac{2}{1}$$

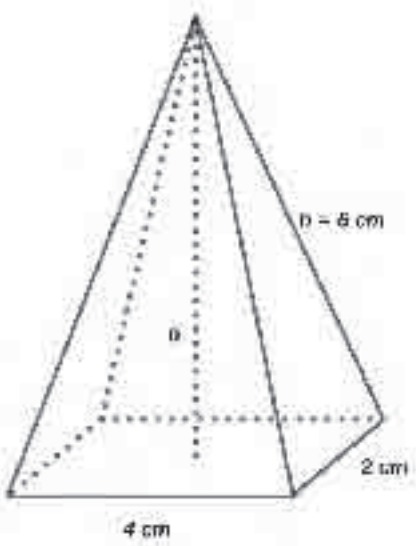
Entonces la ***fórmula*** $\sqrt[3]{\frac{8}{1}} = \frac{2}{1}$ ó 2:1, es la escala de los lados de la pirámide, por consiguiente si la escala es 2:1, entonces las nuevas dimensiones serán:

$$\frac{2(2\ cm)}{1} = 4\ cm$$

$$\frac{2(1\ cm)}{1} = 2\ cm$$

$$\frac{2(3\ cm)}{1} = 6\ cm$$

Construyendo la pirámide, se tiene:



Si se calculan los volúmenes, se puede comprobar que la razón o escala de volumen es 8:1

Volumen de la primera pirámide

$$V = \frac{(2\ cm)(1\ cm)(3\ cm)}{3}$$

$$V = 2\ cm^3$$

Volumen de la segunda pirámide

$$V = \frac{(4\ cm)(2\ cm)(6\ cm)}{3}$$

$$V = 16\ cm^3$$

Ahora comparando los volúmenes, se tiene:

$$\frac{16}{2} = \frac{8}{1} \text{ ó } 8{:}1$$

Como conclusión podemos anotar:

> La razón o escala de los volúmenes de dos sólidos geométricos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza o escala de la medida de sus lados.

Observa con atención el video. Con tus compañeros(as) de grupo, haz una relatoría sobre los aspectos aclaratorios más importantes e invita a tus demás compañeros(as) a realizar una plenaria.

En forma individual, resuelve el problema siguiente:

Si la razón o escala de volumen entre dos cubos es $\frac{1}{64}$ ó $1{:}64$,
¿cuánto mide el lado del cubo de menor tamaño, si el otro tiene 16 cm por lado?

Consulta el resultado con la clave.

CLAVE

Tiene por lado 4 cm.

86
129 - 3

¡EL CEREBRO ES TU HOMOTECIA!

Homotecia
Conocimiento de la homotecia y la semejanza

Las ampliaciones o reducciones de ciertos objetos conservan sus características semejantes, es decir, no surgen modificaciones en la forma con respecto al original, aunque sus tamaños sean diferentes.

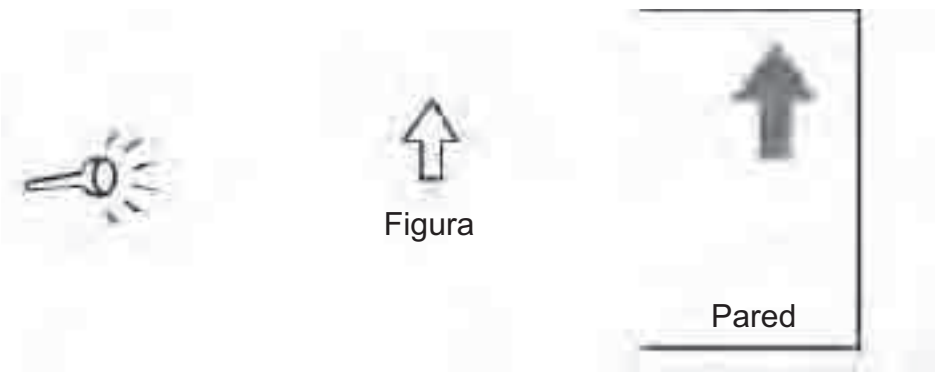
Trabaja con tus compañeros(as) de grupo en la realización del siguiente taller.

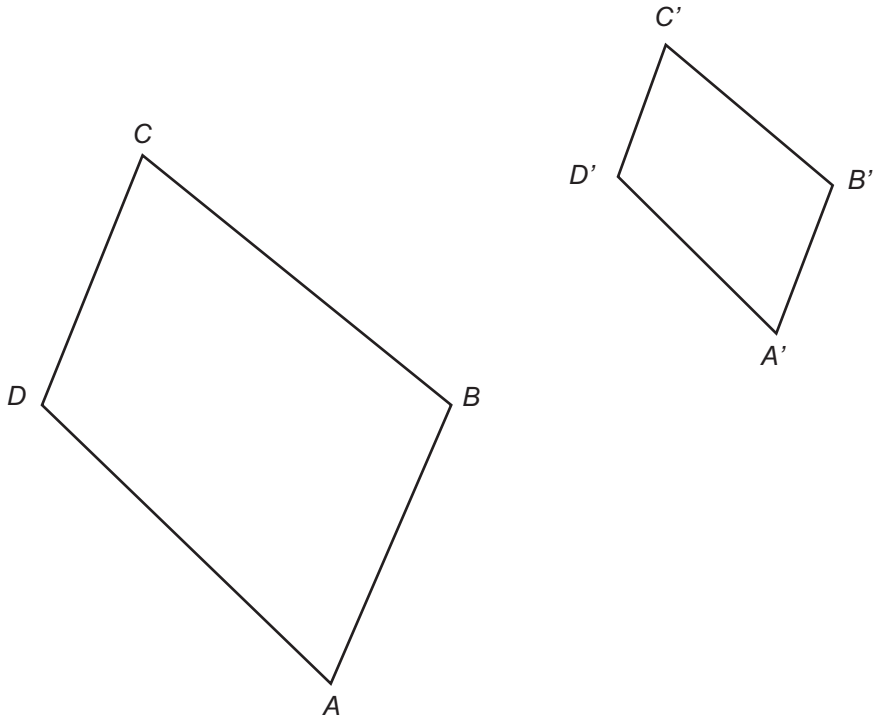
1. Usa una linterna y recorta en cartulina una figura cualquiera, una estrella, un polígono, coloca la figura delante del foco de la linterna de tal manera que puedas apreciar su sombra sobre la pared. Trata de colocar la figura como si estuviera en un plano paralelo a la pared.

   ¿Cómo es la sombra cuando la figura está cerca del foco?

   Si desplazas la figura hacia la pared, ¿qué sucede con la sombra?

2. Sobre una hoja de papel calca las siguientes figuras:





¿Cómo son las figuras $A\ B\ C\ D$ y $A'B'C'D'$?

Comprueba que $A\ B\ C\ D$ y $A'B'C'D'$ son semejantes.

Calcula la razón de semejanza o escala. Explica.

3. Traza rectas que pasen por $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ respectivamente. Si prolongas estas rectas, ¿qué ocurre? ¿se cortan? Si es así, señala el punto de corte de las rectas con la letra *O*.

   ¿Podrías decir que $ABCD$ es como una proyección de $A'B'C'D'$? ¿Se parece esta experiencia al experimento que realizaste en la parte 1?

   Mide $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OD}$ y $\overline{OD'}$ y halla las siguientes razones.

$$\frac{OA'}{OA}, \frac{OB'}{OB}, \frac{OC'}{OC}, \frac{OD'}{OD}$$

¿Cómo resultan ser estas razones?

Si comparas estas razones con la escala de ampliación entre las figuras $A'B'C'D'$ y $ABCD$, ¿qué concluyes?

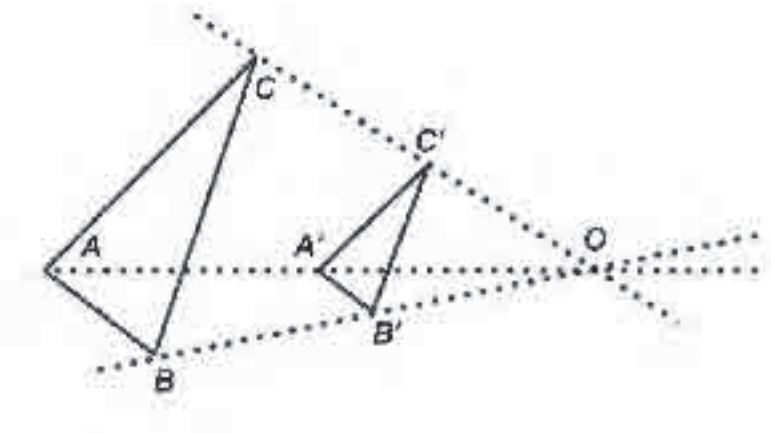
Con tus compañeros(as) de trabajo, analiza y aprende de la experiencia realizada.

Una figura delante de un foco luminoso y su sombra proyectada sobre una superficie paralela al plano de la figura tienen la misma forma aunque diferente tamaño. Es decir son figuras semejantes. A esta transformación la llamamos ***HOMOTECIA*** o semejanza activa.

Este es también el caso de las figuras $A'B'C'D'$ y $ABCD$, por lo cual las llamamos figuras homotéticas.

Al punto O, lo llamamos ***CENTRO DE HOMOTECIA***, y a la razón que representa la escala de semejanza, **constante de homotecia**.

En la figura siguiente se observa claramente una homotecia.



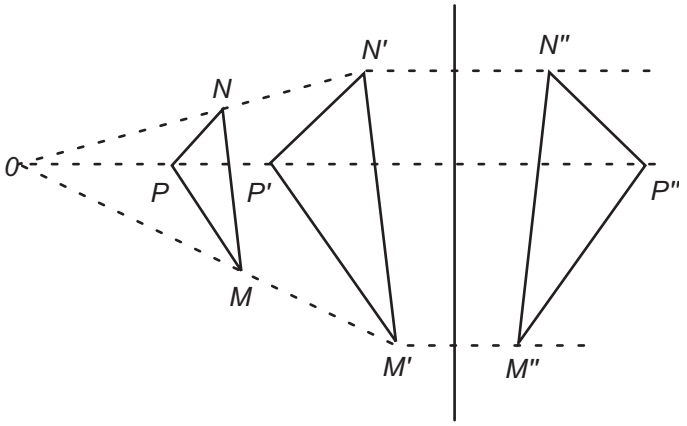
¿Cómo calculas la constante de homotecia?

¿Qué tienen en común las figuras ABC y $A'B'C'$?

¿Por qué podemos asegurar que:

$\sphericalangle A \cong \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \cong \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \cong \sphericalangle C'$

Observa ahora la aplicación de dos transformaciones: una homotecia y una simetría.



Las figuras Δ *MNP* y Δ *M'N'P'* son homotéticas. Δ *MNP* y Δ *M"N"P"*, en cambio, no lo son porque sus lados no son paralelos, pero sí tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos homólogos congruentes.

En este caso se dice que Δ *MNP* y Δ *M"N"P"* son SEMEJANTES, lo que se escribe Δ *MNP* ~ Δ *M"N"P"*.

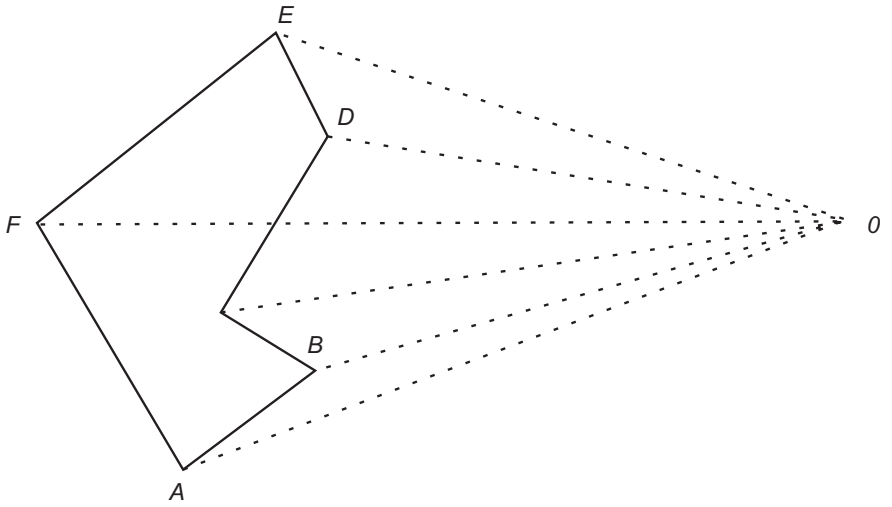
> A la aplicación de dos transformaciones: una homotecia y una simetría, traslación o rotación se le llama ***SEMEJANZA***. Las figuras semejantes tienen la misma forma. El símbolo que indica la semejanza es ~.

Como se puede observar, las figuras homotéticas son figuras semejantes, pero no todas las figuras semejantes son homotéticas.

Observa, junto con tus compañeros(as) el video. ¿Te aclaró éste alguna duda? Discute los aspectos que hayas encontrado interesantes.

Continúa con tus compañeros(as) y realiza lo siguiente:

Tomando como centro de homotecia el marcado con la letra O, traza una figura homotética al polígono $ABCDEF$, marcando los puntos homólogos de la figura en los puntos medios de cada segmento trazado al centro.



Comprueba:

a) Que los lados homólogos son paralelos.

b) La proporcionalidad de estos lados.

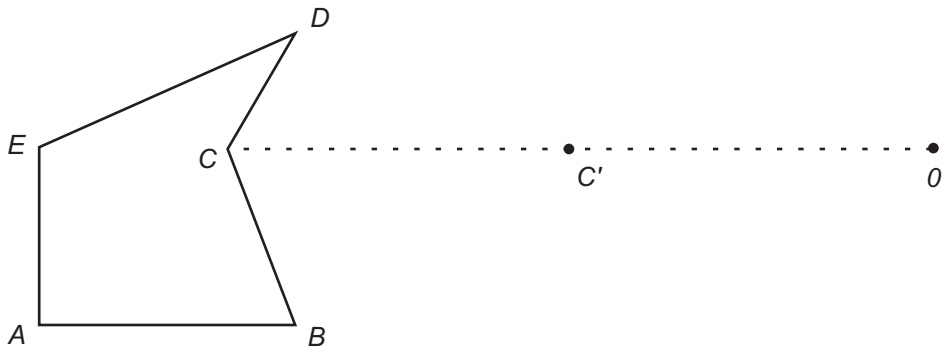
¿Cuál es la constante de homotecia?

¿A qué escala está la figura $A'B'C'D'E'F'$ con respecto a la figura $ABCDEF$?

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as); en caso de error, corrige.

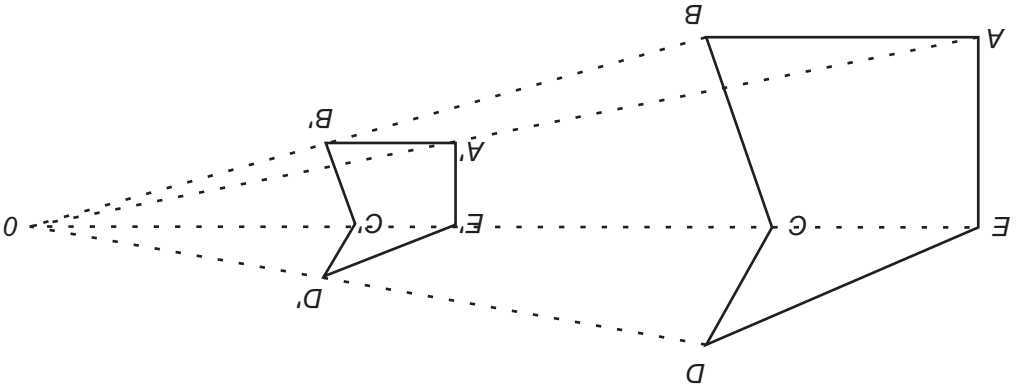
En forma individual, realiza lo que se pide a continuación:

Dado el polígono siguiente y su centro de homotecia, construye su homóloga a partir del punto C'.



Compara tu dibujo con el de la clave; en caso de error, corrige.

CLAVE



87

130 - 3

¡UTILIZANDO EL CEREBRO!

Homotecia en dibujos a escala
Aplicaciones de la homotecia

Invita a tu grupo para ver el video y discutir con ellos los aspectos más importantes.

Lee y analiza, junto con tus compañeros(as) de trabajo. Haz las construcciones en tu cuaderno.

HOMOTECIA EN DIBUJOS A ESCALA

La homotecia proporciona un medio para trazar figuras semejantes a escala. Puesto que dos figuras homotéticas tienen sus lados homólogos, necesariamente paralelos, basta que se elija un centro de homotecia conveniente y se construya la nueva figura mediante paralelas a los lados de la figura dada.

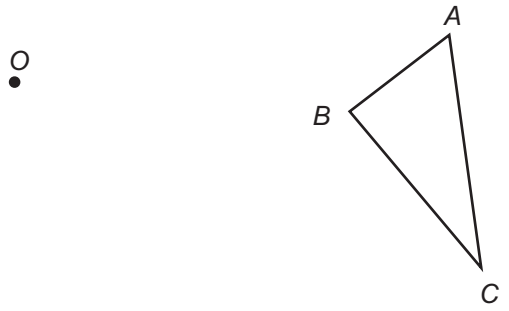
La razón o constante de homotecia K es el número

$$K = \frac{OA'}{OA}$$

Donde A es un vértice de un polígono y A' es su homólogo en el otro polígono.

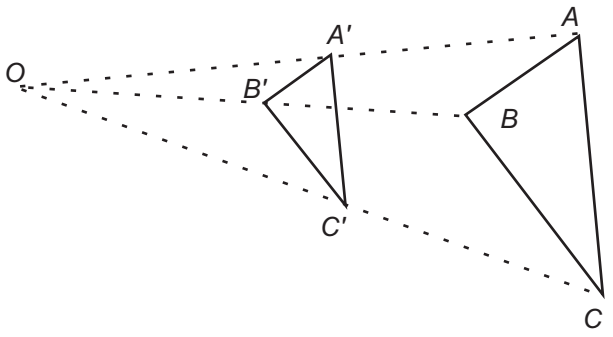
Ejemplo:

Encontrar el triángulo $A'B'C'$, homotético al triángulo ABC, con O como centro de homotecia y una razón de homotecia igual a $\frac{1}{2}$.



Puesto que $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$, entonces $OA' = \frac{OA}{2}$, por lo que el punto A' estará a la mitad del segmento $\overline{OA}$.

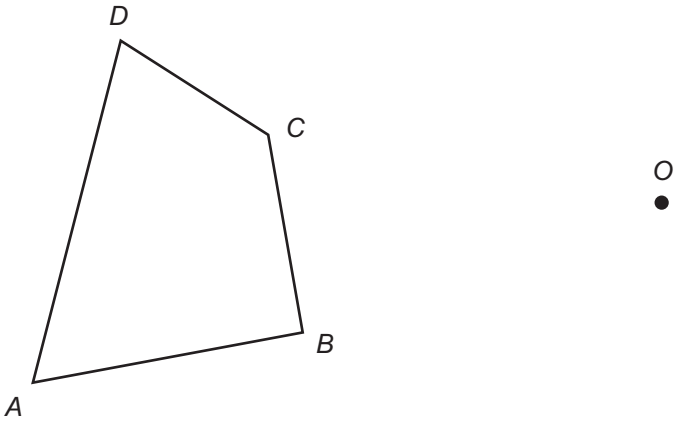
Análogamente, B' estará en la mitad del segmento $\overline{OB}$ y C' en la mitad del segmento $\overline{OC}$. Por lo tanto, el triángulo $A'B'C'$ quedará colocado como se ilustra en la figura siguiente:



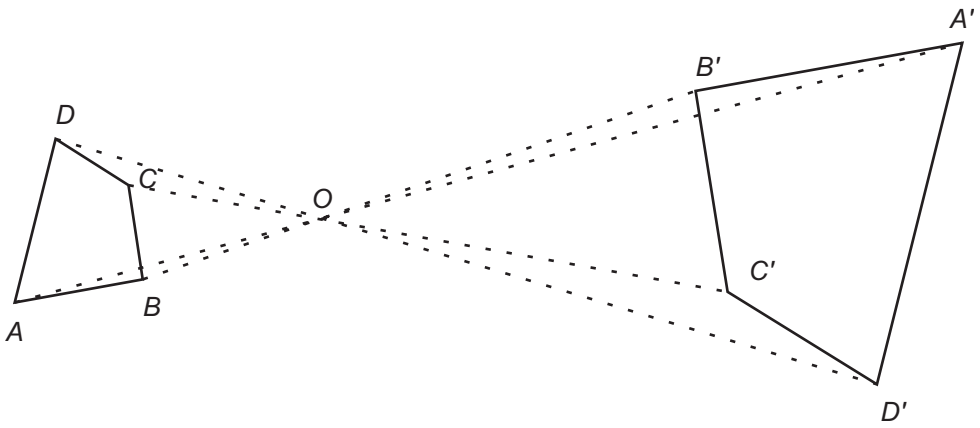
Si los puntos homólogos se colocan «del otro lado» del centro de homotecia, se dice que la figura obtenida es inversamente homotética a la figura original.

Ejemplo:

Encontrar el cuadrilátero $A'C'B'D'$, que es inversamente homotético al cuadrilátero $ABCD$, con una razón de homotecia o escala $K = \frac{2}{1}$ y O como centro de homotecia.

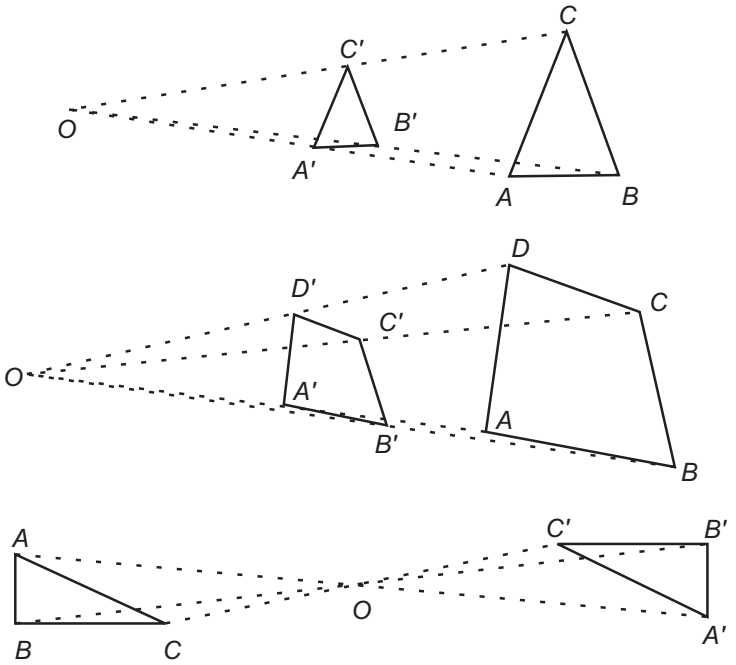


En este caso $\frac{OA'}{0A} = \frac{2}{1}$, de donde $OA' = 2\ OA$, por lo que la figura buscada será:



Un caso particularmente importante de esta forma de encontrar figuras homotéticas se presenta cuando la razón de homotecia o escala es $K = 1$, ya que se producen figuras homólogas de simetría central con respecto al centro de homotecia.

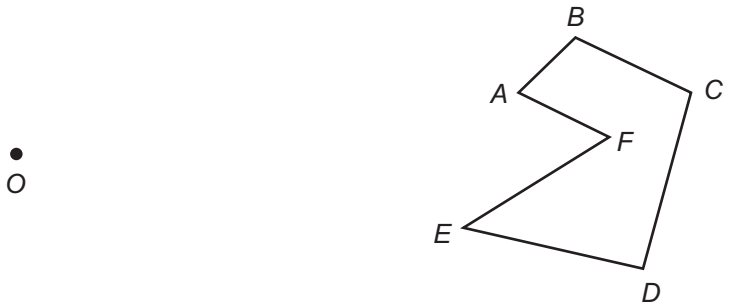
Con un compañero(a) encuentra la razón o constante de homotecia de las siguientes figuras homotéticas.



Compara tus resultados con los de otros compañeros(as).

Continúa con tu compañero(a) y realiza lo siguiente:

Dibuja una figura homotética a la siguiente con respecto al centro de homotecia O dado y con razón de homotecia igual a 2.



Muestra tu dibujo al profesor(a); en caso de error, corrige.

En forma individual busca una figura sencilla y usa tus conocimientos para producir una figura homotética, en donde la constante de homotecia sea 5.

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as) y el profesor(a).

88
131 - 3

¡LAS TIRAS MÁGICAS!

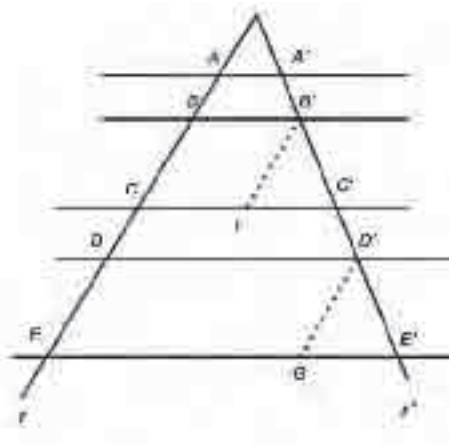
Teorema de Tales
Justificación del teorema de Tales

Tales de Mileto fue uno de los grandes geómetras de la antigua Grecia y uno de los primeros en usar métodos deductivos en geometría. Sus métodos permitieron encontrar medidas de difícil acceso en forma directa.

Te invitamos a que, junto con tus compañeros(as) de grupo se acerquen a los hallazgos de Tales de Mileto.

Traza dos rectas r y r', que se corten en un punto que señales como O. Dibuja rectas paralelas que corten a las rectas r y r'.

Los puntos de corte de una de estas paralelas con r y r' se llaman correspondientes, por ejemplo A y A', B y B', etc. También los segmentos que se determinan sobre r y r' se llaman segmentos correspondientes, como $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$.



Procura que al trazar las paralelas los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ sean congruentes, es decir, de igual medida.

$$BC = DE$$

Nos preguntamos:

¿Cómo serán los segmentos correspondientes $\overline{B'C'} = \overline{D'E'}$?

¿Serán también congruentes?

¿Medirán lo mismo?

Veamos la forma de contestar estas preguntas.

Traza por B' y D' paralelas a la recta r, y determina los segmentos $\overline{B'F}$ y $\overline{D'G}$.
¿Por qué $\overline{B'F} = \overline{D'G}$?

¿Cómo son $\overline{B'F}$, $\overline{D'G}$ y $\overline{BC}$, $\overline{DE}$? Explica.

Si haces una translación del triángulo a lo largo de $\overline{B'D'}$, este triángulo se superpone exactamente con el triángulo $D'GE'$

Es decir: $\overline{B'F}$ se superpone con $\overline{D'G}$
$\overline{F'C}$ se superpone con $\overline{GE'}$
$\overline{B'C'}$ se superpone con $\overline{D'E'}$

Por lo tanto $BC = DE$

Se ha comprobado que a segmentos iguales de r corresponden segmentos iguales de r'.

Considera ahora un segmento de r como $\overline{AD}$, es la suma de:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

Su correspondiente es:

$$\overline{A'D'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}$$

Es decir $\overline{A'D'}$ es la suma de los tres segmentos correspondientes: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

De esta forma se puede concluir que los segmentos cortados por las paralelas sobre r y los correspondientes cortados sobre r' son proporcionales.

Este resultado se conoce con el nombre de *teorema de Tales*:

> Si tres o más paralelas son cortadas por transversales, la razón entre las medidas de los segmentos determinados en una transversal es igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes de la otra, por lo que son proporcionales.

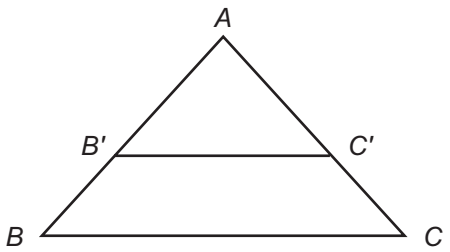
Esta proporcionalidad permite, en nuestro caso, escribir las siguientes igualdades con respecto a las medidas de los segmentos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{BE}{B'E'}$$

Con tus compañeros(as) de grupo, lee y analiza:

Observa otra forma de justificar el teorema de Tales

Sea el triángulo ABC, en donde el lado $\overline{AB}$
se divide en cinco segmentos congruentes entre sí.



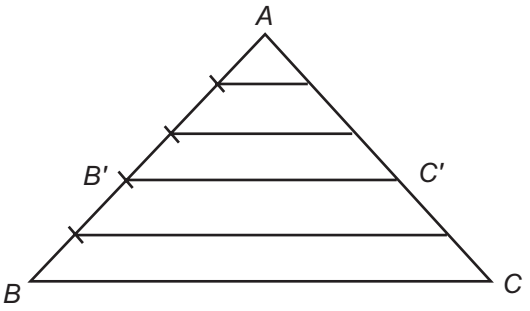
Se traza el segmento $\overline{B'C'}$ paralelo al $\overline{BC}$ y se forman los segmentos $\overline{AB'}$ y $\overline{B'B}$.

Para determinar la razón que existe entre las medidas de los segmentos $\overline{AB'}$ y $\overline{AB}$, se tiene que:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{3}{5}$$

Lo cual significa que $\overline{AB}$ está dividido en cinco segmentos congruentes entre sí y $\overline{AB'}$ abarca tres de ellos.

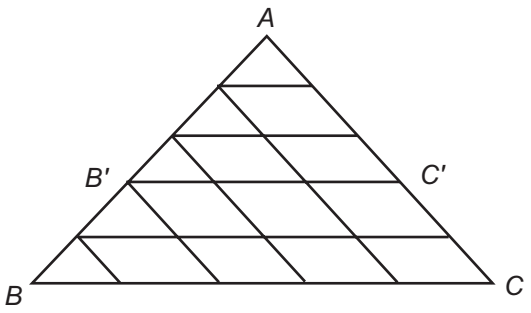
Si se trazan paralelas a $\overline{B'C'}$ en el triángulo, se tiene:



De la figura se obtiene que $\overline{AC}$, al igual que $\overline{AB}$ está dividida en cinco segmentos y $\overline{AC'}$ abarca tres de ellos, por lo que la razón entre ellos es:

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{3}{5}$$

Si ahora se trazan paralelas a $\overline{AC'}$, se observará que $\overline{B'C'}$ queda dividido en tres segmentos congruentes entre sí, y $\overline{BC}$ queda dividido en cinco segmentos.



Por lo que resulta:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{5}$$

Lo cual quiere decir que, si $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, entonces:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \frac{B'C'}{BC}$$

Además, en la figura se observa que los ángulos de los dos triángulos son congruentes, esto es:

$< A \cong < A'$ Por la propiedad reflexiva de la congruencia de ángulos.

$< B \cong < B'$ Porque son ángulos correspondientes entre paralelas.

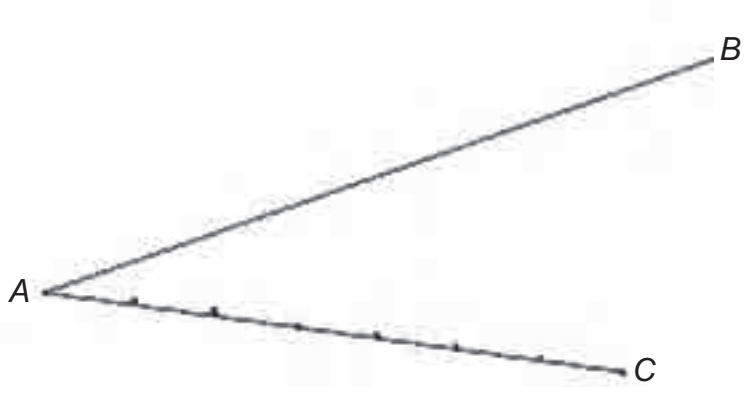
$< C \cong < C'$ Por la razón anterior.

Esto indica que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, ya que sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados proporcionales. De aquí se deriva otra forma de enunciar el teorema de Tales, que dice:

> Si en un triángulo una recta es paralela a uno de sus lados, ésta divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales y los triángulos formados son semejantes.

Continúa trabajando con tu grupo.

Divide el segmento $\overline{AB}$ en 7 partes de igual longitud. Hazlo en tu cuaderno.



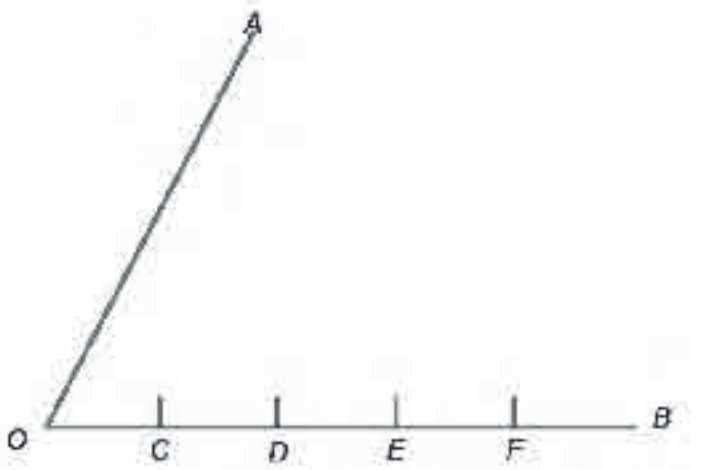
Usa el segmento $\overline{AC}$ dividido en centímetros.

¿Cómo procedes si aplicas el teorema de Tales?

Encuentra el cociente $\frac{AB}{AC}$ y compáralo con el cociente entre la longitud de una división sobre $\overline{AC}$ y su correspondiente sobre $\overline{AB}$

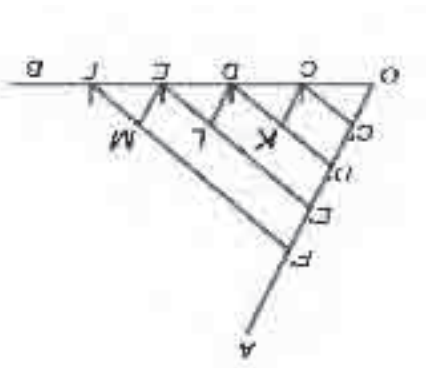
Observa el video y comenta los aspectos que pueden ampliar tu conocimiento sobre este tema.

En forma individual justifica el teorema de Tales con base en las rectas concurrentes que se tienen a continuación.



Compara tus trazos con los de otro compañero(a); consulta la clave.

CLAVE



$\Delta OCC' \cong \Delta CDK \cong \Delta DEL \cong \Delta EFM$

$O \cong \angle C \cong \angle D \cong \angle E$

$OC' \cong C'D' \cong D'E' \cong E'F'$

$OC \cong CD \cong DE \cong EF$

89

¿EN QUÉ SE PARECEN?

132 - 3

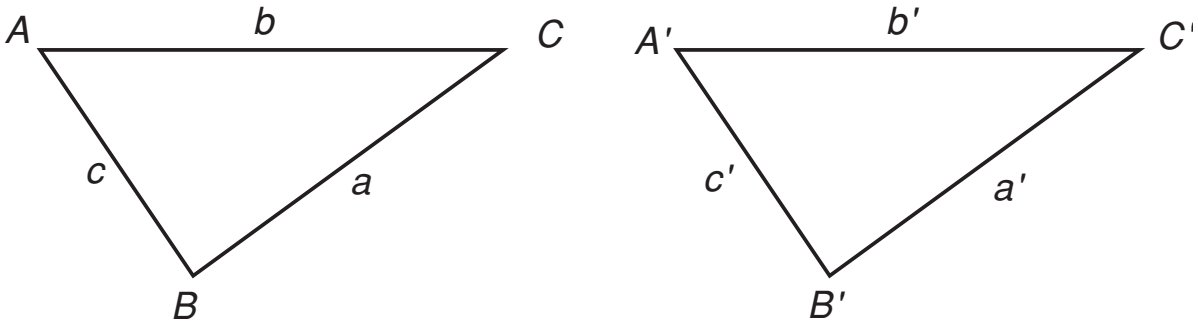
Semejanza de triángulos; ángulo-ángulo (a, a)
Identificación de la semejanza de triángulos cuando dos de sus ángulos son congruentes

A nuestro alrededor observamos diversas formas geométricas que pueden ser iguales o diferentes entre sí. Sin embargo, ¿cuándo podemos afirmar que son semejantes?

Trabaja con tu grupo.

Tus conocimientos en geometría te permiten afirmar que la congruencia y la semejanza se establecen entre figuras que tienen la misma forma.

¿Cuándo puedes afirmar que dos triángulos son congruentes?



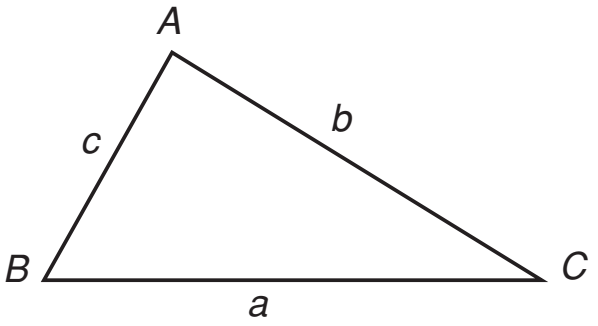
¿Cómo son b y b' ; a y a' , y, c y c' ?

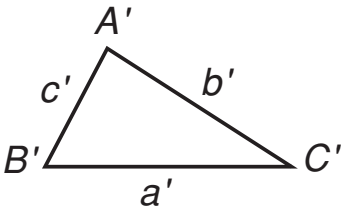
Comprueba tu respuesta midiendo la longitud de los lados de los triángulos.

¿Cómo son $< A$ y $< A'$, $< B$ y $< B'$, $< C$ y $< C'$?

¿Son congruentes $< ABC$ y $< A'B'C'$. ¿Por qué?

¿Cuándo puedes afirmar que dos triángulos son semejantes?





Con ayuda del transportador mide la amplitud de:

$$<A,\ <A',\ <B,\ <B' \text{ y } <C,\ <C'$$

¿Cómo son $< A$ y $< A'$, $< B$ y $< B'$, $< C$ y $< C'$?

Usa la regla y encuentra las medidas de a, b y c, y de a', b', c'.

Encuentra los siguientes cocientes.

$$\frac{a'}{a}\ ,\ \frac{b'}{b}\ ,\ \frac{c'}{c}$$

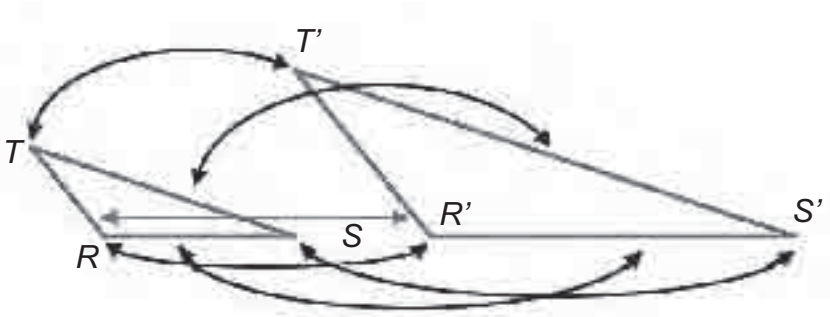
¿Qué resultado encuentras?

¿Qué podrías decir de los triángulos ABC y $A\ B\ C$?

¿Estarás de acuerdo en definir la semejanza entre triángulos como viene a continuación?

Dos triángulos son semejantes si las amplitudes de sus ángulos son iguales uno a uno, respectivamente, y las medidas de los lados opuestos a dichos ángulos son proporcionales.

En los triángulos semejantes, los ángulos congruentes y los lados de medidas proporcionales reciben el nombre de homólogos.



Así, en los triángulos anteriores los ángulos R y R' son homólogos, como lo son los ángulos S y S', T y T', los segmentos RS y $R'S'$, etcétera, esto es, hay una correspondencia uno a uno de sus ángulos y sus lados.

Para indicar la semejanza entre dos figuras se utiliza el símbolo ~:

$\Delta RST \sim \Delta R'S'T'$ "el triángulo ***ere, ese, te*** es semejante al triángulo ***ere prima, ese prima, te prima***".

Comparte con tus compañeros(as) las conclusiones a que has llegado.

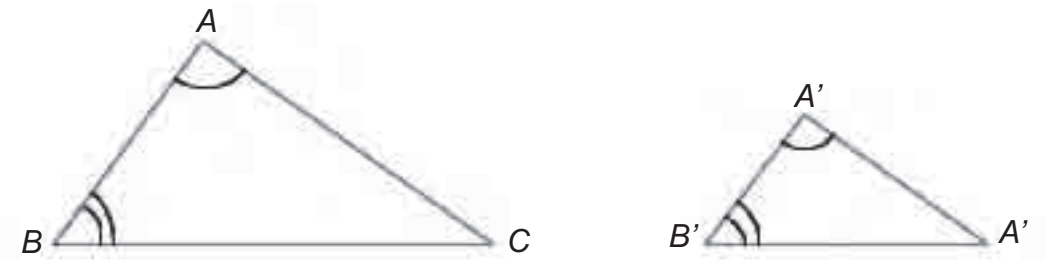
Observa con atención el video y comenta con tus compañeros(as) los aspectos que creas son los más importantes, tratados en él.

Lee y analiza el siguiente criterio para determinar la semejanza entre dos triángulos.

Para determinar la semejanza entre dos triángulos existen tres criterios. El primero de ellos afirma lo siguiente:

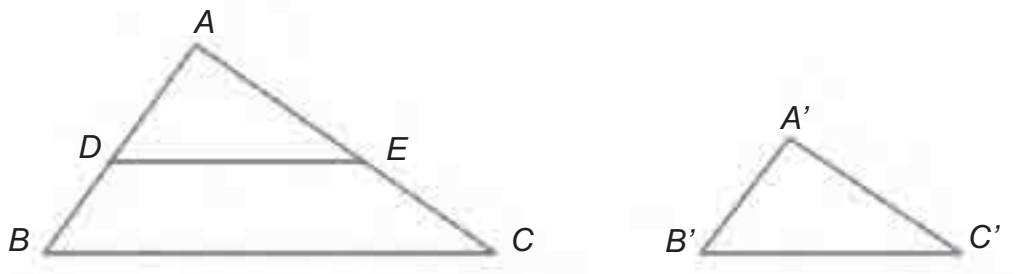
> Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son semejantes.

Para justificar esta afirmación, observa los siguientes triángulos:



Se dice que : si $< A \cong < A'$ y $< B \cong < B'$, entonces $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$

Si se traslada la medida de $\overline{A'B'}$ al segmento $\overline{AB}$ desde el punto A', se encuentra el punto D. Desde ese punto se traza una paralela al segmento $\overline{BC}$ encontrando en $\overline{AC}$ el punto E.



Los ángulos ABC y ADE con congruentes por ser correspondientes entre paralelas, con lo que se tiene que:

$< A \cong < A'$

$\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$

y $< ADE \cong < ABC \cong < A'B'C'$

Por lo tanto: $\Delta\, ADE \sim \Delta\, A'B'C'$

Entonces: $< AED \cong < C'$

Pero como los tres ángulos del $\Delta\, ABC$ son congruentes con los ángulos del triángulo y por definición de semejanza

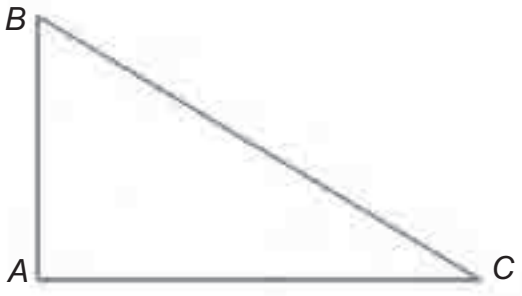
$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$, pues tienen tres ángulos correspondientes congruentes.

Por el teorema de Tales sabemos que una recta paralela a uno de sus lados determina segmentos cuyas medidas son proporcionales, por lo que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}$$

De donde se afirma que dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.

Individualmente, construye un triángulo semejante al triángulo ABC siguiendo los pasos señalados.



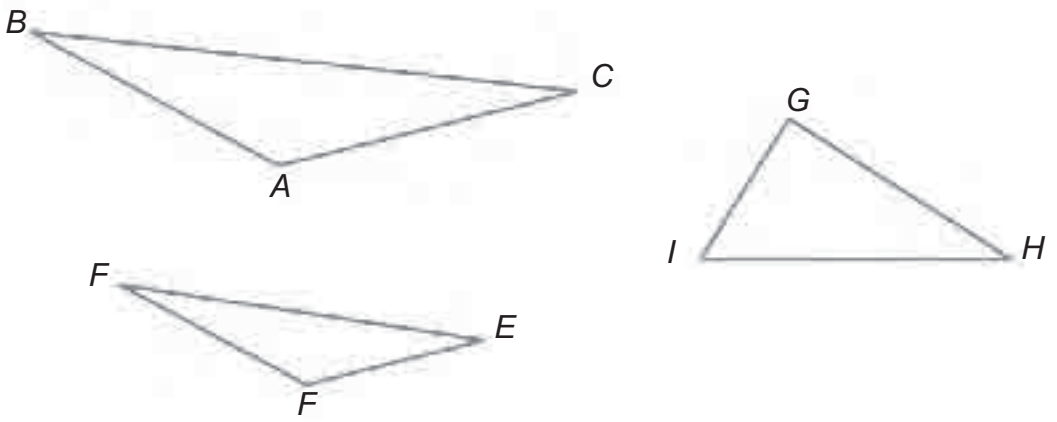
1. Traza un ángulo congruente con $< A$ y denótalo como A'.
2. Marca un segmento $\overline{A'B'}$ de una medida cualquiera.
3. Sobre B' traslada la medida de $< B$.
4. Cierra el triángulo y encuentra el ángulo C.

a) ¿Serán semejantes los triángulos ABC y $A'B'C'$? ¿Por qué?

b) ¿Qué se requiere para afirmar que dos triángulos son semejantes?

Compara tus resultados con los de tus compañeros(as). Si hay errores, corrígelos.

De manera individual, observa los triángulos siguientes y anota lo que se pide:



1. Mide con tu transportador los ángulos A, B, D, E, G, H de los triángulos anteriores. Anota sus medidas

$< A,\ < B,\ < D,\ < E,\ < G,\ < H$

2. ¿Qué ángulos son congruentes en los triángulos anteriores?

3. ¿Tienen los triángulos $D\ E\ F$ y $A\ B\ C$ ángulos congruentes? ¿Cuáles? ¿Qué se puede afirmar de estos dos triángulos?

4. ¿Qué criterio de semejanza conoces?

Compara tus respuestas con las de la clave. Si hay diferencias, revisa tus procedimientos y corrige.

CLAVE

1. a) 125° b) 25° c) 125° d) 25° e) 90° f) 30°. 2. $< A < D, < B < E$.
3. A,D,B,E; son semejantes. 4. Dos triángulos son semejantes si tienen, respectivamente, dos de sus ángulos congruentes.

¿SERÁN SEMEJANTES?

90
133 - 3

Semejanza de triángulos; lado - ángulo - lado (l, a, l)
Identificación de triángulos semejantes cuando las longitudes de dos de sus lados son respectivamente proporcionales y el ángulo entre ellos es congruente

El hombre ha creado diversos mecanismos para obtener la medida de distancias inaccesibles o para construir objetos a escala; uno de ellos es a través de figuras semejantes. En esta sesión conocerás otro criterio de semejanza en triángulos.

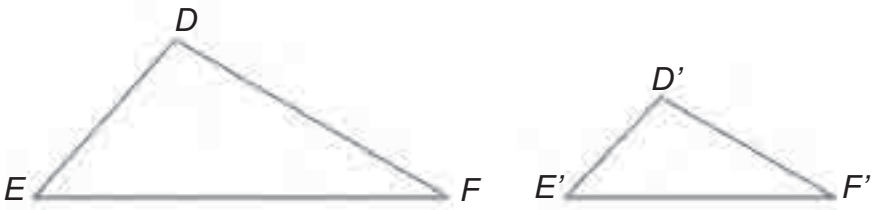
Observa el video; en él verás cómo la semejanza de figuras ayuda a resolver algunos problemas. Comenta con tu profesor(a) el criterio de semejanza de triángulos cuando las longitudes de dos de sus lados son proporcionales y congruente el ángulo comprendido entre ellos.

Lee, con tus compañeros(as), y analiza otro criterio de semejanza entre triángulos.

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo congruente y las longitudes de los lados que forman estos ángulos son respectivamente proporcionales.

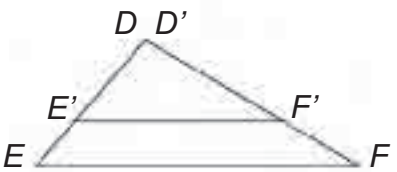
De las figuras siguientes:

Se afirma que $< D \cong < D'$ y $\frac{D'E'}{DE} = \frac{D'F'}{DF}$ por lo que $\Delta EDF \sim \Delta E'D'F'$



Para demostrar lo anterior, haz las construcciones en tu cuaderno:

Traslada la medida del $\overline{D'E'}$ sobre $\overline{DE}$ y la de $\overline{D'F'}$ sobre $\overline{DF}$ de tal manera que el ángulo D' coincida con D, pues se sabe que son ángulos congruentes.



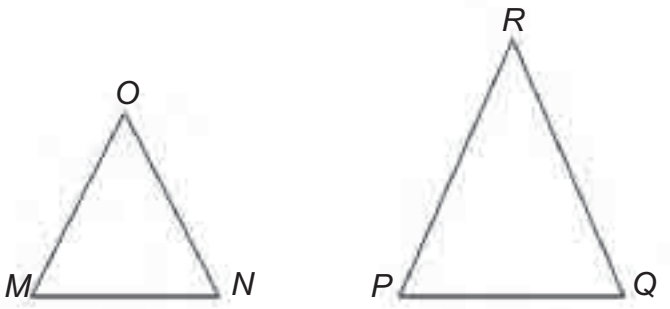
Como también se sabe que $\frac{D'E'}{DE} = \frac{D'F'}{DF}$, se concluye que $\overline{E'F'}$ es paralela a $\overline{EF}$ por el teorema de Tales.

Por lo tanto: $< E \cong < E'$ y $< F \cong < F'$

Con lo cual los tres ángulos del ΔDEF son congruentes uno a uno con los ángulos del $\Delta D'E'F'$, y como en el primer criterio de congruencia se establece que con dos ángulos iguales los triángulos son semejantes, de lo anterior se concluye que:

$$\Delta DEF \sim \Delta D'E'F'$$

Reúnete en equipo, observa los triángulos y anota tus conclusiones.



Podrías afirmar, a simple vista, que los triángulos anteriores son semejantes? ¿Por qué?

Mide los segmentos $\overline{MO}$, $\overline{MN}$; $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$

También mide los ángulos M y P

Encuentra las razones

$$\frac{MO}{PR} \quad \text{y} \quad \frac{MN}{PQ}$$

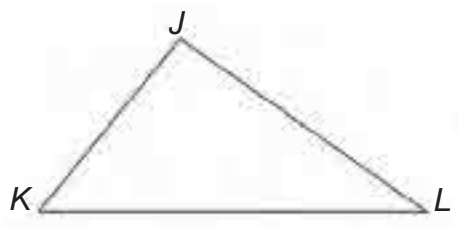
¿Cómo son estos cocientes?

¿Cómo son los ángulos respectivos que forman estos segmentos?

¿Qué se puede decir de los triángulos?

Comparte tus respuestas con tus compañeros(as).

Con un compañero, traza un triángulo $J'K'L$ semejante al siguiente con una razón de semejanza de $\frac{2}{5}$. Para ello, te sugerimos pasos a seguir:



– Mide los segmentos $\overline{KL}$ y $\overline{LJ}$, también mide el ángulo L.

– Como conoces la razón de semejanza, sabes a qué es igual cada una de las siguientes razones, escríbelas.

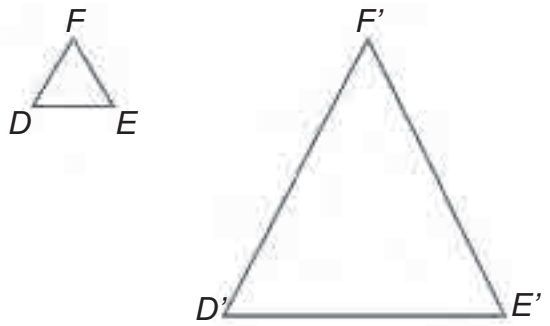
$$\frac{K'L'}{KL} = \frac{L'J'}{LJ} =$$

– Como conoces las longitudes de $\overline{KL}$ y $\overline{LJ}$, usa las anteriores igualdades para hallar las longitudes de $\overline{K'L'}$ y $\overline{L'J'}$.

– Con las medidas anteriores y la medida del ángulo L, construye el triángulo semejante correspondiente.

Compara tu construcción con la que han hecho tus compañeros(as).

Realiza individualmente el siguiente ejercicio.
Si se sabe que en los triángulos siguientes:



$DE = 2\ cm$, $EF = 2.5\ cm$, $D'E' = 6\ cm$, $E'F' = 7.5\ cm$, $\Delta E = 65°$ y $\Delta E' = 65°$.

Determina si los triángulos son semejantes. Justifica tu respuesta.

Compara tus respuestas con la clave. Si existen diferencias, verifica tus procedimientos y corrige.

CLAVE

Sí son semejantes, pues $\frac{DE}{D'E'} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$, $\frac{E'F'}{EF} = \frac{7.5}{2.5} = \frac{3}{1}$ y $< E = < E'$, además de que el segundo criterio de semejanza dice que, si dos lados de un triángulo tienen una constante de proporcionalidad igual a la de dos lados de otro triángulo y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes, los triángulos son semejantes.

91
134 - 3

¿SEMEJANTES O IGUALES?

Semejanza de triángulos; lado-lado-lado (l, l, l)
Identificación de triángulos semejantes cuando sus tres lados son proporcionales

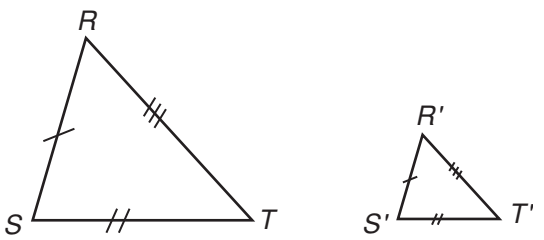
Un método que el hombre ha utilizado para estimar la distancia de un lugar determinado a otros, a veces inaccesibles, es por medio de triángulos semejantes. En esta sesión conocerás el tercer criterio de semejanza de triángulos y lo aplicarás a algunos ejercicios.

Ve el video, en el cual observarás que dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales. Comenta con tu grupo este tercer criterio de semejanza.

Lee y analiza con tus compañeros(as). Realiza las construcciones en tu cuaderno.

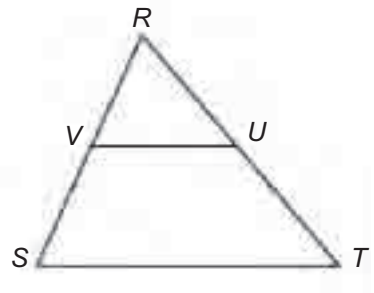
> Si las longitudes de los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, los triángulos son semejantes.

Obsérvense los siguientes triángulos.



De acuerdo con el tercer criterio se afirma que:

$\frac{R'S'}{RS} = \frac{S'T'}{ST} = \frac{T'R'}{TR}$ por lo que $\Delta RST \sim \Delta R'S'T'$



Para justificar el criterio anterior, se traslada el $\overline{R'T'}$ al ΔRST sobre $\overline{RT}$, localizando el punto U, y se traza sobre ese punto una paralela VU a $\overline{ST}$

Por el teorema de Tales, se afirma que:

$$\Delta RUV \sim \Delta RST$$

Puesto que $\overline{VU}$ es paralela a $\overline{ST}$.

De acuerdo con los trazos realizados, se tiene que:

$$\frac{RS}{RV} = \frac{ST}{VU} = \frac{RT}{RU}$$

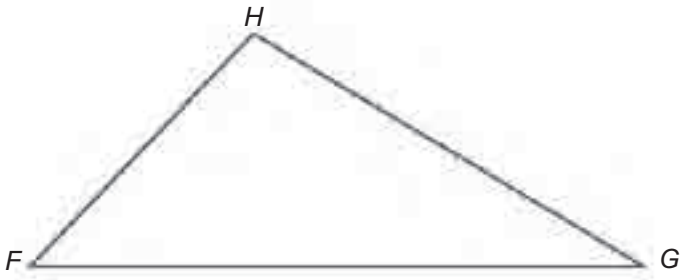
En la primera afirmación se tiene:

$$\frac{RS}{R'S'} = \frac{ST}{S'T'} = \frac{RT}{R'T'}$$

Pero como $RU = R'T'$, las dos últimas razones son equivalentes; por lo tanto, las demás igualdades se cumplen en ambos triángulos, con lo que se establece que:

$$\Delta RST \sim \Delta R'S'T'$$

Con tus compañeros(as), es posible construir un triángulo semejante a otro, si se conoce la razón de semejanza o constante de proporcionalidad; supón que la constante es $\frac{2}{3}$ y que el triángulo dado es el ΔFGH. Construye el $\Delta F'G'H'$.



– ¿A qué es igual, cada una de las siguientes razones?

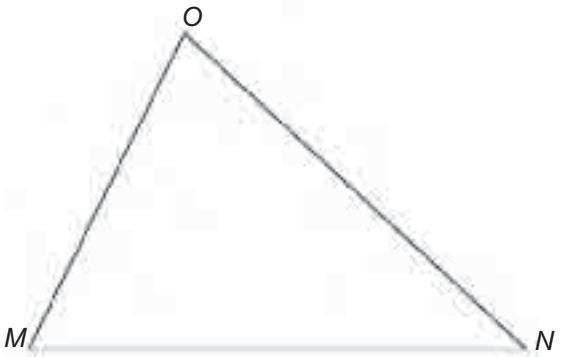
$$\frac{F'G'}{FG} \quad , \quad \frac{G'H'}{GH} \quad , \quad \frac{H'F'}{HF}$$

– Sustituye en cada una de las razones las medidas de los segmentos $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ y $\overline{HF}$.

– Calcula las medidas de: $\overline{F'G'}$, $\overline{G'H'}$, $\overline{H'F'}$

– Con las medidas anteriores construye el triángulo correspondiente, semejante al ΔFGH.

Reúnete con un compañero(a) y traza un triángulo $M'N'O'$? semejante al siguiente; atiende al tercer criterio de semejanza, siendo la constante de proporcionalidad del segundo triángulo de $\frac{2}{5}$ con respecto al primero. Mide los segmentos con tu regla para que obtengas su medida.

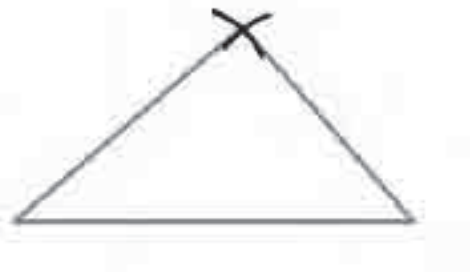


Con las medidas encontradas construye el triángulo semejante en tu cuaderno.

Compara tus resultados con la clave; si hay diferencias, verifica y corrige.

CLAVE

1) 3.2 cm, 2) 2.8 cm, 3) 2 cm.



92

135 - 3

ALGO EN COMÚN

Ejercicios de semejanza
Aplicaciones de los criterios de semejanza

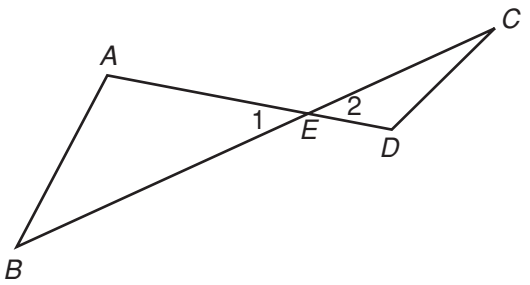
Todo aprendizaje adquiere mayor importancia cuando se ven sus aplicaciones.

Ve con atención el video y observa algunas aplicaciones de los criterios de semejanza.

Comenta con tus compañeros(as) de grupo algunas aplicaciones que ayudarían en tu escuela o comunidad.

Con dos de tus compañeros(as) trabaja en tu cuaderno.

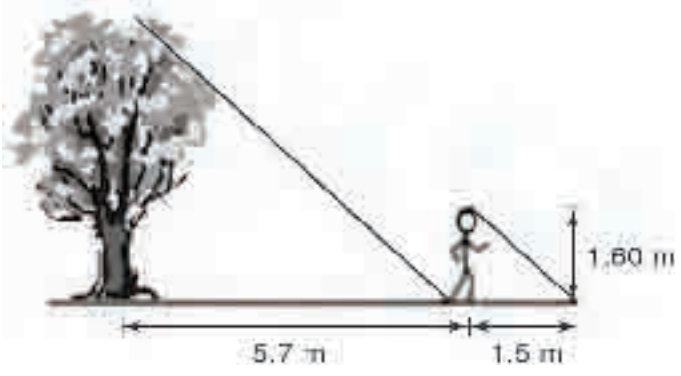
1. Tus conocimientos anteriores te servirán para realizar el siguiente ejercicio. Observa la figura en la cual $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



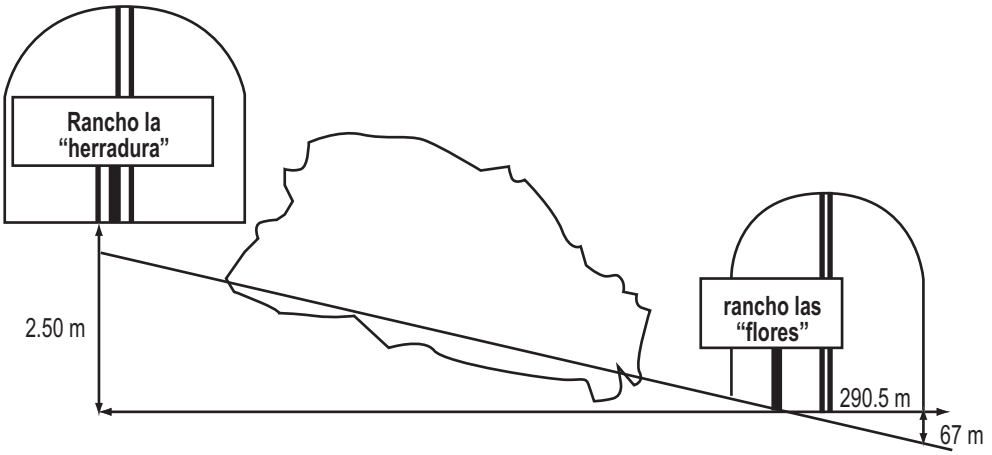
a) ¿Cómo son los ángulos 1 y 2? ¿Por qué?
b) ¿Cómo son los ángulos A y D? ¿Por qué?
c) ¿Cómo son $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$? ¿Por qué?
d) ¿Cómo son el $\Delta\, ABE$ y el $\Delta\, CDE$? ¿Por qué?

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as).

2. a) Calcula la altura de un árbol con los datos que aparecen en el dibujo.



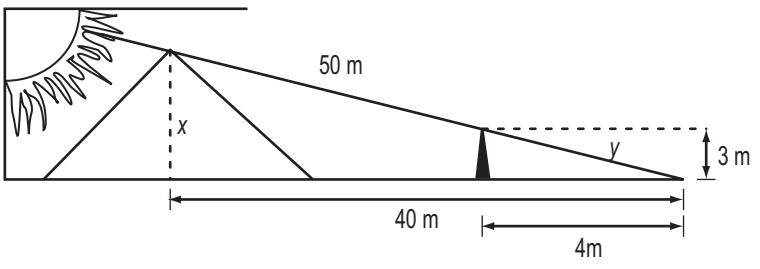
b) Obtén la distancia que hay entre dos ranchos que están separados por un lago. Para ello se tienen los siguientes datos.



Compara tu trabajo con el de otros compañeros(as).

Resuelve el siguiente problema:

Lucía quiso medir la altura de una pirámide, así que colocó una estaca de 3 m de altura y midió la sombra que proyectaban la pirámide y la estaca. En el dibujo encontrarás los datos.



Compara tu resultado con la clave; si tienes dudas, consulta a tu maestro(a).

CLAVE

$\frac{40}{4} = \frac{3}{x}$ $\quad x = \frac{120}{4}$ $\quad x = 30$ m

¡ENCUENTRA TU PAREJA!

93

136 - 3 **Cuarta proporcional**
Construcción de la cuarta proporcional

Así como en la adición, sustracción, multiplicación y división los elementos que las componen tienen nombres específicos, en una proporción sucede lo mismo. En esta sesión se verá la forma de obtener uno de sus elementos cuando estas proporciones se aplican a la geometría.

Trabaja con tu grupo. Busca estrategias para resolver el siguiente problema.

Si se conoce la longitud de tres segmentos, ¿cómo encontrar un cuarto segmento que forme proporción con ellos? Es decir que la razón entre dos de ellos, conocidos, por ejemplo: $\frac{a}{b}$ sea la misma que entre el otro segmento y el que buscamos: $\frac{c}{x}$, x es el cuarto segmento.

La proporción que establecemos es:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

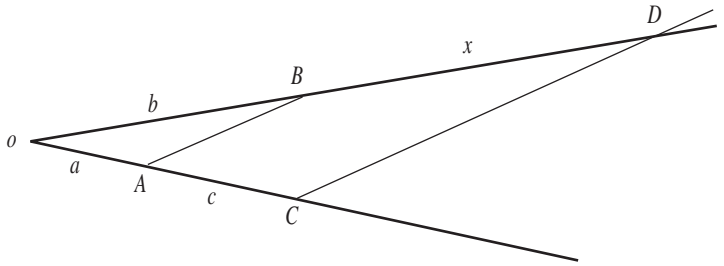
a

b

c

¿Cuál es tu hipótesis? ¿De qué conocimiento que posees «echarías mano»? ¿Nos serviría usar el teorema de Tales?

Sobre dos semirrectas, con origen común O, y a partir de él se colocan cada uno de los segmentos a y b:



Se unen A y B, extremos respectivos de los segmentos a y b.
A partir de A se coloca el segmento c. Por el extremo C de este segmento se traza una paralela a $\overline{AB}$ hasta cortar la semirrecta, sobre la cual está b, en el punto D se determina así el segmento $\overline{BD}$.

Por el teorema de Tales, ¿cómo son los segmentos correspondientes que sobre rectas concurrentes son determinados por el corte de rectas paralelas?

¿Cómo son las razones:

$$\frac{OB}{OA} \text{ y } \frac{BD}{AC}?$$

O sea las razones:

$$\frac{b}{a} \text{ y } \frac{x}{c}$$

¿Cómo son?

Mide los segmentos y encuentra las razones.

¿Qué concluyes de su comparación?

Discute tus resultados con tus compañeros(as).

Trabaja con tu grupo

De tus conocimientos aritméticos recordarás que una proporción es una igualdad de dos razones, en donde las dos razones tienen el mismo valor; una proporción se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

En una proporción intervienen cuatro términos, esto es, a, b, c y d; debido a ello se le llama cuarta proporcional a cada uno de los términos de una proporción. Con esto se tiene que:

a es cuarta proporcional de $b, c, d.$
b es cuarta proporcional de $a, c, d.$
c es cuarta proporcional de $a, b, d.$
d es cuarta proporcional de $a, b, c.$

El problema resuelto en la sesión anterior te permitió modelar mediante un procedimiento geométrico el problema aritmético de encontrar la cuarta proporcional de tres números dados.

Es decir, encontrar un cuarto número que te permitiera formar una proporción con tres números conocidos.

Explica cómo funcionó el modelo. ¿A qué magnitud asociaste los números?

¿Te permitió el modelo geométrico «visualizar» la proporción entre números?

Comenta tus hallazgos con los propuestos por tus compañeros(as).

Observa y comenta con tu grupo el video acerca de las proporciones aplicadas en la semejanza.

En forma individual construye la cuarta proporcional de los segmentos a, b, c, si el ángulo del que se parte es de 30º y sus longitudes son:

$a = 2\ cm$
$b = 4\ cm$
$c = 3\ cm$

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as); en caso de ser diferentes, consulta la clave.

CLAVE

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \therefore \quad \frac{2}{4} = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{3(4)}{2}$$

$$x = 6$$

94

137 - 3

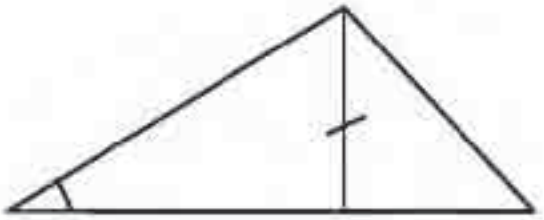
¡DE LOS CUATRO, TÚ APARECES DOS VECES!

Media proporcional
Construcción de la media proporcional

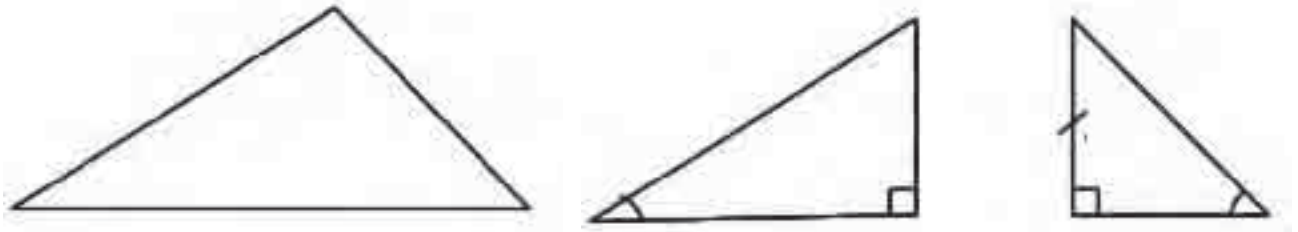
Con tu grupo de trabajo realiza el siguiente taller, el cual te permitirá conocer un caso muy interesante de semejanza de triángulos.

1. Dibuja un triángulo rectángulo y recórtalo.

2. Dibuja de nuevo el triángulo, traza la altura sobre la hipotenusa y recorta los dos triángulos que resultan de esta construcción.



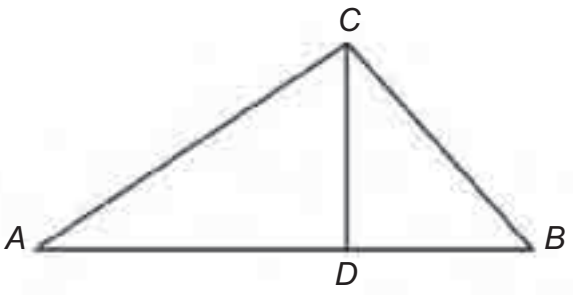
Ahora se tienen tres triángulos: el original y los dos que resultan al cortar por la altura sobre la hipotenusa.



Compara los ángulos de estos tres triángulos.

¿Qué observas? ¿Qué puedes decir de triángulos cuyos ángulos son congruentes? ¿Qué puedes decir de estos tres triángulos?

3. Ahora analiza por qué dos de ellos tienen sus ángulos congruentes. Por ejemplo el triángulo ABC y el triángulo ACD.



$< CAB \cong < CAD$ Por ser común a los dos triángulos.

$< ACB \cong < ADC$ Son ángulos rectos

¿Por qué $< ABC \cong < ACD$?

Si comparas, ahora los ángulos del ΔABC con los ángulos del ΔCDB.

¿Cómo son el $< ABC$ y el $< CBD$? ¿Por qué?

¿Cómo son el $< ACB$ y el $< CDB$? ¿Por qué?

¿Cómo son el $< BAC$ y el $< DCB$? ¿Por qué?

Seguramente ya has llegado a la conclusión de que los tres triángulos son semejantes. Busca ahora los lados homólogos que te permiten encontrar la razón de semejanza entre ellos.

La semejanza entre ΔABC y ΔADC permite encontrar la igualdad entre razones de lados homólogos así:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CD} = \frac{AC}{AD}$$

De la relación de semejanza entre ΔABC y ΔCDB se tiene:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{CD}$$

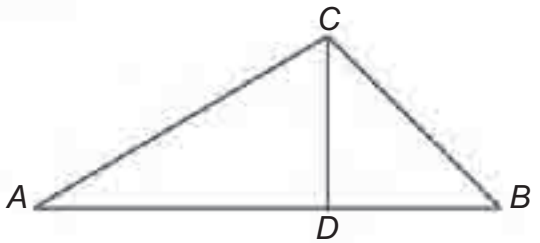
Escribe la igualdad de razones entre lados homólogos de ΔACD y ΔCDB.

El trabajo que has hecho en esta sección permite concluir el siguiente teorema de semejanza:

> La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a éste en dos triángulos semejantes a él y semejantes entre sí.

¿Podrías reconstruir la prueba que de él se ha hecho?

4. En el triángulo rectángulo $\Delta\ ABC$ hemos trazado la altura $\overline{CD}$, sobre la hipotenusa.



Los triángulos ABC y ACD tienen en común el ángulo A y ya viste que son triángulos semejantes.

La igualdad de razones entre lados homólogos que forman el ángulo A se expresa así:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ ó } \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

¿Qué observas en las dos proporciones que se establecen entre razones de lados homólogos?

¿Cómo son los medios en la primera proporción? ¿Cómo los extremos en la segunda?

El hecho que acabas de analizar ocurre en todo triángulo rectángulo y lo podemos enunciar así:

> En un triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

En nuestro caso la hipotenusa es $\overline{AB}$, el cateto considerado es $\overline{AC}$ y la proyección de $\overline{AC}$ sobre la hipotenusa es $\overline{AD}$.

Si se considera el cateto $\overline{CB}$, ¿cómo escribirías la proporción entre los lados homólogos de los triángulos ABC y CBD, que tienen en común el < B?

Comenta tus conclusiones con tus compañeros(as).

Lee y analiza el texto:

MEDIA PROPORCIONAL

Ya viste comó expresar una proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

A cada elemento lo llamamos ***cuarta proporcional*** de los otros tres números, además hemos considerado que todos ellos son diferentes.

¿Qué pasa cuando se repite un mismo elemento en las razones?

¿Qué casos podrían ocurrir?

Recuerda que en una proporción como

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a y d se llaman extremos
b y c se llaman medios

¿Cómo escribirías una proporción en la cual sus medios sean iguales?

¿Cómo la expresarías si sus extremos son iguales?

En estos casos nos referimos al elemento común como ***media proporcional***:

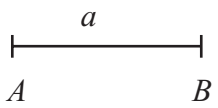
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

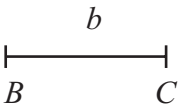
En los dos casos b es media proporcional de a y c.

UN MODELO GEOMÉTRICO PARA ENCONTRAR LA MEDIA PROPORCIONAL DE DOS NÚMEROS

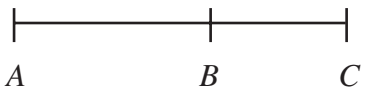
Los números se asocian a la longitud de segmentos, así el problema se transforma en encontrar la longitud del segmento que representa la media proporcional de segmentos cuyas medidas se conocen.

Si $a = 3\ cm$ y $b = 2\ cm$, un procedimiento a seguir es el siguiente:

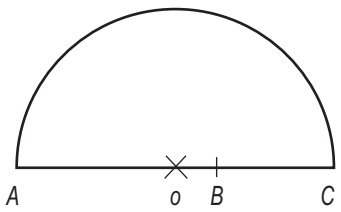




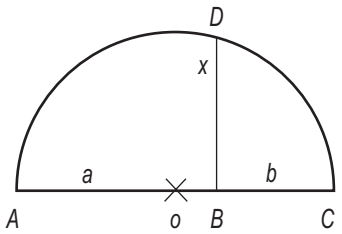
Se trazan los segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en forma consecutiva.



Se localiza el punto medio O de $\overline{AC}$ y después con el compás, se traza una semicircunferencia cuyo radio sea igual a $\overline{AO}$

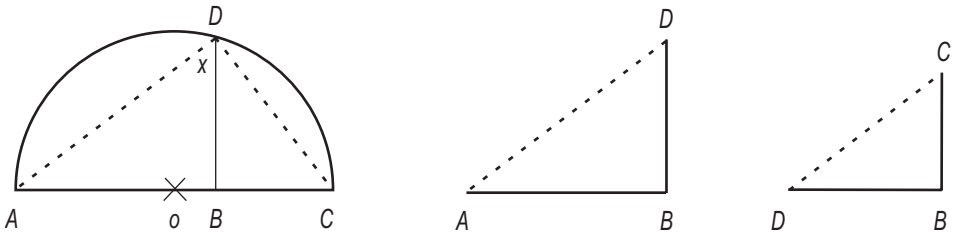


Se traza una perpendicular a $\overline{AC}$ a partir de B, de manera que corte a la semicircunferencia formándose el segmento $\overline{BD}$, que representa la media proporcional buscada.



Si se unen A con el punto D y C con el punto D, se obtienen dos triángulos semejantes con base en el teorema de semejanza que ya conoces; los triángulos son:

El $\Delta\ ABD$ y el $\Delta\ BCD$



En la figura se observa que:

$\overline{AB}$ es homólogo de $\overline{BD}$
$\overline{BD}$ es homólogo de $\overline{BC}$

Por lo tanto, la proporción que se forma es:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

De aquí, el término común es: BD mide 2.4 cm.

Este resultado lo puedes comprobar:

En la proporción establecida reemplaza la medida de los segmentos dados.

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$$
$$\frac{3}{BD} = \frac{BD}{2}$$
$$6 = (BD)^2$$
$$\sqrt{6} = BD$$
$$2.4 = BD$$

La longitud de $\overline{BD}$ es 2.4 cm. La media proporcional de 3 y 2 es 2.4.

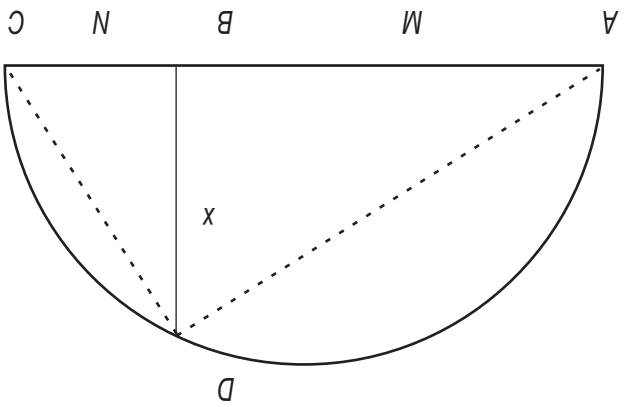
Observa el video, tus aprendizajes te permitirán comprenderlo a fondo. Discute con tus compañeros(as) los aportes que éste puede hacerles para enriquecer sus trabajos.

En forma individual construye la media proporcional de los segmentos cuyas longitudes se tienen a continuación y comprueba tu resultado resolviendo la proporción.

$m = 6\ cm$
$n = 3\ cm$

Compara tu resultado con los de otro compañero(a); si hay divergencias, consulta la clave.

CLAVE



$\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$

$\frac{6}{x} = \frac{x}{3}$, *de donde:*

$6(3) = x(x)$

$18 = x^2$

$\sqrt{18} = x$

$4{,}2 = x$

comprobación:

$x = 4{,}2\ cm$

95
138 - 3

¡RESUELVE EL ROMPECABEZAS!

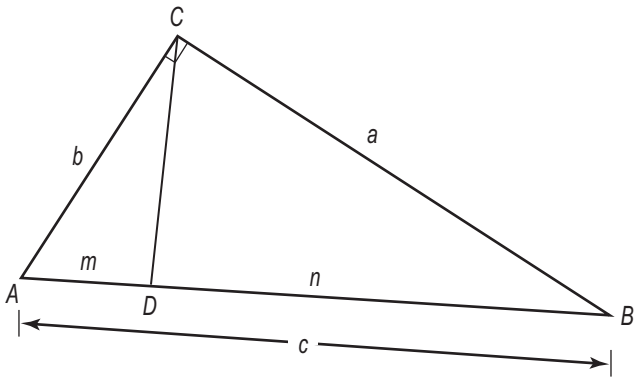
Teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos
Aplicación del teorema de Pitágoras en superficies

La gran aplicación del teorema de Pitágoras en diversos campos de la ciencia lo hace uno de los temas de mayor importancia.

En sesiones anteriores has estudiado el teorema de Pitágoras y has reflexionado sobre razonamientos que lo demuestran.

Te invitamos a que con tu grupo de trabajo y aplicando lo que conoces sobre semejanza de triángulos, construyas una demostración de este famoso teorema.

1. Dibuja un triángulo rectángulo. Señala la altura sobre la hipotenusa.



Explica por qué estás seguro de que $\Delta\, ABC$ es semejante al $\Delta\, DBC$

Establece la proporción entre lados homólogos teniendo en cuenta el lado a.

¿Encontraste que $a^2 = cn$?

2. Ya sabes que $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ADC$. Establece la proporción entre lados homólogos, teniendo en cuenta el lado b.

¿Puedes llegar a que $b^2 = cm$?

3. Busca la expresión en términos de cn y cm para:

$$a^2 + b^2$$

Seguramente estableces que esta suma la puedes expresar como $c\ (m + n)$.

¿A qué lado del $\Delta\, ABC$ es igual $m + n$?

¿Cómo traduces la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$?

Comparte tus conclusiones con tus compañeros(as).

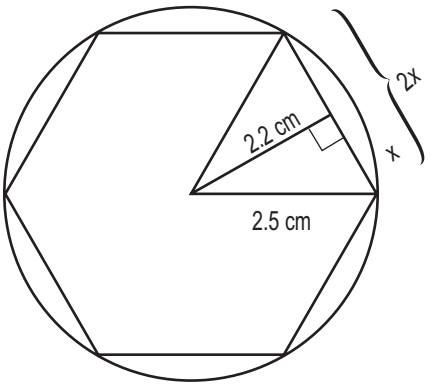
Observa con atención el video, comenta los aspectos que encuentras relevantes.

Individualmente resuelve el siguiente ejercicio, usa la calculadora.

Calcula el área de un hexágono regular circunscrito por un círculo que mide de radio 2.5 cm; la apotema del hexágono mide 2.2 cm.

Compara tu ejercicio con la clave y, si tienes dudas, consulta a tu maestro(a).

CLAVE



$$x = \sqrt{(2.5)^2 - (2.2)^2}$$

$$x = \sqrt{6.25 - 4.84}$$

$$x = \sqrt{1.41}$$

$$x = 1.19$$

$$2x = 2.38$$

$$P = 14.28\ cm$$

$$A = 15.71\ cm^2$$

Este resultado es aproximado, pues se usaron números redondeados.

96

139 - 3

COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

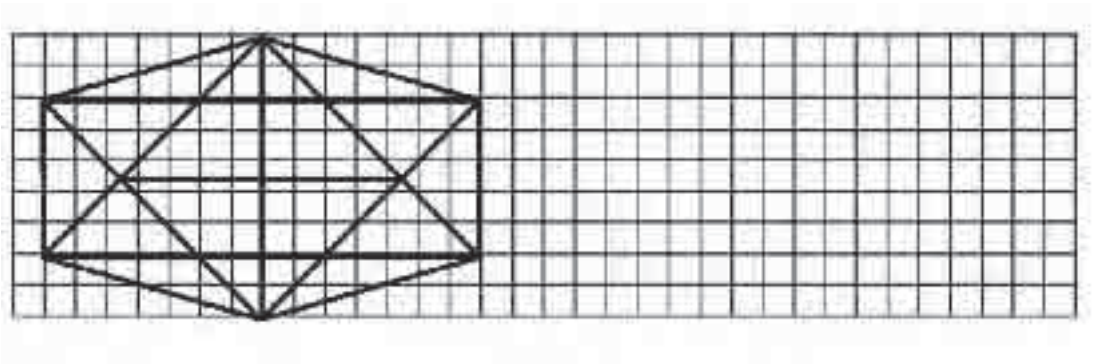
Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo
Integración de los conocimientos adquiridos

¿Qué sucedería si no tienes la oportunidad de repasar los temas vistos antes de hacer una evaluación? Si lo analizaste bien, habrás llegado a la conclusión de que estas sesiones son muy importantes.

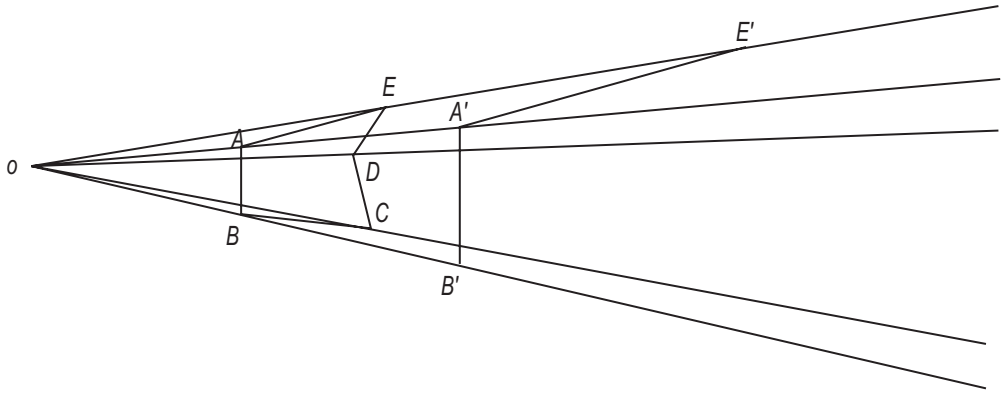
Ve atentamente el video, que te ayudará a recordar los temas estudiados en este núcleo.

Con un compañero(a) realiza los siguientes ejercicios.

1. Traza una figura semejante a la original a una escala de 1:2.



2. Completa la siguiente figura, mediante el trazo de segmentos paralelos, mide los segmentos indicados y establece la razón entre la original y su imagen.



Escribe la medida de la longitud de los segmentos:

AB =

$A'B'$ =

AE =

$A'E'$ =

ED =

$E'D'$ =

DC =

$D'C'$ =

BC =

$B'C'$ =

¿Cuál es la razón entre ambas figuras?

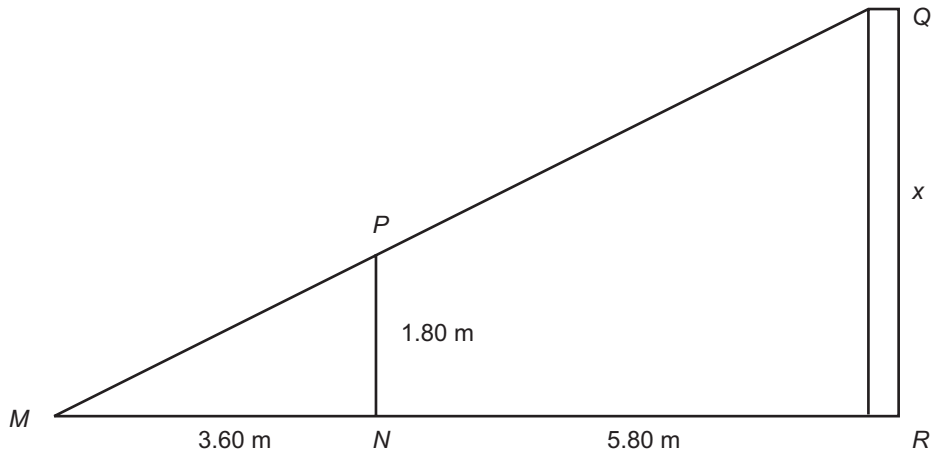
¿Cuál es el punto de homotecia?

¿Cuáles son los ángulos homólogos?

¿Cómo se llama a la razón entre la medida de los lados homólogos?

3. Explica con tus palabras el teorema de Tales.

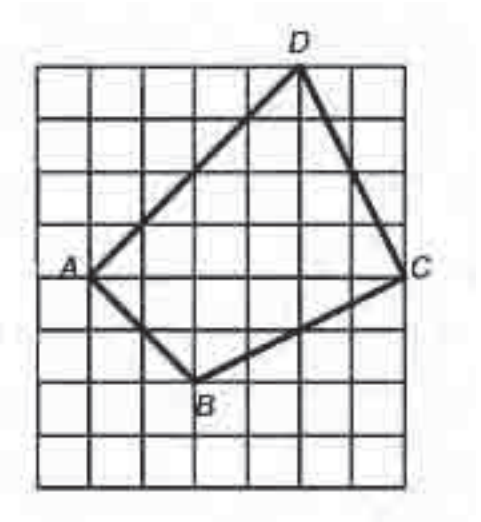
4. Calcula la altura del poste de luz representado en la figura.



Compara con los resultados de otros compañeros(as) y, si tienes dudas, consulta a tu maestro(a).

Ahora tú solo resuelve los siguientes ejercicios.

5. Reproduce la figura a escala 2:1.



6. Según tu trabajo,
   ¿Cómo son los ángulos ABC y $A'B'C'$?
   ¿Cómo son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$?
   ¿Cómo son los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$?
   ¿Cómo son los triángulos?

Al finalizar, espera las indicaciones de tu maestro(a), para hacer las correcciones.

97
140 - 3

¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

Demostración del aprendizaje logrado
Evaluación de los logros obtenidos

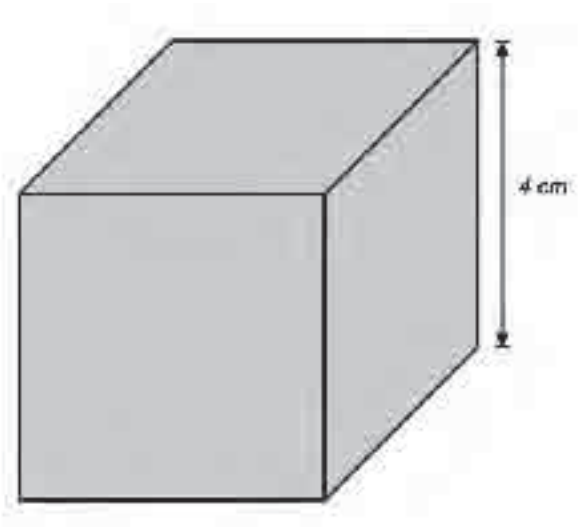
Esta sesión es la última de este núcleo y, por lo tanto, es importante que realices una valoración de lo que has aprendido.

Observa el video, en el cual te darán indicaciones para que realices el ejercicio siguiente:

Teorema de Pitágoras ( )	*Semejantes* ( )	*Homólogos* ( )
Cuarta proporcional ( )	*Teorema de Tales* ( )	*Media proporcional* ( )

Realiza individualmente los ejercicios siguientes, trabaja en tu cuaderno:

1. El siguiente cuerpo fue reproducido en escala 2:1, con lo que se puede deducir que:



a) ¿Qué puedes decir de la arista de la reproducción en relación con la arista del original?

¿Cuánto mide la arista de la reproducción?

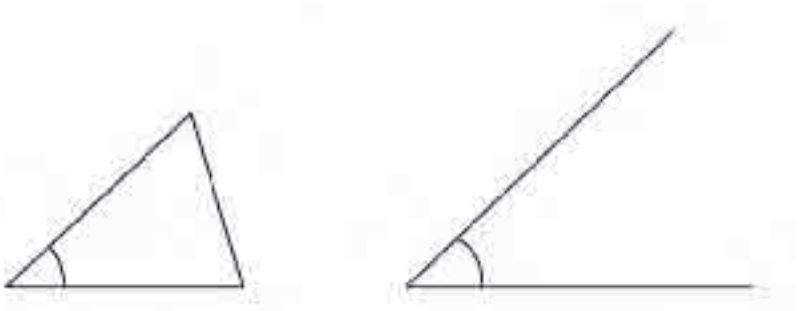
b) El área de una cara en el original es 16 cm^2. ¿Cuál será el área de una cara en la reproducción?

c) Si el volumen del cuerpo en la figura original es 64 cm^3, ¿cuál es el volumen del cuerpo en la reproducción hecha a escala 2:1?

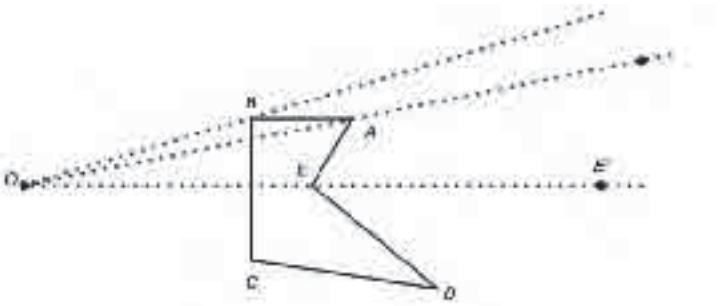
d) ¿Cuál es la relación entre los volúmenes del cuerpo original y del cuerpo reproducido?

2. Explica cómo procedes para trazar un triángulo semejante al dado.

Observa que uno de los ángulos ya está trazado.



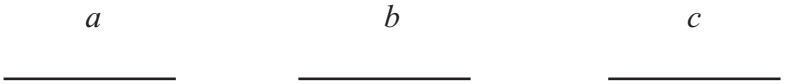
3. En tu cuaderno termina de construir una figura homotética a la siguiente:



a) ¿Cuál es el centro de homotecia?

b) ¿Cuáles son los lados homólogos?

4. Con los siguientes segmentos, determina geométricamente en tu cuaderno la cuarta proporcional.

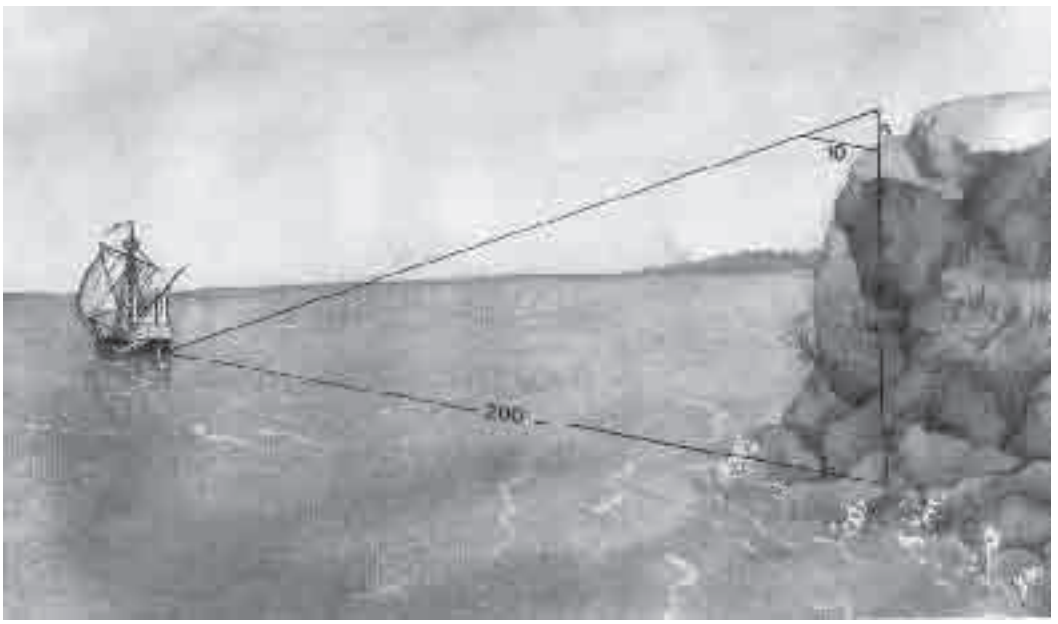


5. ¿Qué longitud debe tener una escalera que se desea colocar sobre una pared de 2.5 m a una distancia de 1.8 m? Realiza el dibujo correspondiente en tu cuaderno a una escala 1:100.

Verifica tus procedimientos y revisa si tus resultados son correctos. Posteriormente, el profesor(a) indicará cómo evaluar el trabajo.

Núcleo Básico 7

TRIGONOMETRÍA



La palabra trigonometría se deriva del griego *trigonon* (triángulo) y *metron* (medición). Es una rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los elementos de los triángulos, proporcionando un método para calcular sus medidas.

La trigonometría nació en el siglo II a.C. Fueron sus fuentes los intentos de hacer mediciones de las observaciones astronómicas, la navegación, la agrimensura y la cartografía.

Posteriormente el estudio de fenómenos periódicos como el movimiento de las olas del mar, los latidos del corazón, el movimiento de la cuerda de una guitarra, y fue precisamente el análisis de este último el que permitió ser modelado con expresiones matemáticas que involucran las funciones seno y coseno, también periódicas.

Hoy muchos exámenes médicos pueden hacerse con gran precisión mediante el envío de ondas adecuadas sobre tejidos u órganos vitales como el corazón, capaces de interactuar

selectivamente de tal manera que la recolección de ondas resonantes, producto de esa interacción son analizadas por el computador, el cual llega a mostrar imágenes, por ejemplo de las válvulas del corazón y su funcionamiento.

El hombre ha ido encontrando fenómenos ondulatorios como el sonido, la electricidad, el electromagnetismo, los rayos X y ha aprendido a analizarlos matemáticamente como lo hiciera con la cuerda vibrante de una guitarra y a utilizarlos como en la radio, el radar, la televisión, el sonar, el microscopio electrónico, la resonancia magnética y miles más.

98
143 - 3

RADIO UNO

Círculo unitario
Ubicación de un triángulo rectángulo en el círculo unitario

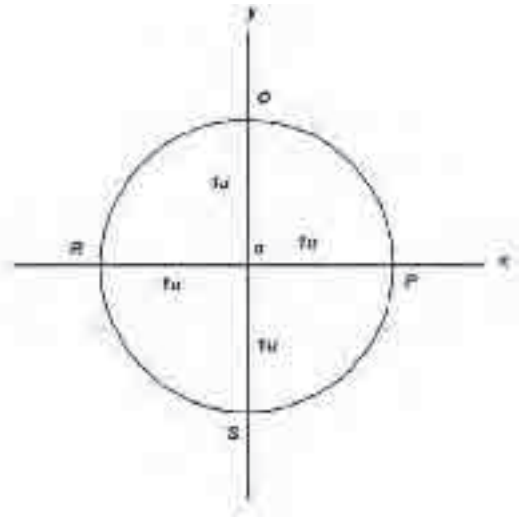
La trigonometría esencialmente se ocupa de encontrar las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Este tópico de las matemáticas es muy fácil de estudiar si nos valemos de construcciones geométricas que nos permitan visualizar los conceptos que queremos construir. Una herramienta que nos permitirá facilitar la búsqueda de estas relaciones es el círculo de radio una unidad.

Con tu grupo de trabajo lee, analiza y realiza las construcciones que se sugieren.

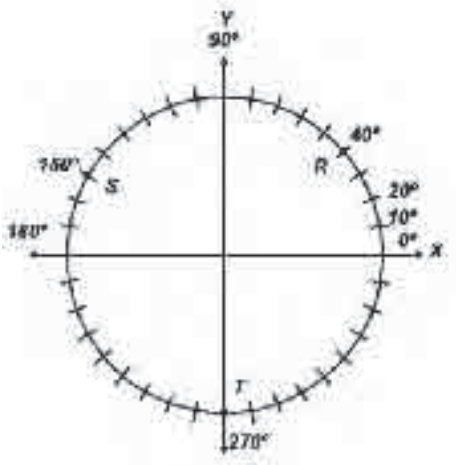
CÍRCULO UNITARIO

Recibe el nombre de círculo unitario aquél cuyo radio mide una unidad; su centro coincide con el origen del plano cartesiano. La unidad puede ser: 1 cm, 1 dm, etcétera.



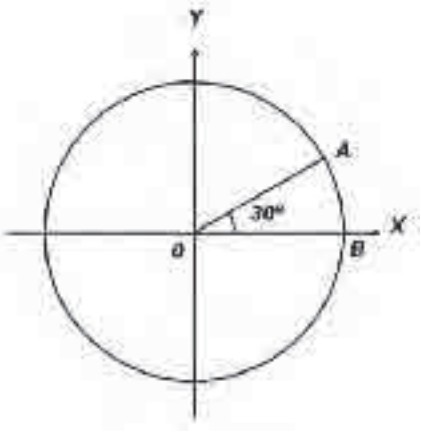
¿Qué relación tienen los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ y $\overline{OS}$ con el círculo cuyo radio es 1 unidad de longitud?

Por ejemplo, en la figura de la derecha, al punto R le corresponde un valor de 40º, al punto S le corresponde un valor de 150º y al punto T un valor de 270º.

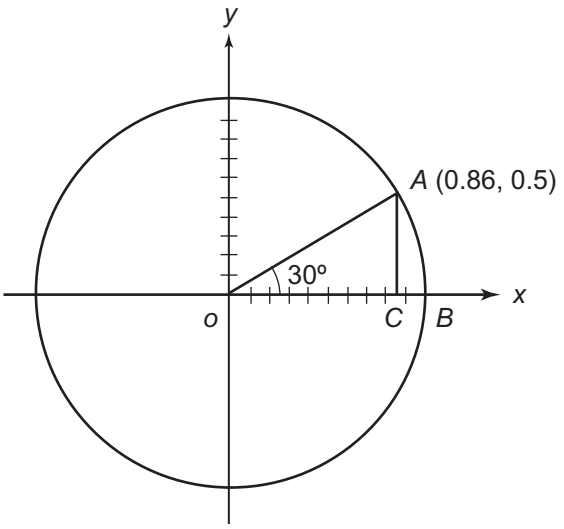


Dichos valores se leen en una escala circular alrededor del círculo unitario. El cero de esta escala se ubica normalmente en la dirección positiva del eje de las abscisas. A partir de este punto, dicha escala se ubica alrededor del círculo, siguiendo la dirección contraria al giro de las manecillas del reloj. Las unidades deben ser tales que, al llegar nuevamente al cero, sumen en total 360.

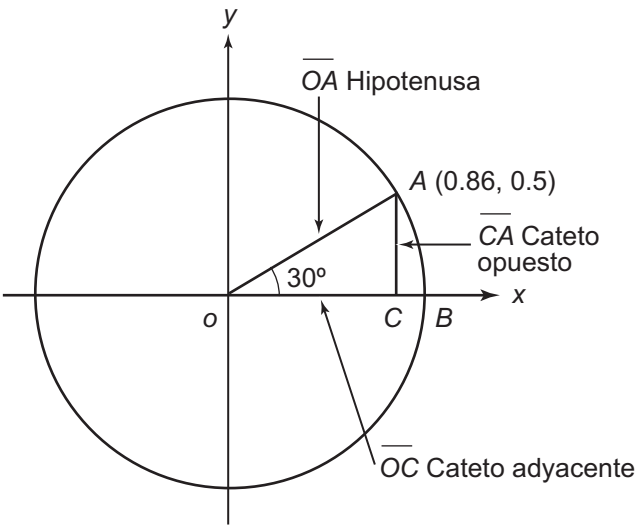
Al formar un ángulo central de 30º mediante 2 radios en un círculo unitario, se determinan los puntos A y B de la circunferencia.



Si se baja la perpendicular del punto A al eje x (eje de las abscisas), se localiza el punto C. Obsérvese que el punto A, al que se le asigna el valor de 30º, está localizado en las coordenadas (0.86, 0.5), ya que OB mide 1 unidad.



La figura formada es un triángulo rectángulo en donde la hipotenusa $\overline{OA}$ es el radio del círculo y los catetos $\overline{CA}$ y $\overline{OC}$ reciben los nombres de cateto opuesto y cateto adyacente del ángulo 0, respectivamente.



El círculo unitario y el trazo de triángulos rectángulos dentro de él serán de gran utilidad en las sesiones posteriores para el establecimiento de las funciones trigonométricas.

Observa el video; en él se mostrará un análisis del círculo unitario, el cual te servirá posteriormente para comprender las funciones trigonométricas. Al terminar, comenta con el resto del grupo las ideas principales.

Con tus compañeros(as), y sobre el dibujo que has hecho en tu cuaderno, localiza los puntos B y C como se sugieren en el gráfico. Traza las perpendiculares para construir los triángulos OBA y OCD.

¿Cuánto mide el ángulo AOB? ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

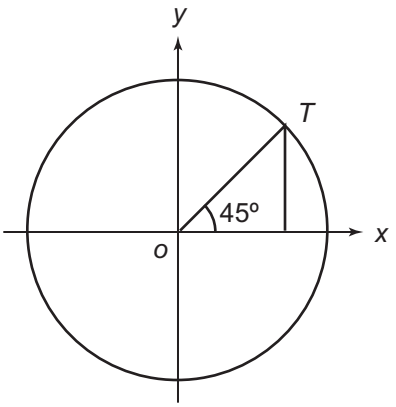
Recuerda que el radio del círculo mide 1 unidad.

Tus medidas serán aproximadas, escoge una buena escala.

¿Cuánto mide el ángulo AOC? ¿Cuáles son las coordenadas de C?

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as).

Observa la figura siguiente para que relaciones, individualmente, ambas columnas. Escribe dentro de los paréntesis la letra que corresponda. Hazlo en tu cuaderno.



1. Triángulo ubicado en el círculo unitario..... ( )
2. Ángulo recto del triángulo. ( )
3. Hipotenusa .....( )
4. Cateto adyacente .....( )
5. Cateto opuesto .....( )

a) $< TOR$

b) $\overline{OS}$

c) $\Delta\, OST$

d) $\overline{OR}$

e) $< ORT$

f) $\overline{OT}$

g) $\overline{RT}$

h) $\Delta\, ORT$

Compara tus respuestas con la clave; si tuviste errores, corrígelos.

CLAVE

1. h; 2. e; 3. f; 4. d; 5. g.

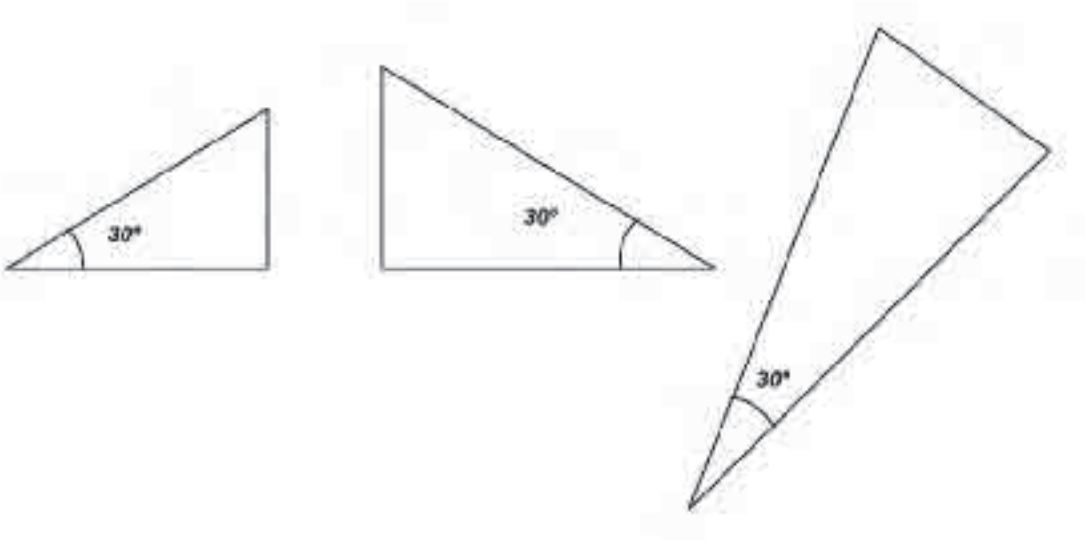
99
144 - 3

AL DERECHO Y AL REVÉS

Funciones y razones trigonométricas seno y cosecante.
Establecimiento de las funciones y razones seno y cosecante

Con tu grupo explora inicialmente una relación muy interesante entre un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo particular.

1. Dibuja varios triángulos rectángulos, de diferentes tamaños, pero todos ellos deben tener un ángulo de 30º.



En cada uno de ellos mide la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30º y también la longitud de la hipotenusa.

Establece para cada uno la razón:

$$\frac{\textit{longitud del cateto opuesto}}{\textit{longitud de la hipotenusa}}$$

¿Qué observas?, ¿cómo es este cociente, en todos los casos?
Compara tus resultados con los de tus amigos(as).

2. ¿Era predecible el resultado encontrado anteriormente?

   ¿Cómo son entre sí los triángulos que han dibujado?

   ¿Cómo puedes justificar el resultado obtenido si aplicas tus conocimientos sobre semejanza de triángulos?

3. Aprovecha los dibujos que has hecho. En esos triángulos el otro ángulo agudo es de 60º.

   Establece la razón, para cada uno, entre el cateto opuesto y su hipotenusa. ¿Cuál es el cociente en este caso?

   Compara con el cociente encontrado por tus compañeros.

Invita a tu grupo para leer, analizar y realizar las construcciones sugeridas en el texto.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSECANTE

Como ya dijimos, nos ocuparemos de encontrar las relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

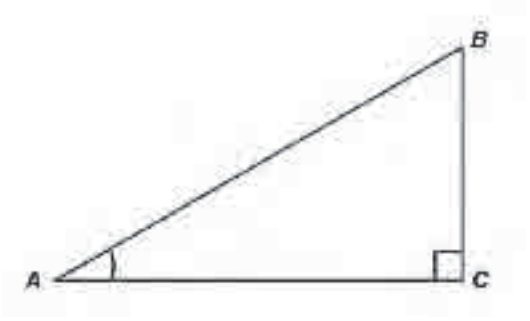
En un triángulo rectángulo fijamos la atención en uno de sus ángulos agudos, $\measuredangle$ A

Definimos la razón entre las medidas:

$$\frac{\text{longitud del cateto opuesto al } \measuredangle \text{ A}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

Como el seno del $\measuredangle$ A:

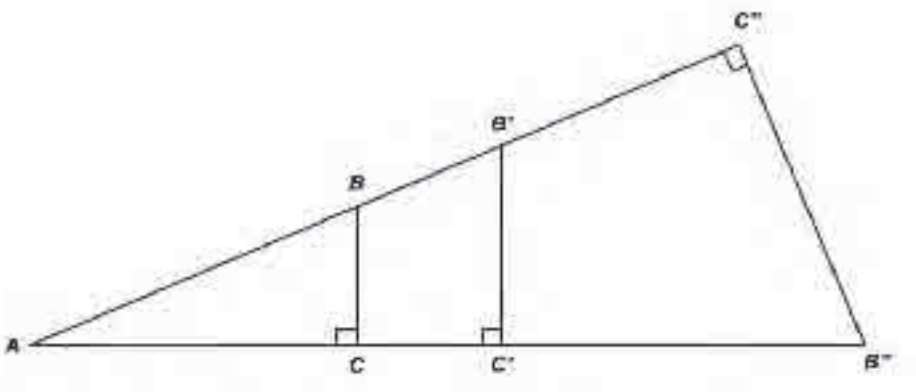
$$seno \measuredangle A = \frac{BC}{AB}$$



En forma abreviada se escribe $sen\ A$

En la sesión anterior, sin conocer el nombre de esta razón, hallaron su cociente para ángulos de $30°$ y $60°$.

Nos preguntamos qué ocurre si sobre el ángulo A se traza más de un triángulo rectángulo, ¿serán o no las mismas?



En $\Delta\ ABC$ En $\Delta\ A\,B'C'$ En $\Delta\ AB''C''$

$$sen\ A = \frac{BC}{AB} \qquad sen\ A = \frac{A'B'C'}{AB'} \qquad sen\ A = \frac{B''C''}{AB''}$$

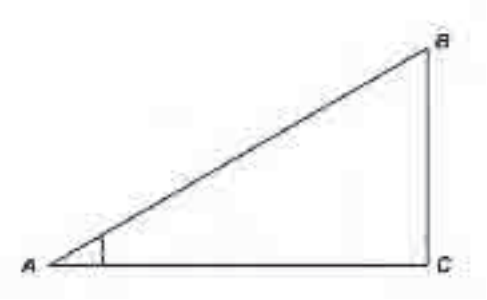
Si analizas, ves que $\Delta\ ABC$, $\Delta\ AB'C'$ y $\Delta\ AB''C''$ son semejantes y puedes entonces establecer la siguiente igualdad de razones:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

Entonces puedes concluir que es indiferente calcular el seno del ángulo sobre cualquiera de los triángulos.

Intuiciones sobre esta conclusión ya las tuviste a través del trabajo en la sesión anterior.

Pero, ¿por qué no analizar de una vez la razón inversa o recíproca de la razón seno?



Se define la razón cosecante como:

$$\frac{\text{Longitud de la hipotenusa}}{\text{Longitud del cateto opuesto}}$$

$$cosecante \ \measuredangle \ A = \frac{AB}{BC}$$

Se usa escribir en forma abreviada: $csc\ A$.

¿Qué relación hay entre $sen\ A$ y $csc\ A$?

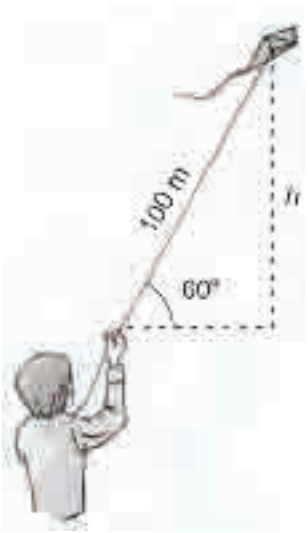
$$sen\ A = \frac{BC}{AB} \quad \text{y} \quad csc\ A = \frac{AB}{BC}$$

Entonces, se puede establecer que:

$$csc\ A = \frac{1}{sen\ A}$$

¿Cómo usar la razón seno en la solución de problemas?

* Un niño vuela su cometa. Ha soltado 100 m de cuerda, que en este momento hace un ángulo de 60º con la horizontal. ¿Podremos saber qué tan alto se encuentra la cometa?



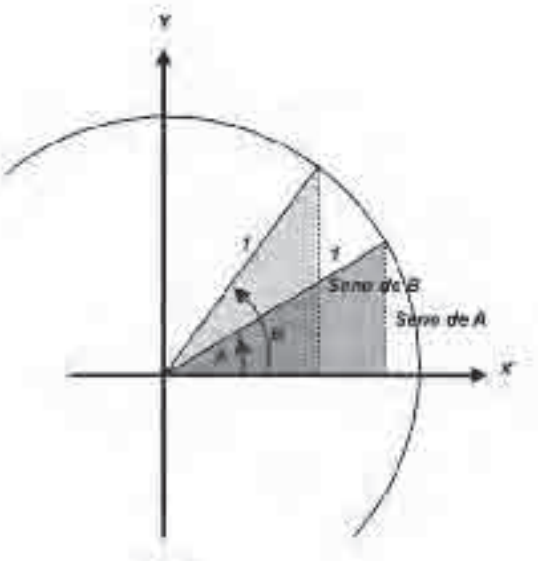
Con tus compañeros(as) establece una estrategia para solucionar el problema.

Trabaja con tus compañeros y compañeras.

1. El seno de ángulos agudos y la forma de determinarlo.

Dijimos que el círculo unitario es una buena herramienta para determinar relaciones trigonométricas.

Dibuja un círculo sobre los ejes coordenados. Una buena medida para el radio es 10 cm que consideraremos como unidad. Si dispones de papel milimetrado, úsalo, te facilitará la medición, aunque no es indispensable.



El círculo se traza con radio 1 unidad. Los ángulos se miden a partir del segmento positivo de X.

De esta manera la longitud del cateto opuesto al ángulo es el seno, ya que:

$$sen\ A = \frac{medida\ cat\ opuesto}{1}$$

La hipotenusa vale 1.

Es decir, el seno del ángulo corresponde a la coordenada Y.

Marca sobre el círculo unitario que has trazado ángulos cada *10º: 10º, 20º, 30º, ..., 90º*.

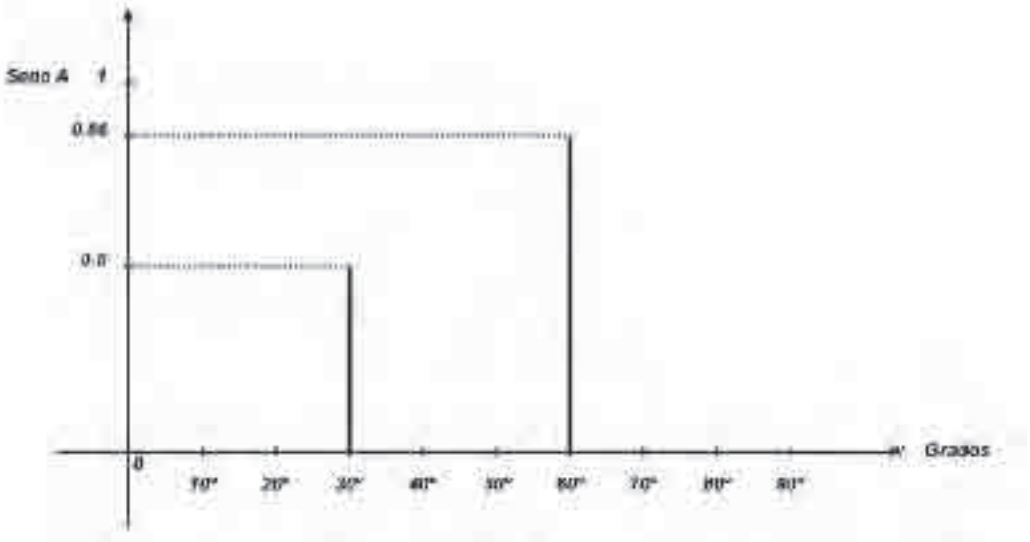
Traza los triángulos rectángulos que se determinan y mide el seno de cada uno. Elabora una tabla con estos datos.

ÁNGULO	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º	90º
SENO				0.5			0.86			

¿Qué ocurre para $0°$? ¿Cuánto vale el $sen\ 0°$?

¿Qué ocurre para $90°$? ¿Cuál es el valor de $sen\ 90°$?

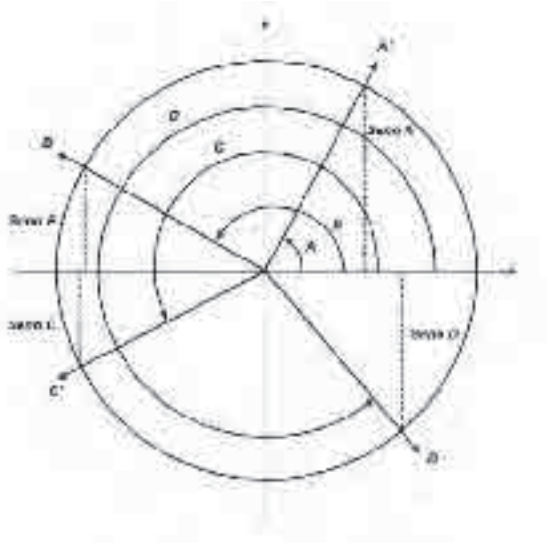
Otra forma de visualizar estos valores es mediante una gráfica: para cada ángulo trazado determina la altura correspondiente al seno del ángulo.



¿Podrías localizar en la gráfica el seno de cualquier ángulo entre $0°$ y $90°$? Por ejemplo, ¿cómo localizarías $sen\ 37°$?

2. Se ha encontrado la razón seno para ángulos entre $0°$ y $90°$. ¿Cómo hacerlo para ángulos mayores de $90°$?

Volvamos a nuestro círculo unitario, en el cual la ordenada del punto de corte entre la circunferencia y la semirrecta que determina el ángulo de nuestro interés, nos permite determinar el seno.



A partir del eje positivo de X se han trazado ángulos en cada uno de los cuadrantes del círculo.

Ángulo A es agudo, menor de $90°$.

Ángulo B es obtuso, mayor de $90°$ pero menor de $180°$.

Ángulo C está entre $180°$ y $270°$.

Ángulo D es mayor de $270°$ y menor de $360°$.

Ya vimos cómo la ordenada de A' (el valor de y) nos da el valor de $sen\ A$. De la misma manera podemos establecer que:

$sen\ B$ = ordenada de B'

$sen\ C$ = ordenada de C'

$sen\ D$ = ordenada de D'

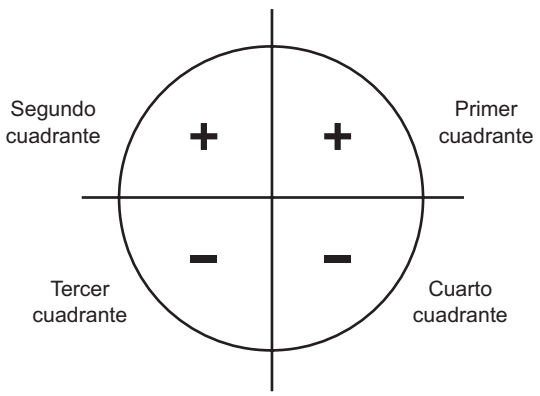
Y ¿qué podemos observar?

- Como las ordenadas de A' y B' son valores positivos de Y, se tiene que sen A y sen B son entonces valores positivos.

  Si analizamos, A podría ser cualquier ángulo en el primer cuadrante del círculo y B cualquier ángulo en el segundo cuadrante, de tal manera que cualquier ángulo, entre 0 y $180°$ va a tener un valor positivo.

  En tanto que las ordenadas de puntos como C' y D' son valores negativos de Y. Así sen C y sen D son valores negativos. Esto ocurre para cualquier ángulo en el tercer cuadrante, entre $180°$ y $270°$ y para cualquier ángulo en el cuarto cuadrante, entre $270°$ y $360°$. Esta situación la podemos sintetizar en una gráfica, así:

Signos para el seno de un ángulo



Determina el signo de los siguientes senos de los ángulos dados:

$sen\ 15°$, $sen\ 99°$, $sen\ 175°$, $sen\ 200°$

$sen\ 350°$, $sen\ 10°$, $sen\ 125°$, $sen\ 280°$

- Analiza algunas curiosidades:

  sen 30° = *0.5*, ¿a qué es igual *sen 150°*?

  ¿Cómo lo hallarías fácilmente?

  ¿Cómo son entonces *sen 80°* y *sen 100°*?

  Si *sen 150°* = *0.5*, ¿a qué es igual *sen 210°*?

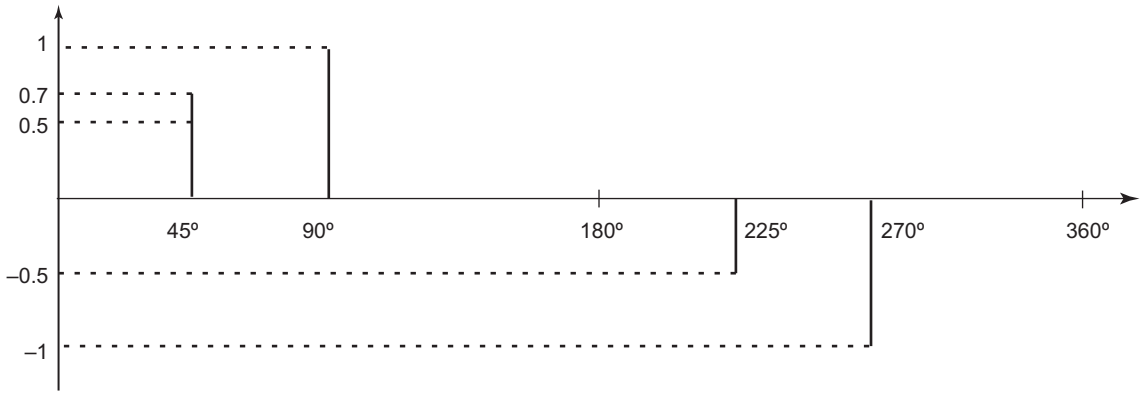
  ¿A qué es igual *sen 330°*? ¿Por qué?

  Si *sen 60°* = *0.86*, ¿cuál es el seno de los ángulos: *120°*, *240°*, y *300°*?

  Socializa con tus compañeros(as) y el profesor(a) tus hallazgos.

Con tu grupo.

Como ya hiciste una gráfica para los senos de los ángulos comprendidos entre *0°* y *90°*, y conoces relaciones entre un ángulo de un cuadrante y el que tiene la misma ordenada en cada uno de los otros cuadrantes, amplía la gráfica para los ángulos entre *0°* y *360°*.



Compara tu gráfica con la hecha por tus compañeros(as).

Observa con atención el video. Seguramente éste te enriquecerá tus conocimientos. Comenta los aspectos relevantes y aquellos en los cuales tendrás aportes que los superen.

Con tu grupo.

a) Analiza los siguientes hechos:

A cada ángulo se hace corresponder un solo valor del seno, ¿qué ocurre con el recíproco?

¿Corresponde a cada valor del seno, un solo ángulo? Ejemplo para $sen\ X = 0.5$, hay varios valores para X, ¿cuáles?

b) Como ya conoces mucho acerca de la razón $sen\ X$ puedes generalizar por qué podemos hablar de la ***función sen X***.

Cuando X toma valores entre $0°$ y $360°$, ¿cómo varía la función?

Podrías encontrar un ángulo para el cual $sen\ X$ fuera mayor que 1? ¿Por qué?

c) Si ya conoces la relación entre $sen\ X$ y $csc\ X$ halla:

$csc\ 45°$, $csc\ 90°$, $csc\ 30°$, $csc\ 150°$

$csc\ 210°$, ¡$csc\ 180°$!

Compara tu trabajo con el de otros grupos.

Trabaja individualmente.

a) Si $sen\ 45° \sim 0.7$, escribe los valores de

$sen\ 135°$, $sen\ 225°$, $sen\ 315°$

b) Si $sen\ 70° \simeq 0.93$, encuentra fácilmente ángulos cuyo seno esté relacionado con este valor.

CLAVE

$Sen\ 135° \simeq 0.7$ $Sen\ 225° \simeq -0.7$ $Sen\ 315° \simeq -0.7$

$Sen\ 110° \simeq 0.93$ $Sen\ 250° \simeq -0.93$ $Sen\ 290° \simeq -0.93$

100
144 - 3

LAS INVERSAS

Funciones y razones trigonométricas coseno y secante
Establecimiento de las funciones y razones coseno y secante

Si relacionas el cateto adyacente y la hipotenusa de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos, puedes establecer las funciones trigonométricas llamadas coseno y secante. Con las actividades que te proponemos a continuación, conocerás más acerca de ellas.

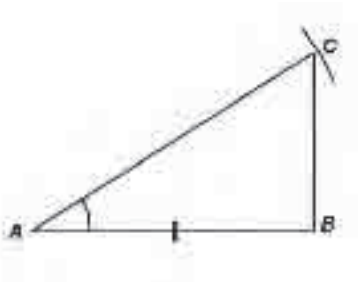
Lee con tus compañeros(as) de grupo.

FUNCIONES Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

COSENO Y SECANTE

En la sesión anterior se estudiaron las razones y funciones trigonométricas que relacionan el cateto opuesto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos. Ahora nos ocuparemos de encontrar las razones entre el cateto adyacente y la hipotenusa y darles nombres.

Así, en un triángulo como el siguiente, se tiene:



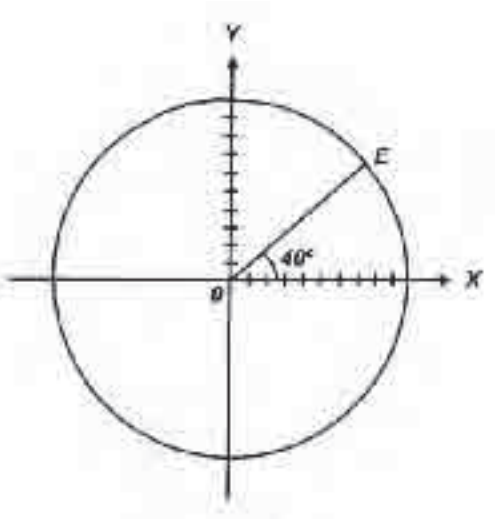
- Respecto al ángulo A, el cateto opuesto es $\overline{BC}$ y el cateto adyacente es $\overline{AB}$.
  El segmento $\overline{AC}$ es la hipotenusa.

- Definimos la razón coseno de ángulo A, que en forma abreviada notaremos $\cos A$, así:

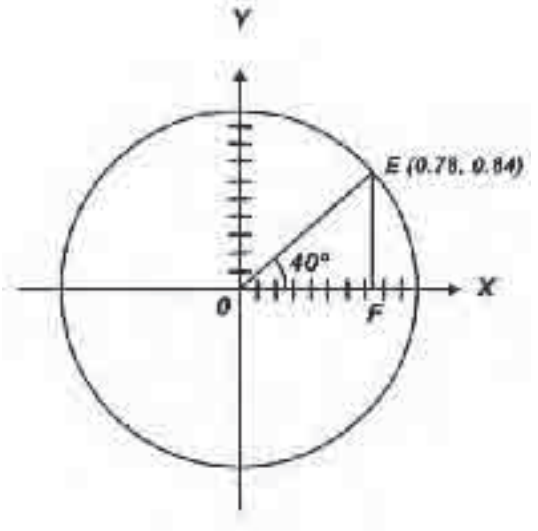
$$\cos A = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyacente}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$$

Empleando el círculo unitario, en forma análoga a como se hizo con el seno de un ángulo, resulta muy sencillo determinar su coseno.

Para ello, primero se determina un ángulo central cualquiera en un círculo unitario (para este caso el ángulo es de $40°$).



En seguida se traza una perpendicular del punto E al eje de las x, formándose así el triángulo rectángulo OFE, siendo $\overline{OE}$ la hipotenusa $\overline{FE}$ y $\overline{OF}$ el cateto opuesto y el adyacente, respectivamente, al ángulo FOE.



Las coordenadas del punto E son $(0.76,\ 0.64)$.

En el ΔOFE, la relación que existe entre las medidas OF (cateto adyacente) y la hipotenusa OE se representa con la razón coseno. Para este caso como $OE = 1$, entonces:

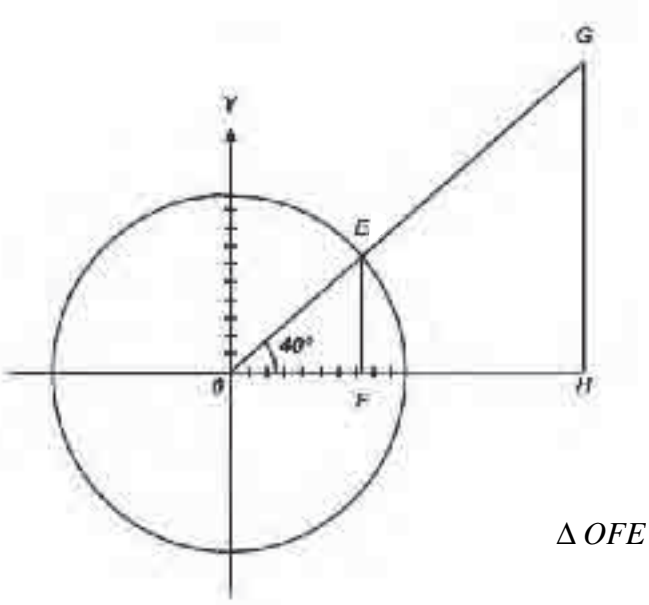
$$cos\ FOE = \frac{OF}{1} = OF$$

$$cos\ 40° = \frac{0.76}{1} = 0.76$$

$$cos\ 40° = 0.76$$

Nota que el coseno del ángulo FOE está determinado por la ***abscisa*** del punto E, o sea $\overline{OF}$. El valor del coseno de un ángulo se localiza en el eje de las x.

Si en la figura anterior se prolongan los segmentos $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$ y se traza un segmento paralelo a $\overline{EF}$, se forman dos triángulos semejantes.



$\Delta OFE \sim \Delta OHG$

Dado que los lados de triángulos semejantes son proporcionales, se puede afirmar que:

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \frac{medida\ cateto\ adyacente}{medida\ hipotenusa}$$

Pero como: $\frac{OF}{OE}$ = $cos\ FOE$ y $\sphericalangle\ FOE$ = $\sphericalangle\ HOG$, entonces:

$$cos\ HOG = \frac{medidad\ del\ cateto\ adyacente}{medida\ de\ la\ hipotenusa}$$

Es decir, en cualquier triángulo rectángulo el coseno de cada uno de sus ángulos es la razón existente entre la medida de su cateto adyacente y la medida de la hipotenusa.

En el ejemplo del $\Delta\ OHG$, al medir el cateto adyacente y la hipotenusa en centímetros, se tiene:

$$\cos 40° = \frac{4}{5.2} = 0.76$$

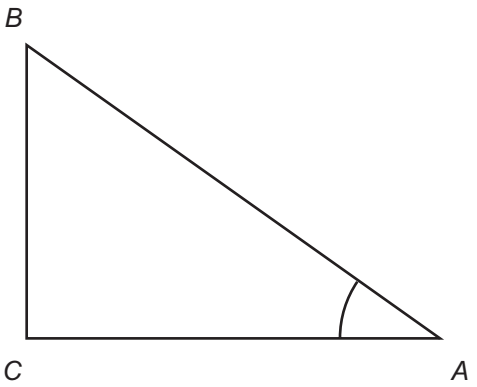
que es el mismo valor que se encontró para $\Delta\, OFE \sim \Delta\, OHG$.

La razón trigonométrica recíproca de la función coseno es la ***secante***; su símbolo es ***sec***.

La función secante se deduce de la función coseno.

La secante se representa con la razón siguiente:

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$



Pero como $\cos A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$, entonces:

$\sec A = \dfrac{1}{\dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}}$, o bien

$$\sec A = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}} = \frac{1\,(hipotenusa}{1\,(cateto\ adyacente)}$$

$$\sec A = \frac{medida\ de\ la\ hipotenusa}{medida\ del\ cateto\ adyacente}$$

Es decir, la secante de un triángulo es la razón entre la medida de la hipotenusa y la del cateto adyacente.

Observa con atención el video, te ayudará a comprender mejor las razones trigonométricas consideradas anteriormente. Comenta con tus compañeros los aspectos que creas relevantes.

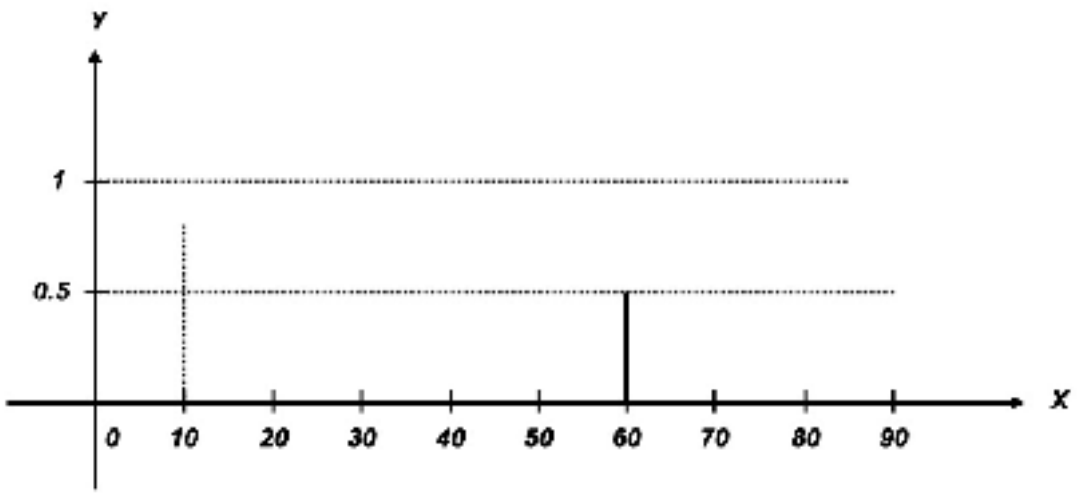
Trabaja con tu grupo.

1. Usa un círculo unitario, te facilitará la medición si tomas como radio unidad 10 cm.

   Elabora una tabla para encontrar el valor del coseno de ángulos tomados cada 10º.

ÁNGULO	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º	90º
COSENO	1									

2. Haz una gráfica con los datos de la tabla.



¿Para qué valor del ángulo el coseno es *1*? ¿Cuál es el seno de ese ángulo?

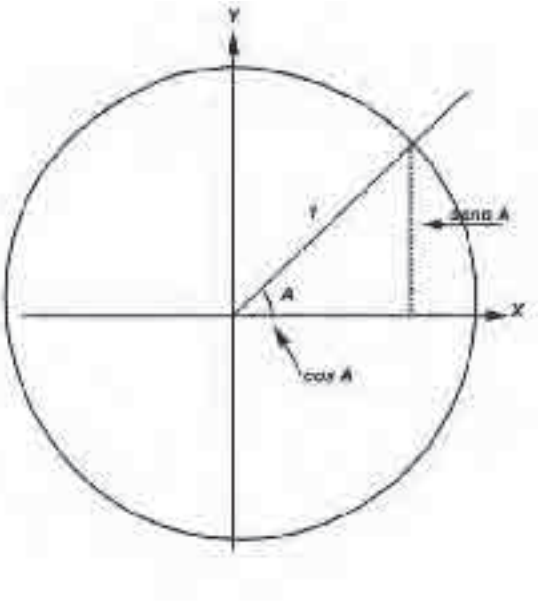
Cuando el coseno es *0*, ¿cuál es el ángulo? ¿Cuál es el seno de este ángulo?

¿Hay algún ángulo para el cual el seno y el coseno tengan el mismo valor? ¿Cómo es el triángulo rectángulo en este caso?

Comenta tus resultados con tus compañeros(as).

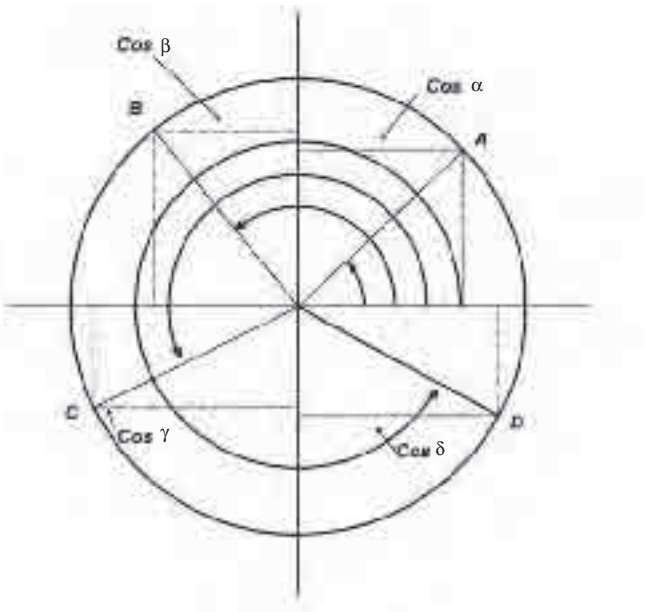
Con tu grupo de trabajo.

Con ayuda del círculo unitario pudiste determinar el seno y el coseno de un ángulo trazado en él.



Las coordenadas de B son:
$x = cos\ A\ ;\ y = sen\ A$

Nos preguntamos, ¿cómo determinar el coseno de ángulos mayores a 90º?



Nota: Una forma de representar ángulos es mediante las letras griegas: α, β, γ, δ.. Esta notación es muy práctica, porque se evita la confusión que puede presentar el uso de letras mayúsculas como A, B... que también denotan puntos.

Así α es > 0º y < 90º , está en el primer cuadrante.

β es > 90º y < 180º , está en el segundo cuadrante.

γ es > 180º y < 270º , está en el tercer cuadrante.

δ es > 270º y < 360º , está en el cuarto cuadrante.

Ya viste que la abscisa de A corresponde al cos α.

De igual manera se determinan:

$cos\ \beta$ = abscisa de B

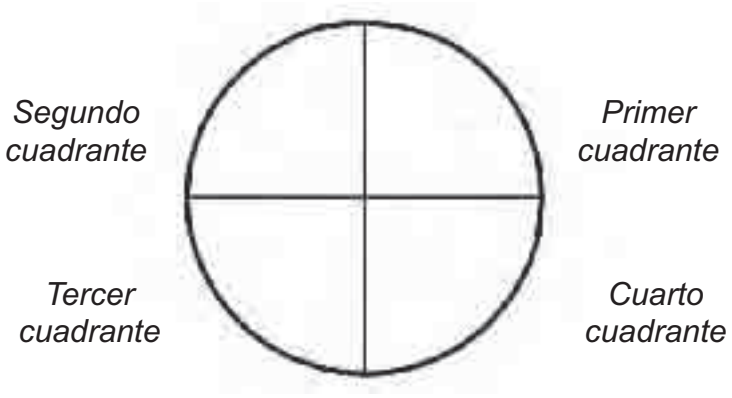
$cos\ \gamma$ = abscisa de C

$cos\ \delta$ = abscisa de D

¿Para cuáles ángulos el coseno es negativo?

Completa, en tu cuaderno, una gráfica que muestre cuándo el coseno de un ángulo es positivo o negativo.

Signos para el coseno de un ángulo

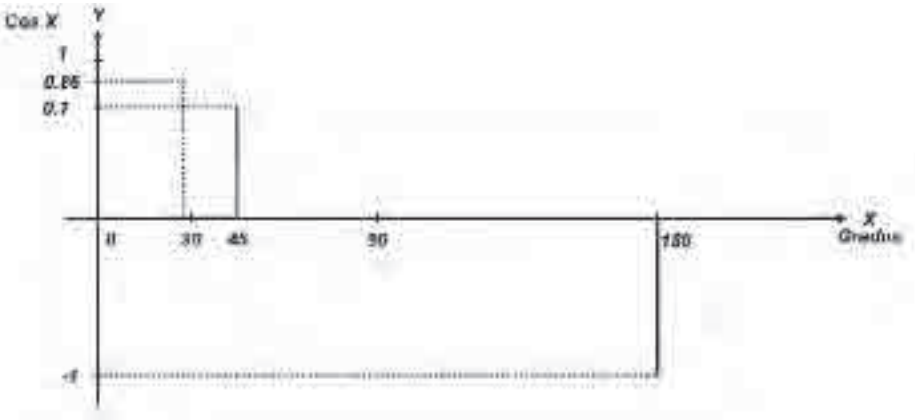


Compara tu trabajo con el realizado por tus compañeros(as).

Si tienes dudas, consulta con tu maestro(a).

Con tus compañeros(as) de grupo.

1. Con ayuda del círculo unitario haz una gráfica con los valores de la función coseno de ángulos entre 0º y 360º. Toma los valores cada 10°.



2. Si la función sec $\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ determina:

a) *sec 0°* b) *sec 30°* c) *sec 135°*

d) *sec 180°* e) *sec 330°* f) *sec 360°*

¿Puedes definir *sec 90°*? ¿Por qué?

Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as).

Trabaja individualmente.

1. Si *cos 60° = 0.5*, encuentra los valores *cos 120°*, *cos 240°*, *cos 300°*.

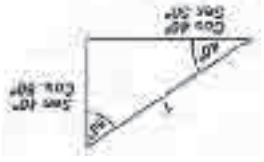
2. Si *sen 40° ≃ 0.64* y *cos 40° ≃ 0.77*

¿Cómo podrás calcular el *sen 50°* y *cos 50°*?

CLAVE

1. cos 120° = − 0.5 , cos 240° = − 0.5 , cos 300° = 0.5

2. Como ángulo de 50° y ángulo 40° son complementarios,
se tiene que sen 40° = cos 50° ≃ 0.64,
y cos 40° = sen 50° ≃ 0.77



101
146 - 3

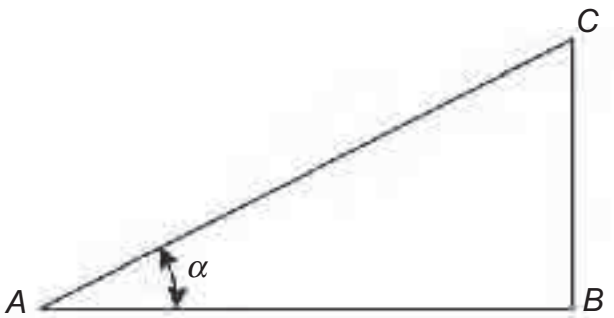
TÚ Y YO SOMOS UNO

Funciones y razones trigonométricas tangente y cotangente
Establecimiento de las funciones y razones tangente y cotangente

En ciertas películas de corte romántico aparecen parejas que generalmente se aman sobre todas las cosas y se juran amor eterno. En algunas escenas suele emplearse la expresión “tú y yo somos uno”. En lo que respecta a trigonometría, las razones trigonométricas, al multiplicarse por sus recíprocas, siempre dan como resultado la unidad, razón por la cual se les puede aplicar la misma frase.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo.

1. Dibuja un triángulo rectángulo cualquiera, en él señala uno de sus ángulos agudos, por ejemplo α



¿Cuál es el cateto opuesto a α?, ¿cuál el cateto adyacente?

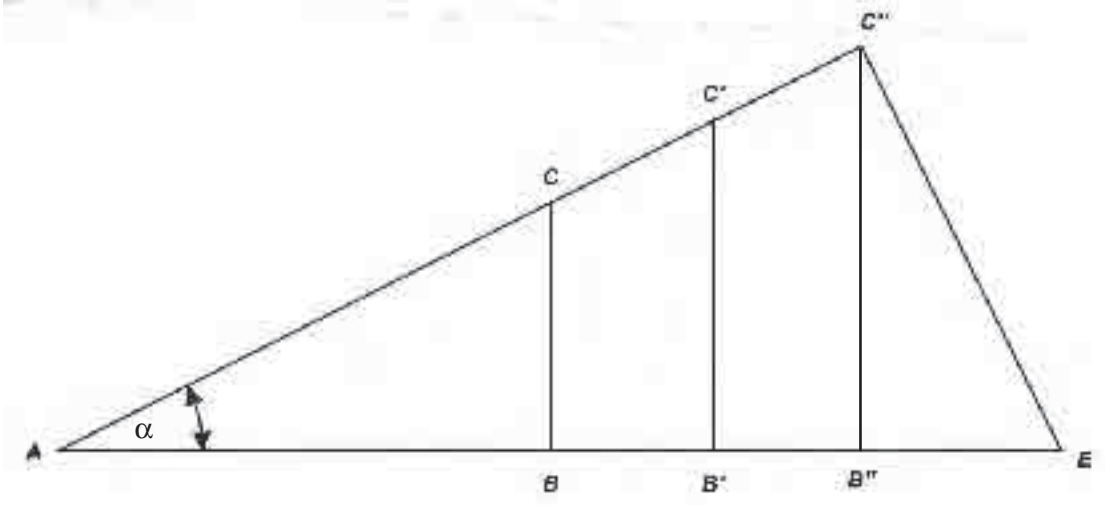
Escribe la razón entre la medida del cateto opuesto y la medida del cateto adyacente a α.

$$\frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ adyacente} = \frac{CB}{AB}$$

Mide en tu dibujo las longitudes de los catetos y calcula el cociente anterior.

Sobre el dibujo prolonga los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$
Traza dos paralelas a $\overline{CB}$ tales como $\overline{C'B'}$ y $\overline{C''B''}$

Por el punto determinado por C'' , traza una perpendicular a $\overline{AC''}$ que corte a la prolongación de $\overline{AB''}$, en un punto que puedes señalar como E.



De esta manera has determinado varios triángulos rectángulos para los cuales α es uno de sus ángulos agudos.

¿Cuáles son estos triángulos? Determínalos.
¿Son todos ellos semejantes? ¿Por qué?

Escribe las razones entre la medida del cateto opuesto a α y la medida del cateto adyacente a α.

$$\frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ adyacente} = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C''}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \frac{AE}{AC''}$$

¿Por qué podemos afirmar que todas estas razones son iguales?

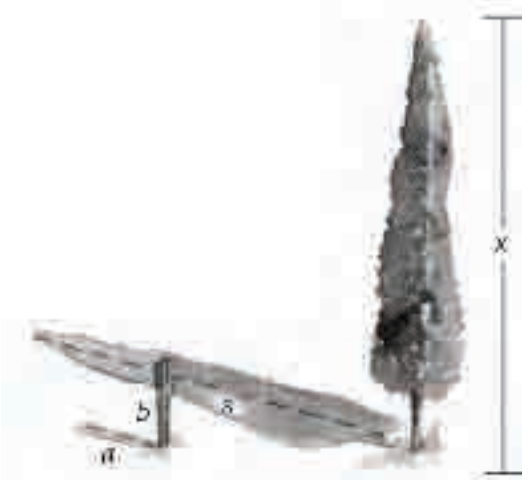
Haz las mediciones correspondientes sobre tu dibujo y encuentra los cocientes correspondientes.

¿Cómo resultan ser estos cocientes?

El valor constante de la razón entre el cateto opuesto y el adyacente, referidos a uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo nos permite definir la ***tangente*** del ángulo determinado. Mide el ángulo α de tu dibujo. ¿Cuál es entonces la tangente de α?

2. Cuando resolviste problemas usando semejanza de triángulos, implícitamente usaste la relación tangente de un ángulo.

   • Un joven calcula la altura de un árbol comparando su sombra con la de un poste cuya altura conoce.



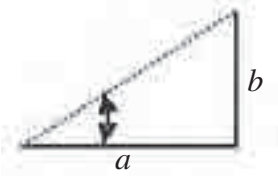
Como el joven ha estudiado semejanza de triángulos establece la siguiente igualdad de razones.

$$\frac{x}{s} = \frac{b}{a}$$

Para hallar la altura x del árbol, despeja este valor.

$x = \frac{b}{a} . s$, donde se conoce cuánto miden b, a y s.

Pero ¿cuál es el cociente $\frac{b}{a}$?



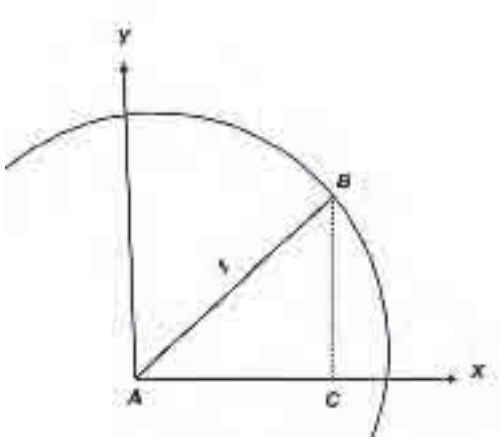
$$tag\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ adyacente}$$

En este caso α es el ángulo que formaban los rayos del sol con el horizonte, en el momento de la medición. ¿Qué opinas de la solución del problema? Comenta con tus compañeros(as) de grupo.

Observa con atención el video, en el cual se definirán las razones tangente y cotangente de un ángulo. Comenta con tus compañeros(as) los aspectos que encuentren más interesantes para ustedes.

Con tu equipo de trabajo.

1. Sobre un círculo unitario localiza un ángulo, entre 0º y 90º.



¿Cómo definimos $tan\ \alpha$?

$$tan\ \alpha = \frac{medida\ \ cateto\ \ opuesto}{medida\ \ cateto\ \ adyacente} = \frac{BC}{AC}$$

¿Cuáles son las coordenadas de B?

Si $AB = 1$

$B\ (sen\ \alpha,\ cos\ \alpha)$

¿Estarías de acuerdo en escribir entonces que

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\ ?$$

Parece evidente, pero lo podrías comprobar:

¿Cuál es el $cos\ \alpha$?

$$\cos\alpha = \frac{medida\ \ cateto\ \ adyacente}{medida\ \ hipotenusa} = \frac{AC}{AB}$$

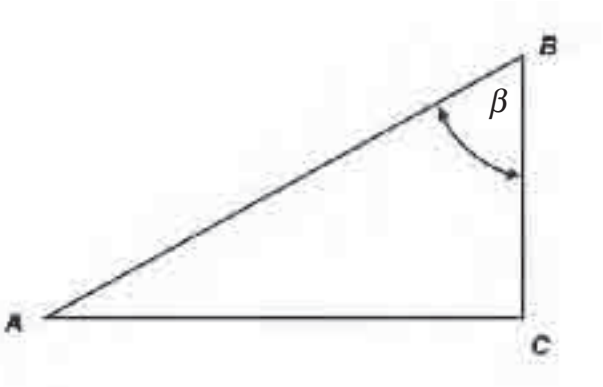
¿A qué es igual $\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$?

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{BC\ /\ AB}{AC\ /\ AB} = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = tan\ \alpha$$

Esta relación entre seno, coseno y tangente de un ángulo es muy importante y práctica, en la resolución de problemas.

2. Busquemos una relación importante entre seno y coseno de un ángulo.

Dibuja un triángulo rectángulo y señala uno de sus ángulos agudos



Escribe a qué es igual $sen\ \beta$

$$sen\ \beta = \frac{AC}{AB}$$

¿A qué es igual cos β ?

$$cos\ \beta = \frac{BC}{AB}$$

Reemplaza estos valores en la siguiente expresión

$$sen^2\ \beta\ +\ cos^2\ \beta = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2\ +\ \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$$

Eleva al cuadrado cada longitud por aparte.

$$\frac{AC^2}{AB^2}\ +\ \frac{BC^2}{AB^2}\ =\ \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}$$

¿Recuerdas el teorema de Pitágoras? ¿A qué es igual el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo? ¿Cuál es la hipotenusa del $\Delta\ ABC$?

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Reemplaza la suma de los cuadrados de los catetos:

$$\frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}\ =\ \frac{AB^2}{AB^2}\ =\ 1$$

Esta relación, al igual que la encontrada en 1, nos permite calcular las demás razones trigonométricas de un ángulo cuando se conoce una de ellas.

3. Resuelve el problema:

Si $cos\ \alpha \simeq 0.67$, calcula $sen\ \alpha$ y $tan\ \alpha$.

Recuerda que $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$

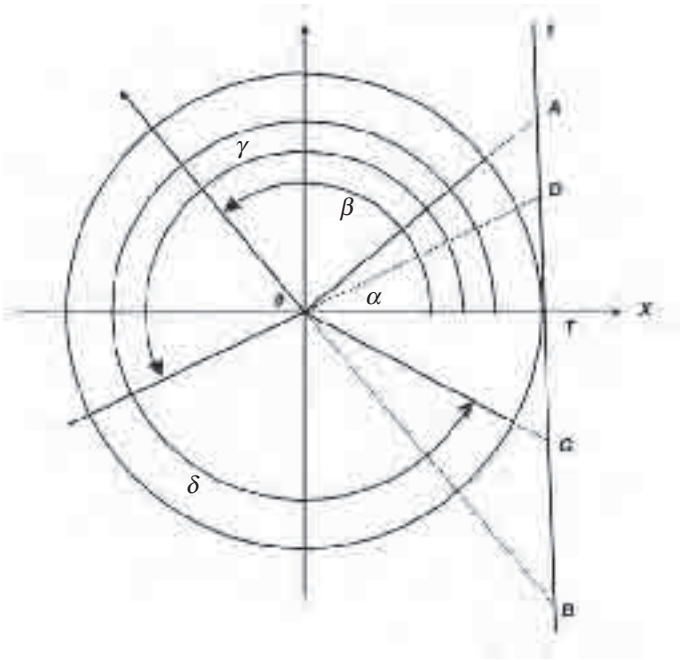
Cuando halles $sen\ \alpha$, recuerda que $tan\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$

Socializa tus hallazgos y respuestas con tus compañeros(as). Si tienes dudas, consulta con tu profesor(a).

Lee, analiza y comenta con tus compañeros(as) de grupo.

DEFINICIÓN DE LA TANGENTE

Mediante el uso del círculo unitario se puede representar la tangente sobre una recta t, que es ***TANGENTE*** a dicho círculo.



El ángulo α es agudo, su tangente se define:

$$\frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ adyacente} = \frac{AT}{OT} = \frac{AT}{1} = AT$$

De esta manera resulta muy fácil determinar la tangente de un ángulo. Una vez determinado el ángulo, prolongamos la semirrecta que lo define, tomando como referencia la parte positiva de X, hasta que corte la recta tangente t. El segmento AT representa la tangente de α.

Pero, ¿qué ocurre con ángulos no agudos, mayores de $90°$?

Por ejemplo β, situado en el segundo cuadrante: el lado del ángulo debe prolongarse para que corte la recta de tangentes t, el punto de corte B, representa su tangente:

$$tan\ \beta = TB$$

Como B está por debajo de T, la tangente β es negativa.

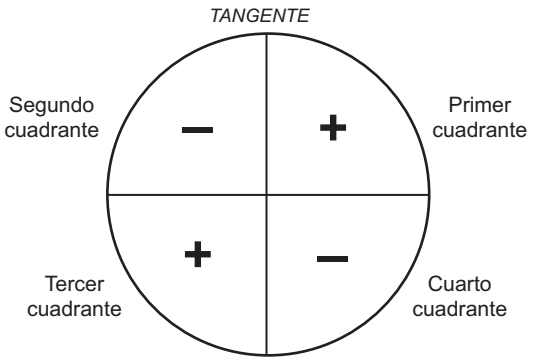
El ángulo γ está en el tercer cuadrante, la prolongación de su lado corta la recta de tangentes en el punto D, así:

$tan\ \gamma = TD,$ la tan γ es positiva, D está por encima de T.

El ángulo δ está en el cuarto cuadrante, su lado corta la recta de tangentes en G, así que ésta es negativa.

$$tan\ \delta = TG$$

La siguiente gráfica señala el signo de la tangente, según el cuadrante en que se encuentre el ángulo.



Comprueba esta relación partiendo de la definición de la tangente como

$$Tangente = \frac{seno}{coseno}$$

Para el primer cuadrante:

Seno es positivo y coseno es positivo

Tangente (+) = $\frac{sen\,(+)}{cos\,(+)}$

Analiza la situación para los otros cuadrantes.

Con tus compañeros(as) de equipo.

1. Haz una gráfica con ayuda del círculo unitario (radio 10 cm como unidad). Traza una recta tangente sobre la cual puedas determinar la tangente de ángulos trazados.

   a) Calcula

tan 30°	*tan 150°*	*tan 45°*	*tan 135°*	*tan 0°*
tan 210°	*tan 300°*	*tan 225°*	*tan 315°*	*tan 180°*

   ¿Por qué algunas de estas tangentes son iguales, del mismo signo?

   ¿Por qué otras son numéricamente iguales pero de diferente signo?

   b) Calcula la *tan 40°*, ¿qué otro ángulo tiene la misma tangente?

2. Si la cotangente (en forma corta **cot**) es la razón inversa de la tangente, esto es:

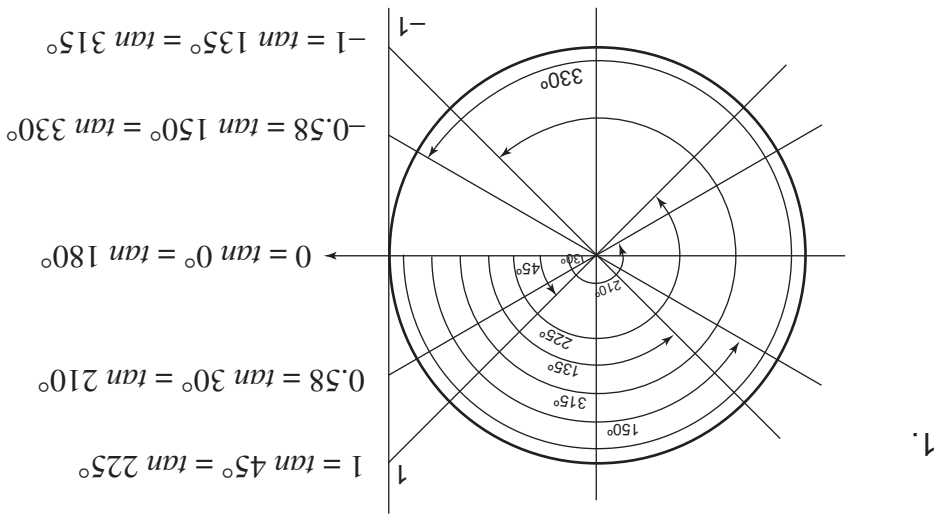
$$tan\ X = \frac{1}{cot\ X}$$

   Calcula:

   cot 30° , *cot 45°* , *cot 60°*

   Socializa tus resultados con los encontrados por otros compañeros(as) y con tu profesor(a).

CLAVE



1.

$$\tan 60^\circ = 1.73 \;,\; \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{1.73} = 0.58$$

$$\tan 45^\circ = 1 \qquad , \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\tan 30^\circ = 0.58 \;,\; \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{0.58} = 1.72$

2. $\tan 40^\circ \simeq 0.84 = \tan 220^\circ$

102
147 - 3

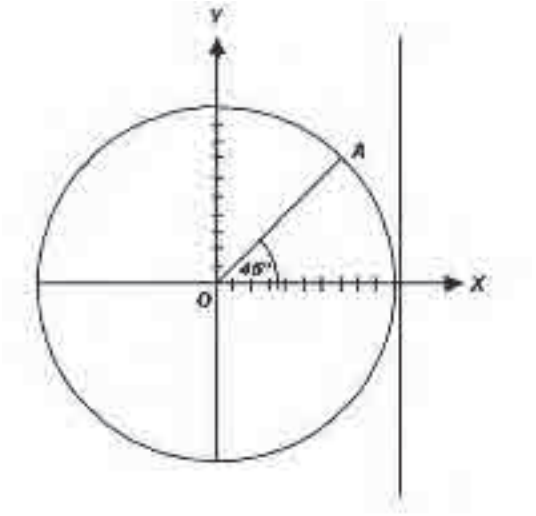
LAS DIRECTAS

Seno, coseno y tangente de 45º
Establecer el valor de las funciones seno, coseno y tangente de 45º

Seguramente el tema de esta sesión ya es conocido por ti. Lo interesante es que puedas comparar procedimientos o estrategias para encontrar las razones trigonométricas de un ángulo especial, aquel que corresponde a la mitad de un cuarto de vuelta, y que también encuentras en cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isosceles, y cuya forma manipulas a diario en una de las escuadras que usas para dibujar.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo.

Dibuja un círculo unitario, determina un ángulo de 45º.



- Encuentra las coordenadas del punto intersección entre el lado del ángulo de 45º y la circunferencia: A

- Explica por qué las coordenadas de A son:

  $(sen\ 45°,\ cos\ 45°)$

- Halla sus respectivos valores.

- Traza la recta de tangentes t, determina sobre ella $tan\ 45°$ y halla gráficamente su valor.

- Compara este valor con el que obtienes de la expresión:

$$tan\ 45° = \frac{sen\ 45°}{cos\ 45°}$$

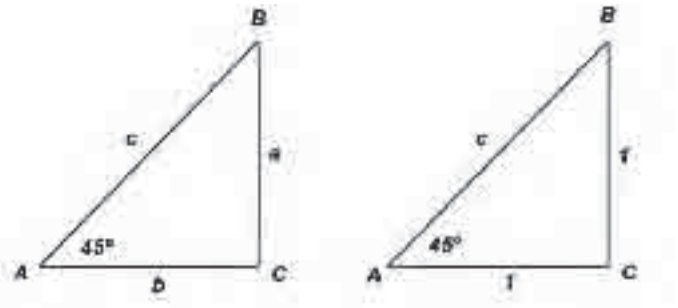
¿Qué observas?

Comparte tus hallazgos con los encontrados por tus compañeros(as).

Continúa trabajando con tu grupo.

Otra forma de calcular las razones seno, coseno y tangente de $45...$

1. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos a y b midan 1 unidad.



Observa que en la figura se tiene:

ángulo $A = 45°$, ángulo $B = 45°$, ángulo $C = 90°$

$a = 1$, $b = 1$ ¿Cuánto mide c?

Recurrimos al teorema de Pitágoras para calcular el valor de la hipotenusa c.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1^2 + 1^2$$
$$c^2 = 2$$
$$c^2 = \sqrt{2} \cong 1.4142$$

a) Halla sen 45º

$$sen\ 45. = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ hipotenusa}$$

¿Qué valor obtienes? Usa la calculadora.

b) Halla cos 45º

$$cos\ 45° = \frac{medida\ cateto\ adyacente}{medida\ hipotenusa}$$

c) Halla tan 45º, para ello puedes usar las siguientes expresiones:

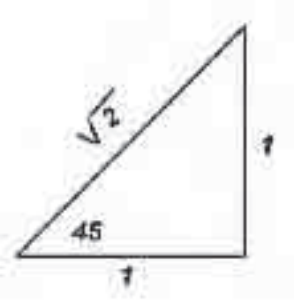
$$tan\ 45° = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ adyacente}$$

$$tan\ 45° = \frac{sen\ 45°}{cos\ 45°}$$

¿Cuál es entonces la tan 45°?

3. Una forma usual de expresar las razones seno, coseno y tangente de 45º.

En la parte 1, calculaste la hipotenusa del triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 1 unidad.



$$sen\ 45° = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ \ hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

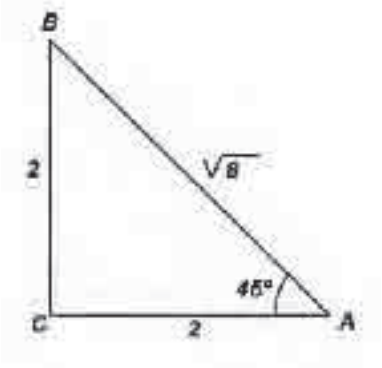
$$cos\ 45° = \frac{medida\ cateto\ adyacente}{medida\ hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tag\ 45° = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ adyacente} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comenta con tus compañeros(as) las conclusiones sobre tu trabajo.

Observa con atención el video. Comenta con tus compañeros(as) los aspectos más importantes de éste.

En forma individual, de acuerdo con el triángulo que se presenta, determina las seis funciones trigonométricas con respecto al ángulo de 45º. Usa la calculadora.



Encuentra los valores de las funciones sin usar la calculadora.
Compara tus respuestas con las de la clave; en caso de error, rectifica tus procedimientos.

CLAVE

$sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tan\ 45° = 1$

$cot\ 45° = 1$ $sec\ 45° = \sqrt{2}$ $cos\ 45° = \sqrt{2}$

$sen\ 45° = \frac{2}{2.8284} = 0.7071$ $cos\ 45° = \frac{2}{2.8284} = 0.7071$ $tan\ 45° = \frac{2}{2} = 1$

$cot\ 45° = \frac{2}{2} = 1$ $cos\ 45° = \frac{2.8284}{2} = 1.4142$ $sec\ 45° = \frac{2.8284}{2} = 1.4142$

103
148 - 3

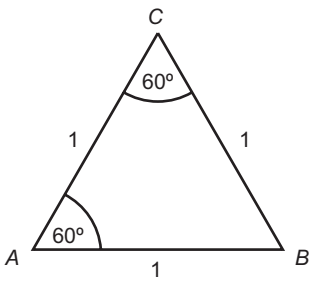
SE COMPLEMENTAN

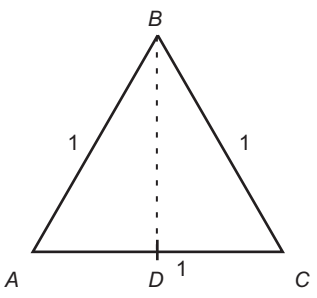
Seno, coseno y tangente de 30º y 60º
Obtención de las funciones seno, coseno y tangente de 30º y 60º

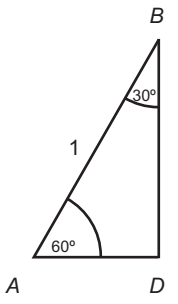
Con tu grupo, haz las construcciones que te ayudan a encontrar las funciones seno, coseno y tangente de los ángulos 30º y 60º.

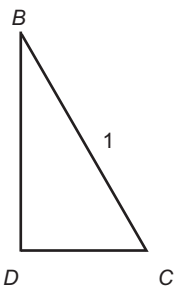
1. Dibuja un triángulo equilátero de lado 1 unidad.

   Traza la altura sobre uno de los lados, obtienes dos triángulos rectángulos congruentes: $\Delta\, ADB$ y $\Delta\, DCB$









   Observa el triángulo ADB

   Ángulo $A = 60°$ Ángulo $B = 30°$

   La hipotenusa mide 1, el cateto AD mide $\frac{1}{2}$, ¿cuánto mide el cateto BD?

   El teorema de Pitágoras te permite calcular BD.

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$

$$(BD)^2 = (AB)^2 - (AD)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$BD = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Calcula *sen 60°*, *cos 60°* y *tan 60°*

$$sen\ 60° = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ \ hipotenusa} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = \frac{medida\ cateto\ adyacente}{medida\ \ hipotenusa} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$tan\ 60° = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ adyacente} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

3. El mismo triángulo te sirve para calcular *sen 30°*, *cos 30°* y *tan 30°*. Fíjate bien cuál es el cateto opuesto al ángulo de *30°* y cuál el adyacente y encuentra:

sen 30°, *cos 30°* y *tan 30°*.

Compara tus resultados con los de tus compañeros(as).

Con tu grupo.

1. Con los valores que ya has encontrado completa una tabla como la siguiente:

	sen	***cos***	***tan***	***sec***	***csc***	***cot***
30°	$\frac{1}{2}$					
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$			

Con la ayuda de estos datos visualiza relaciones entre las funciones de $30°$ y las de $60°$, así:

$sen\ 30° = cos\ 60°$

$cos\ 30° = sen\ 30°$

$tan\ 30° =$

$sec\ 30° =$

$csc\ 30° =$

2. La observación anterior nos permite generalizar las relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos complementarios, es decir cuando se tiene que $ángulo\ A + ángulo\ B = 90°$, como en el caso de $30°$ y $60°$.

$30° + 60° = 90°$ $\quad => 60° = 90° - 30°$

$\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$ $\quad => \measuredangle B = 90° - \measuredangle A$

Completa las expresiones de estas relaciones:

sen A = cos (90º – A) como sen 30º = cos (90º – 30º)

cos A = sen (90º – A)

tan A =

sec A =

csc A =

cot A =

Relaciones como las anteriores son importantes en la resolución de problemas.

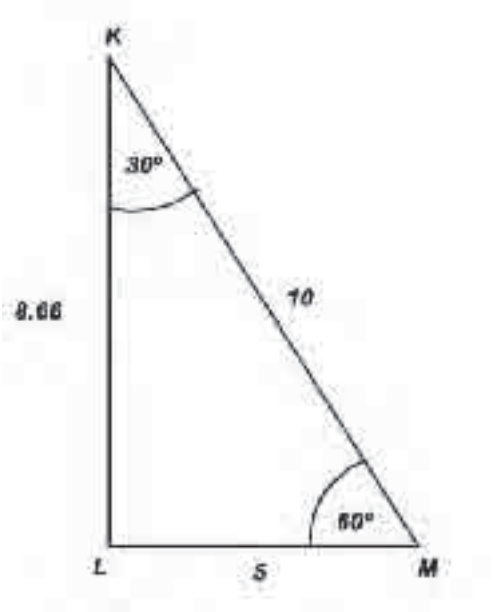
Observa con atención el video. Te harás una buena imagen de lo que has aprendido.

En forma individual, resuelve lo que se pide en cada caso.

1. Escribe las funciones complementarias o cofunciones de las siguientes funciones trigonométricas:

sen 30° =	*csc 60°* =
cos 60° =	*cot 30°* =
tan 30° =	*sec 60°* =

2. Con base en el triángulo que se presenta, determina el valor de las funciones seno, coseno y tangente correspondientes a los ángulos de 30° y 60°.



Compara tus respuestas con las de la clave; si tienes dudas, pregunta al profesor(a).

CLAVE

1. $sen\ 30° = cos\ 60°$ $\quad cos\ 60° = sen\ 30°$ $\quad csc\ 60° = sec\ 30°$ $\quad cot\ 30° = tan\ 60°$ $\quad tan\ 30° = cot\ 60°$ $\quad sec\ 60° = csc\ 30°$

2. $sen\ 30° = \frac{5}{10} = 0.5$ $\quad cos\ 30° = \frac{8.66}{10} = 0.866$ $\quad tan\ 30° = \frac{5}{8.66} = 0.5773$

$sen\ 60° = \frac{8.66}{10} = 0.866$ $\quad cos\ 60° = \frac{5}{10} = 0.5$ $\quad tan\ 60° = \frac{8.66}{5} = 1.732$

104
150 - 3

AHORRA TIEMPO Y ESFUERZO

Funciones de la calculadora
Manejo de la calculadora en la obtención de funciones trigonométricas

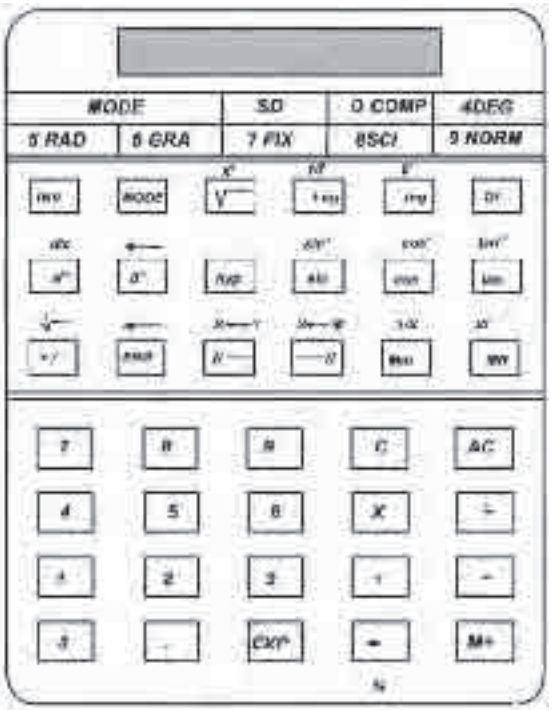
Observa con atención el video; en él aprenderás a manejar la calculadora científica para obtener los valores de las funciones trigonométricas.

Con tu grupo y con ayuda de la calculadora lee y analiza el siguiente texto.

FUNCIONES EN LA CALCULADORA

La calculadora “científica” es una herramienta muy útil para los temas de trigonometría, ya que con ella se ahorra mucho tiempo y esfuerzo en el cálculo de los valores de las funciones trigonométricas, sea que se conozca el ángulo o el valor de una función.

Existen muchas clases de calculadoras “científicas” que realizan diversos tipos de funciones. En este caso, se verá el uso de una de las más sencillas, ya que sólo se manejarán las funciones trigonométricas. Generalmente, las calculadoras de este tipo son como la que se presenta a continuación:



Las teclas que se usan para las funciones trigonométricas son las siguientes:

sin-1		cos-1		tan-1				1/X
sin	,	cos	,	tan	,	º’’’	,	INV	MIN

Ejemplos:

1. Hallar el valor natural de sen 45º

   Para encontrar el valor del sen 45º, se teclea:

   4 5 sin = 0.7071

2. Hallar el valor natural del cos 30º 45'

   Se teclea:

   3 0 º’’’ 4 5 º’’’ cos = 0.8594

3. Hallar el valor natural de la tan 60º 25'

   Se teclea:

   6 0 º’’’ 2 5 º’’’ tan = 1.7615

4. Hallar el ángulo cuyo seno es 0.3420

   Se teclea:

   * 3 4 2 0 INV sin INV º’’’

   = 19º 59'

Con la tecla INV, se pueden accionar las funciones 1/x, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ y [o’’’] , que es la tecla que convierte la cantidad en grados, minutos y segundos. Obsérvese que las funciones 1/x, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ se encuentran en la parte superior de las

teclas [MIN ,] [sin ,] [cos] y [tan]

5. Hallar el ángulo cuyo coseno es 0.0145

Se teclea:

[*] [0] [1] [4] [5] [INV] [cos] [INV] [o’’’]

= 89º 10'

6. Hallar el ángulo de la tan C = 5.769

Se teclea:

[5] [.] [7] [6] [9] [INV] [tan] [INV] [o’’’]

= 80º 09'

7. Hallar el valor natural de la cot 50º

En este caso, la calculadora no tiene la función cotangente, pero se pueden utilizar las funciones recíprocas. Recuérdese que:

$$sen\ A = \frac{1}{csc\ A};\ cos\ A = \frac{1}{sec\ A};\ tan\ A = \frac{1}{cot\ A}$$

Por consiguiente, $cot\ 50° = \frac{1}{tan\ 50°}$

Se teclea: 1/x

[5] [0] [tan] [INV] [MIN] = 0.8390

Por lo tanto, cot 50º = 0.8390

1/x

En la tecla | MIN | , la función que se está aplicando es 1/x.

8. Hallar el valor natural de la sec 60º.

Utilizando las funciones recíprocas, se tiene que:

$$sec\ 60° = \frac{1}{cos\ 60°}$$

Empleando la calculadora, se teclea:

1/x

6	0	cos	INV	MIN	= 2

9. Hallar el valor natural de la csc *80° 15'*

Utilizando las funciones recíprocas, se tiene que:

$$csc\ 80° 15' = \frac{1}{sen\ 80° 15'}$$

Empleando la calculadora, se teclea:

1/x

8	0	º’’’	1	5	º’’’	sen	INV	MIN

= 1.0146

Por lo tanto, *csc 80° 15' = 1.0146*

10. Hallar el ángulo cuya cotangente es: 0.2805

Utilizando las funciones recíprocas, se tiene que:

$$cot\ B = 0.2805 = \frac{1}{tan\ B} = \frac{1}{0.2805}$$

Empleando la calculadora, se teclea:

*	2	8	0	5	INV	MIN	INV	tan	INV	º'''	= 74º 19'

De esta manera, se puede concluir que:

Para el buen manejo de las funciones trigonométricas, la calculadora es una de las herramientas más útiles, pues ahorra tiempo y esfuerzo.

Con tu grupo. Realiza ejercicios que te permitan practicar el manejo de la calculadora.

1. Propón ángulos para hallar sus funciones trigonométricas.

2. Propón posibles valores de las funciones para buscar a qué ángulos pertenecen.

Si tienes dudas, consulta con tus compañeros(as) y el profesor(a).

105
152 - 3

SIN INSTRUMENTOS

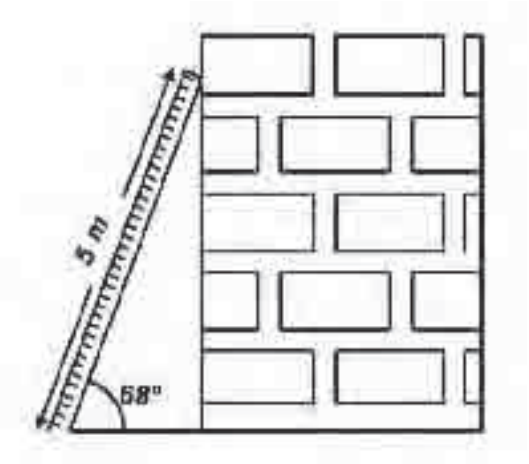
Seno en un triángulo rectángulo
Resolución de triángulos rectángulos aplicando la función seno

¿Cuántas distancias existen que no podemos medir con los instrumentos que tenemos a la mano? ¿Qué se puede hacer en esos casos?

Con tus compañeros(as). Las razones trigonométricas que has estudiado son una poderosa herramienta para resolver problemas. Según los datos que conozcas podrás aplicar unas u otras. Escogerás la que te permita el camino más sencillo.

Analiza y resuelve.

1. ¿Qué altura alcanza una escalera de 5 m apoyada sobre un muro, si forma con el piso un ángulo de 68º?



Fíjate que puedes considerar un triángulo rectángulo en el que la altura corresponde al cateto opuesto al ángulo dado y la longitud de la escalera representa la hipotenusa.

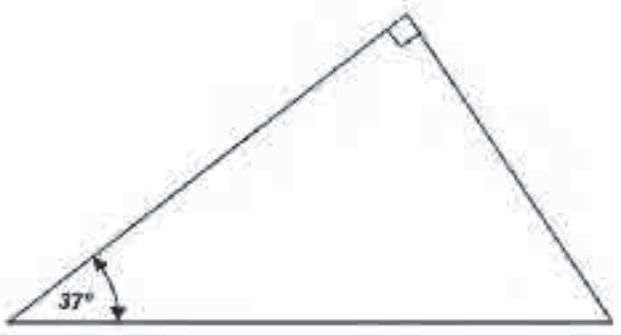
¿Qué razón trigonométrica te permite calcular la altura sobre el muro?

Busca su valor en la calculadora.

2. Una etapa de la vuelta a Colombia parte de una ciudad A que está a 450 m sobre el nivel del mar y llega a otra ciudad B, a una altura de 1900 m. Si la etapa tiene una longitud de 216 km y si además simplificamos el recorrido como si fuera en línea recta, qué ángulo deben vencer los ciclistas en la etapa?

¿Qué opinas respecto al tamaño de este ángulo en relación con el esfuerzo que tienen que hacer los ciclistas para vencer la diferencia de altura en la etapa?

3. Si sólo dispones de una regla graduada y de un dibujo de un triángulo como el siguiente, ¿cómo calculas el sen 37º?



4. Si el cos $72° \simeq 0.31$ ¿cómo calculas sen 18º sin usar tablas o calculadora? Explica.
5. Si el cos $15° \simeq 0.97$ ¿cómo calculas sen 15º sin usar tabla o calculadora? Explica

Compara tu trabajo con el de otros compañeros(as). Si no coinciden tus resultados argumenta para llegar a acuerdos.

Observa con atención el video.

Organiza una discusión con tus compañeros(as) sobre los aspectos que encuentras más relevantes en el video anterior y ejemplifícalos.

106
153 - 3

MEDIDA INDIRECTA

Coseno en un triángulo
Resolución de triángulos rectángulos aplicando la función coseno

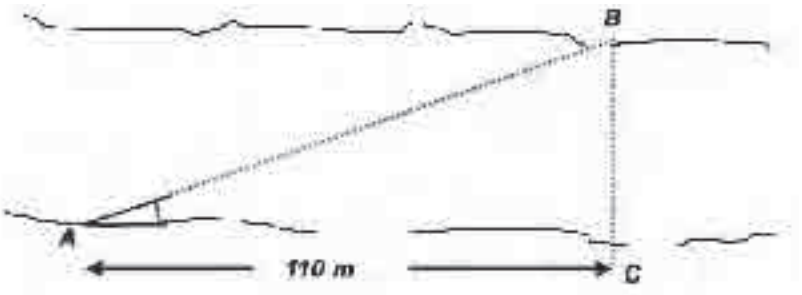
Cuando se desea calcular distancias muy grandes que sería imposible medir directamente, se recurre a métodos de medición indirecta, entre ellos se encuentra la función coseno.

Ve atentamente el video y observa algunas situaciones que se resuelven con la función coseno.

Trabaja con tu equipo en la resolución de las situaciones planteadas.

1. Los amigos de Romeo quieren ayudarlo a conseguir una escalera suficientemente larga para alcanzar la ventana de su amada. Tienen algunos datos que pueden ayudar a Romeo en sus cálculos. Para que el perro amarrado en la puerta, con una cadena de cerca de 4 m no lo muerda, los amigos le aconsejan colocar una escalera 5 m de la puerta, también han averiguado que con una inclinación de 65º se puede ver la ventana. ¿Qué tan larga debe ser la escalera para que Romeo alcance la ventana de su amada?

2. Un nadador se propone atravesar a nado un río. Parte de la orilla en el punto A. Un compañero se desplaza a lo largo de la orilla opuesta, tratando de estar frente al nadador en todo momento. Cuando éste llega a B, su compañero ha avanzado, hasta el punto C, una distancia de 110 m.



El ángulo entre el margen de la orilla y la visual de AB es aproximadamente 25º. ¿Qué distancia AB cubrió el nadador?

3. ¿Cómo podrías explicarle a un compañero que el $sen\ 45° = cos\ 45°$? Haz los dibujos necesarios y escribe tu explicación.

4. ¿Cómo explicarías a alguien que cuando el seno de un ángulo es 0, su coseno es igual a 1?

5. ¿Por qué si uno de tus compañeros calculó el coseno de un ángulo y obtuvo el valor 1.5 tú estás seguro de que su procedimiento fue incorrecto? Explica.

Invita a tus compañeros(as) y al profesor(a) a una plenaria en la que entre todos analicen y corrijan sus trabajos. Aclara las dudas que puedas tener y las de tus compañeros(as).

107
154 - 3

ENTRE CATETOS

Tangente en un triángulo rectángulo
Resolución de triángulos rectángulos aplicando la función tangente

Aquí puedes comprobar que los caminos para solucionar un problema pueden ser varios y que los conocimientos aprendidos con anterioridad son muy útiles para lograrlo.

Observa con atención el video, el cual sugiere caminos en la solución de problemas.

Cuando es posible, la tangente es una excelente herramienta para estas soluciones.

Anima a tus compañeros(as) a trabajar en la solución de los siguientes problemas.

En matemáticas es muy importante encontrar las estrategias más sencillas para esta labor.

1. Un aviso de carretera muestra la siguiente señal.

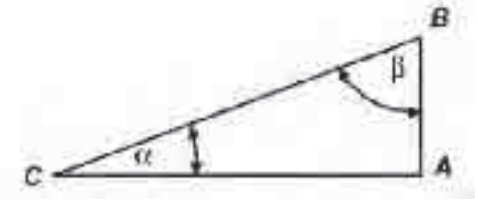
Una pendiente de 15% significa que por cada 100 m recorridos el desnivel aumenta 15 m.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

b) Si el desnivel se mantiene durante un trayecto de 680 m, ¿cuántos metros se habrá subido en vertical?

2. En un triángulo rectángulo sabemos que:

AB = 6 y que tan α = 0.2



Calcula:

a) Las longitudes de los otros dos lados.

b) La $tan\ \beta$

3. Unos niños quieren medir la altura de la torre de la iglesia de su pueblo, para lo cual proponen la siguiente estrategia. Uno de ellos sostiene una tabla de tal manera que el lado AB permanezca horizontal, paralelo al suelo.

Otro niño señala sobre la tabla la visual que desde A le permite ver la parte más alta de la torre, formando el ángulo CAB de $25°$. Miden la distancia de la parte más baja de la tabla al suelo: 90 cm; y la distancia de donde están hasta la iglesia: 100 m.

Calcula: a) la $tan\ 25°$ y la altura de la torre de la iglesia. ¿Para qué utilizas el dato de la altura a la cual está la tabla del suelo?

4. De un triángulo isósceles se conoce su lado desigual que mide 12 cm y los ángulos iguales miden 70º cada uno. Calcula su área y su perímetro.

5. Si $sen\ \alpha = 0.8$, calcula $cos\ \alpha$ y $tan\ \alpha$.

Con tus compañeros(as) y en plenaria analiza el trabajo realizado. Socializa las estrategias en la solución de los problemas anteriores. Si tienes errores busca la aclaración oyendo y atendiendo las sugerencias que te hagan tus compañeros(as) y el profesor(a).

108
155 - 3

RESUÉLVELOS TÚ MISMO

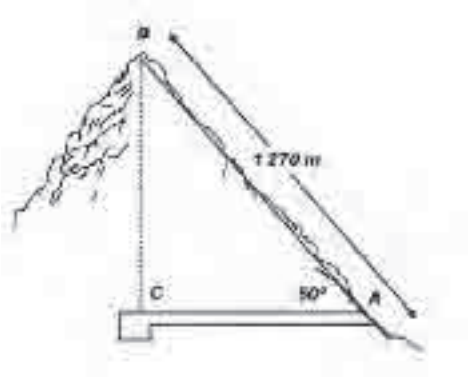
Distancias inaccesibles
Resolución de problemas sobre el cálculo de distancias inaccesibles

Lo importante del estudio de la trigonometría es su aplicación en la resolución de diversos problemas. Por ejemplo, el cálculo de distancias, alturas o profundidades de difícil acceso. En esta sesión pondrás en práctica tu capacidad para plantear y resolver problemas aplicando las funciones trigonométricas.

Observa con interés el video, ya que te proporcionará elementos con los cuales podrás plantear y resolver problemas de distancia inaccesibles, aplicando las razones trigonométricas. Al terminar, disipa tus dudas, planteándoselas al profesor(a).

Forma un equipo, como lo indique el profesor(a), para resolver el siguiente problema. Realiza las actividades que se indican, hasta que llegues a la solución.

- Una veta se encuentra en el centro de una montaña; si se sabe que su pendiente es de 50º y la distancia del punto en donde se iniciará la excavación hasta la cima es de 1 270 m, ¿qué distancia debe perforarse para llegar a la veta?



¿Qué función trigonométrica relaciona el ángulo conocido A, la distancia AB (1270 m) y la distancia buscada AC?

a) Escribe la razón trigonométrica que propones.

b) Despeja de la igualdad que escribiste el valor desconocido AC.

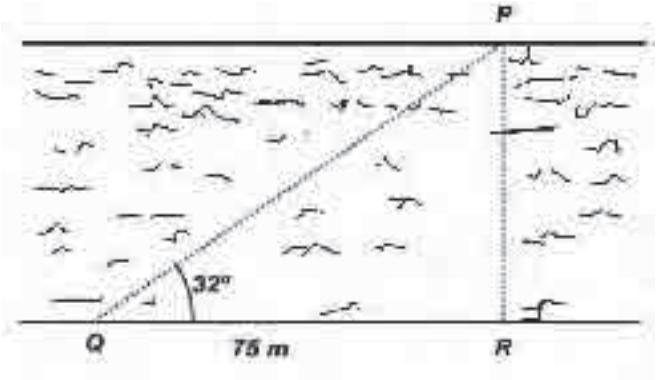
c) Halla la distancia AC solicitada.

¿Cuál es entonces la distancia que debe perforarse para llegar a la veta?

Compara tus procedimientos con los realizados por otro equipo.

Reúnete con un compañero(a) y resuelve en tu cuaderno el problema siguiente. Observa con cuidado la figura.

El ángulo < PQR mide 32º y la distancia entre Q y R es de 75 m, ¿cuál es el ancho del río?



Discute tus procedimientos con tus compañeros(as).

Resuelve individualmente en tu cuaderno los problemas siguientes. Te sugerimos hacer el dibujo que contenga los elementos del enunciado.

a) Desde lo alto de un faro de 34 m de altura sobre el nivel del mar, se observa un barco, bajo un ángulo de depresión de 11º, ¿a qué distancia se encuentra el barco de la base del faro a nivel del mar?

b) ¿Qué distancia ha recorrido un avión al momento de tirar un paquete a una altura de 310 m, si se elevó con un ángulo de 19º?

Compara tus resultados con los de la clave, si son diferentes pide una explicación a tu profesor(a) y corrige lo necesario.

CLAVE

a) 175 m; b) 900.3 m

109
156 - 3

COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

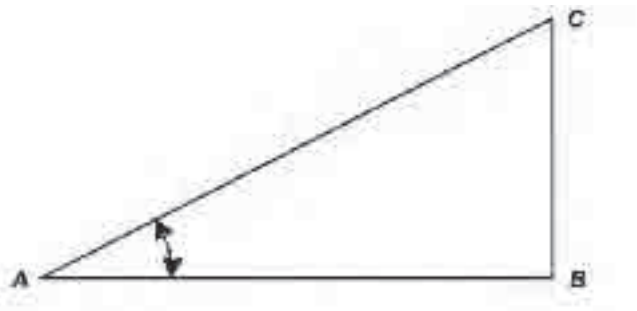
Valoración de los conocimientos adquiridos
Integración de lo desarrollado en el núcleo

Ha llegado el momento de reflexionar sobre lo aprendido en este núcleo para identificar y disipar las dudas que tengas. De esta manera conocerás más a fondo el interesante tema de la trigonometría, y así podrás obtener éxito en tu próxima evaluación.

Observa el video con atención, éste presentará las ideas más importantes desarrolladas en el núcleo. Si tienes dudas acláralas con tu maestro(a) y con tus compañeros(as).

Trabaja con tu equipo.

1. En un triángulo rectángulo, ¿cómo te refieres a cada uno de sus lados respecto al ángulo α?



2. ¿Qué nombre le das a cada una de las razones definidas?

   a) Razón que se establece como cociente entre las medidas del cateto adyacente y la hipotenusa.

   b) Razón que se establece como cociente entre las medidas del cateto opuesto y el cateto adyacente.

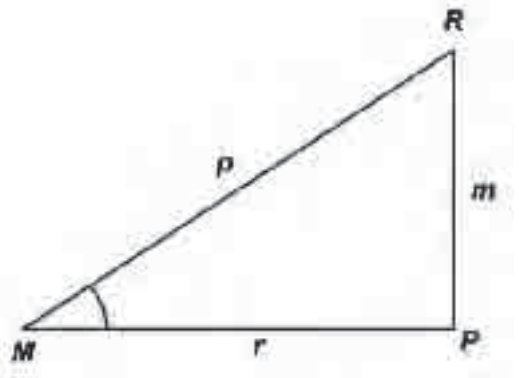
   c) Razón que se establece como cociente entre las medidas de la hipotenusa y el cateto adyacente.

d) Razón que se establece como cociente entre las medidas del cateto opuesto y la hipotenusa.

e) Razón que se establece como cociente entre las medidas del cateto adyacente y el cateto opuesto.

f) Razón que se establece como cociente entre las medidas de la hipotenusa y el cateto opuesto.

3. Observa la siguiente figura y escribe las expresiones que definen cada una de las funciones trigonométricas en relación con el ángulo M.



a) sen M

b) cos M

c) tan M

d) cot M

e) sec M

f) csc M

4. Completa la siguiente tabla con los valores de las funciones trigonométricas de 30º, 45º y 60º (utiliza dibujos de triángulos para hacer los cálculos).

Función	30º	45º	60º
Sen			
Cos			0.5
Tan			

En forma individual resuelve los ejercicios siguientes.

5. Utiliza la calculadora para encontrar los valores de las funciones trigonométricas que correspondan a los siguientes ángulos:

a) sen 16°

b) tan 20° 35′

c) cos 58° 50′

d) cot 84° 10′

e) sen 72° 30′

f) cos 8° 52′

6. Encuentra los ángulos correspondientes a las siguientes razones trigonométricas. Usa la calculadora.

a) sen $\alpha = 0.9171$

b) cos $\beta = 0.2540$

c) tan $\chi = 3.689 =$

7. Resuelve en tu cuaderno el siguiente problema; recuerda lo conveniente que es hacer el dibujo de los elementos del enunciado.

Sobre una pared se apoya un vidrio formando un ángulo de 75º con el piso. Si se sabe que el vidrio mide 1.90 m de largo, ¿cuál es la distancia de la pared a la base de vidrio?

Consulta la clave, una vez que hayas terminado, para verificar tus resultados; en caso de duda, pide ayuda a tu profesor(a).

CLAVE

1. $\overline{AB}$ = cateto opuesto $\overline{OB}$ = cateto adyacente $\overline{OA}$ = Hipotenusa

2. 1. *C*), 2. *D*), 3. *F*), 4. *E*), 5. *A*), 6. *B*)

3. a) $sen\ M = \frac{m}{p}$ b) $cos\ M = \frac{r}{p}$ c) $tan\ M = \frac{m}{r}$ d) $cot\ M = \frac{r}{m}$

e) $sec\ M = \frac{p}{r}$ f) $csc\ M = \frac{p}{m}$

110
157 - 3

¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

Demostración del aprendizaje logrado
Evaluación personal de los avances logrados

Estás por terminar el penúltimo núcleo, y ha llegado el momento en que demuestres, mediante la aplicación directa de tus conocimientos de trigonometría, que has superado las dificultades de aprendizaje.

Observa con interés el video y realiza, según sus indicaciones, el siguiente ejercicio.

A	*B*	*C*
D	*E*	*F*
G	*H*	*I*

1. Coseno
2. Tangente
3. Secante
4. Seno y cosecante
5. Seno
6. Tangente y cotangente

4.

Función	30°	45°	60°
Sen	0.5	0.7071	0.8660
Cos	0.8660	0.7071	0.5
Tan	0.5773	1	1.732

5.

0.2756
0.3755
0.5175
0.1021
0.9537
0.9880

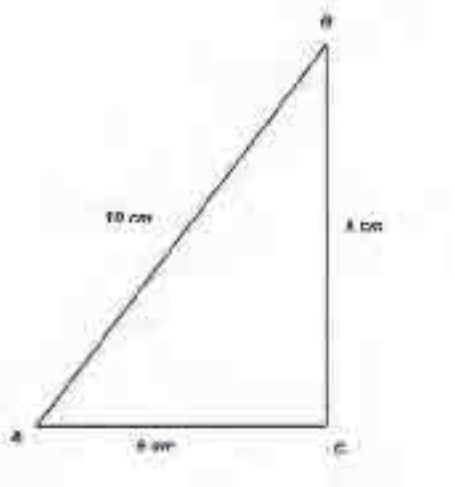
6. a) ∡ A 65° 56'; b) ∡ B 75° 17'; c) ∡ C 74° 50'

7. 0.49 m

7. Cotangente
8. Secante y cosecante
9. Cosecante

Resuelve individualmente los ejercicios que se presentan a continuación.

1. Dado el triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm y la hipotenusa 10 cm, calcula las razones trigonométricas del ángulo A.



a) $sen\ A =$

b) $cos\ A =$

c) $tan\ A =$

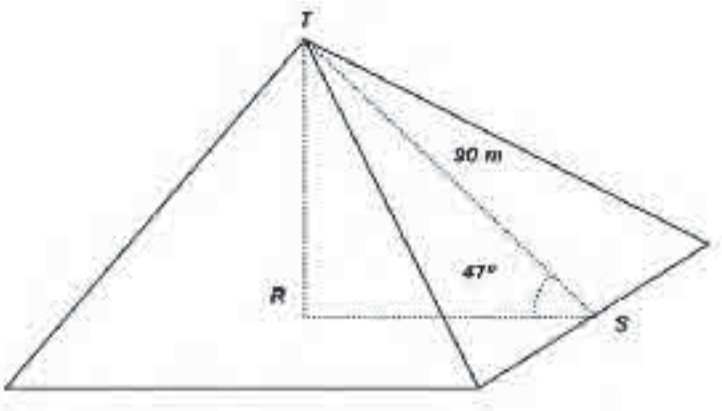
d) $cot\ A =$

e) $sec\ A =$

f) $csc\ A =$

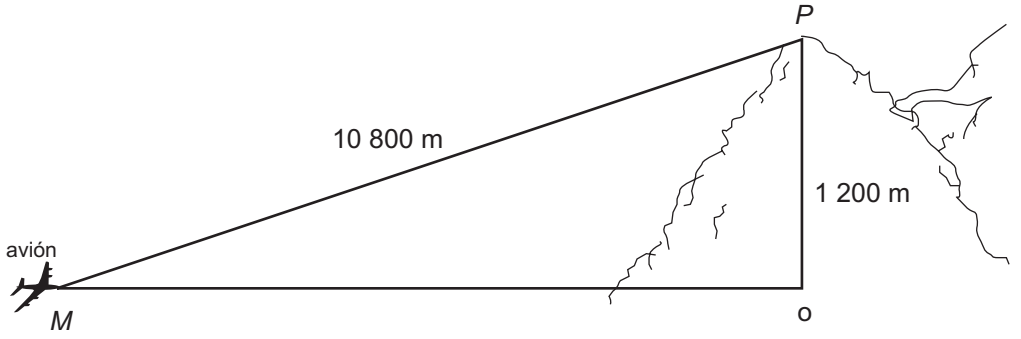
2. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas:

a) observa el dibujo de la siguiente pirámide. Si la distancia de T a S es de 90 m y el ángulo $< TSR$ es de 47º, ¿cuál es la altura de la pirámide?

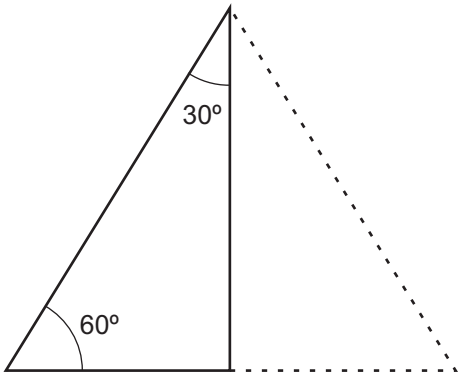


b) Si un avión que va a efectuar un vuelo normal se encuentra a 10 800 m de una cima, cuya altura es de 1 200 m, ¿con qué ángulo mínimo de elevación tiene que despegar para evitar un choque con dicha cima?

Observa el dibujo.



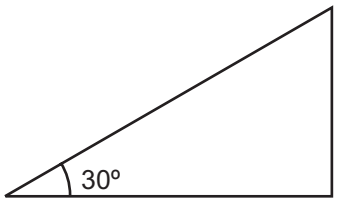
3. En un triángulo rectángulo con un ángulo de 60º completa por simetría un triángulo equilátero, así que el cateto adyacente a 60º mide la mitad de la hipotenusa.



a) Analiza por qué cos 60º = $\frac{1}{2}$

b) Calcula sen 60º y tan 60º

4. Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º.



a) Observa que puedes completar por simetría un triángulo equilátero.

b) ¿Por qué sen 30 = $\frac{1}{2}$?

c) Calcula cos 30º y tan 30º.

5. ¿Puede existir algún ángulo cuyo seno valga 2?

Explica.

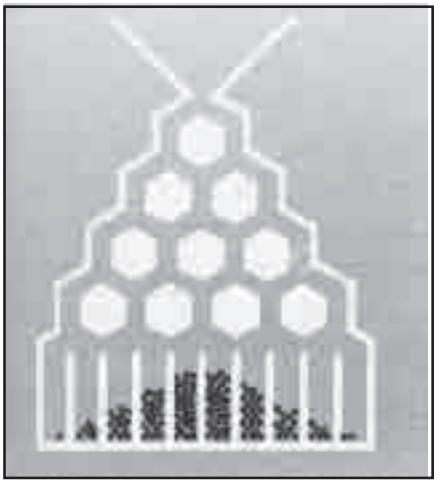
6. ¿Cómo puedes hallar las razones trigonométricas de un ángulo si conoces las de su complementario? Así, si $sen\ 43° = 0.68$, $cos\ 43° = 0.73$, $tan\ 43° = 0.93$, ¿cómo calculas seno, coseno y tangente de 47º.

Al terminar tu evaluación, espera indicaciones de tu profesor(a) para revisar tus respuestas, no olvides corregir lo necesario.

Pide a tu profesor(a) que te explique la característica del cuadrado del ejercicio 1 de tu evaluación; si el tiempo te lo permite, acomoda los números de diferente forma sin perder la característica.

Núcleo Básico 8

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD



Muchos acontecimientos de la vida cotidiana están cargados de incertidumbre. «¿Lloverá hoy?», «¿Ganará Montoya la próxima carrera?», «¿Llegaré a tiempo a mi cita?».

A este tipo de acontecimientos, cuya realización depende del azar los llamamos sucesos aleatorios. *Alea*, del latín, significa dado, suerte, azar...

La teoría de probabilidad nos da la posibilidad de medir hasta qué punto se puede esperar que ocurra un suceso. A esta medida la llamamos su probabilidad.

En este núcleo avanzarás en el estudio de la probabilidad de que ocurra uno de dos eventos, de la probabilidad condicional y aprenderás cómo la simulación de problemas es una estrategia para hacer predicciones sobre una situación, entre otros temas.

111

171 - 3

¡CARA O SELLO!

Probabilidad de que ocurra uno de dos eventos
Obtención de su probabilidad

Cuando se lanza una moneda al aire generalmente se pide que salga «Cara o Sello». En este caso se puede determinar la probabilidad de que salga una de las dos opciones, pero cuando se pregunta ¿cuál es la probabilidad de que no salga cara?, parece un poco extraña la pregunta, pero aprenderemos a encontrar su respuesta.

Con tu grupo de trabajo, lee, analiza y sigue los desarrollos del siguiente texto:

PROBABILIDAD DE QUE OCURRA UNO DE DOS EVENTOS

Algunos de los conceptos que aborda esta lectura ya son conocidos de los cursos anteriores. A partir de ellos construirás otros nuevos.

Piensa en la experiencia aleatoria de lanzar una moneda, ¿qué posibilidades pueden ocurrir?

La moneda puede caer ***cara*** o ***sello***.

A cada uno de estos sucesos se le llama ***suceso elemental.***

Si la moneda no está alterada suponemos que los dos sucesos son equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad, y para el cálculo de cada suceso elemental recurrimos a la Ley de Laplace, que ya conoces y que se puede expresar como:

$$P\,(\text{cada suceso elemental}) = \frac{1}{\text{número de sucesos elementales}}$$

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$$

Del análisis de esta experiencia se puede llegar a deducir propiedades importantes de la probabilidad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de todos los sucesos elementales asociados a un experimento?

En el caso del lanzamiento de la moneda hay dos sucesos elementales posibles: cara y sello.

$$P(cara) + P(sello)$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Concluimos:

> La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio es ***1.***

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un ***suceso contrario*** al esperado?

En el caso de la moneda, salir y no salir cara son contrarios, ¡pero no salir cara es salir sello!

$$P(cara) + P(no\ salir\ cara) =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Se concluye entonces:

> Si dos sucesos S y S' son contrarios, se cumple que $P(s)+ P(s') = 1.$
>
> Si se conoce la probabilidad de un suceso es entonces fácil calcular la probabilidad de su contrario:
>
> $$P(s') = 1- P(s)$$

Veamos otro experimento aleatorio para comprobar las dos propiedades que hemos deducido.

En el lanzamiento de un dado, ¿cuáles son los sucesos elementales posibles?

Son seis: sacar 1, sacar 2, sacar 3, sacar 4, sacar 5 y sacar 6.

Si el dado es correcto, cada uno de estos sucesos es equiprobable, entonces:

$$P(1) = \frac{1}{6}, \quad P(2) = \frac{1}{2}, \quad P(3) = \frac{1}{6} \cdots$$

¿Cuál es la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales?

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

¿Cuál es la probabilidad de no sacar ***3***?

Esta pregunta puede contestarse de dos maneras

- Si s es sacar 3

  s' es no sacar 3

  s' es sacar 1, sacar 2, sacar 4, sacar 5 o sacar 6.

  $$P(s') = P(1) + P(2) + P(4) + P(5) + P(6)$$

  $$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

  $$P(s') = P(no \quad sacar \quad 3) = \frac{5}{6}$$

- Si s es sacar 3 y $P(s) = \frac{1}{6}$

  $$P(s') = 1 - P(s)$$

  $$P(no \quad sacar \quad 3) = 1 - P(sacar \quad 3)$$

  $$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Con este ejemplo hemos comprobado las dos propiedades establecidas para la probabilidad.

Ahora puedes resolver un problema como el siguiente:

Al estar en una tienda de aparatos eléctricos, Arturo observó que se rifaba una radiograbadora y que únicamente eran 50 boletos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arturo gane la radiograbadora si compra dos boletos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no gane?

Primero tienes que establecer cuántos sucesos elementales tiene este experimento. Es decir:

¿Cuál es el ***espacio muestral***?

¿Cuántos de esos sucesos son favorables para Arturo, si ha comprado 2 boletos?

Con estas definiciones ya puedes calcular la probabilidad de que Arturo gane la radiograbadora.

$$P(A\ gane) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

Y, ¿cuál es la probabilidad de que Arturo no gane?

$$\begin{aligned} P(A\ \ no\ \ gane) &= 1 - P(A\ \ gane) \\ &= 1 - \frac{1}{25} \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$

Con tus compañeros(as) observa el video y discute con ellos los aspectos más relevantes.

Con un compañero(a) contesta las siguientes preguntas:

1. Cómo interpretas la expresión

$$P(no\ A) = 1 - P(A)$$

2. Con un ejemplo comprueba la expresión anterior calculando de dos formas diferentes la probabilidad de que no ocurra un evento.

Socializa tu trabajo con otros compañeros(as).

Continúa con tu compañero(a), y resuelve el siguiente problema.

En un torneo de basquetbol participan 10 equipos, de los cuales tres son de la zona del Pacífico, cinco de la zona del centro y dos de la zona norte, determina lo siguiente:

¿Cuál es la probabilidad de que gane el torneo un equipo:

a) del centro b) del norte c) del Pacífico?

¿Cuál es la probabilidad de que no lo gane un equipo:

a) del centro b) del norte c) del Pacífico?

Compara tus resultados con los de otro equipo; en caso de ser diferentes, consulta al profesor(a).

Individualmente resuelve en tu cuaderno el siguiente problema.

Una persona va a comprar un automóvil y en la concesionaria le comentan que con el dinero con que cuenta puede adquirir un automóvil de cualquiera de las siguientes marcas: Chrysler, Chevrolet, Ford, BMW, Nissan.

¿Cuál es la probabilidad de que adquiera:

a) un Ford b) un Chrysler?

¿Cuál es la probabilidad de que no adquiera:

b) un Nissan d) un Chevrolet?

Compara tus respuestas con las de la clave; si son diferentes, revisa tus procedimientos.

CLAVE

a) $P(A) = \frac{1}{5}$ b) $P(B) = \frac{1}{5}$ c) $P(C) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

d) $P(D) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

112
172 - 3

MÁS PROBABLE

Probabilidad de eventos combinados
Regla de la suma
Cálculo de probabilidades en eventos combinados

Al solucionar un problema puede suceder que se haga bien o que esté mal resuelto. Esto indica que únicamente puede suceder que ocurra una de las dos situaciones. En esta sesión se verá la forma de calcular la probabilidad de dos eventos que se excluyen entre sí.

Con tu grupo realiza el siguiente trabajo.

1. Al lanzar un dado

   a) ¿Cuáles sucesos elementales pueden ocurrir?

   b) ¿Cuál es entonces el espacio muestral?

2. Si el suceso que esperamos es que salga un número menor o igual que 4,

   ¿cuántos y cuáles sucesos elementales nos son favorables?

3. Conoces ya la expresión que nos permite calcular la probabilidad cuando los sucesos elementales son equiprobables.

$$P(s) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Calcula la probabilidad de obtener un número menor o igual a 4 en el lanzamiento de un dado.

4. Calcula las siguientes probabilidades en el experimento de lanzar un dado

$P(sacar\ 1) =$

$P(sacar\ 2) =$

$P(sacar\ 3) =$

$P(sacar\ 4) =$

Calcula la suma de las probabilidades que calculaste

$P(Sacar\ 1) + P(sacar\ 2) + P(sacar\ 3) + P(sacar\ 4)$

5. Compara la probabilidad calculada en 3 con la suma de las probabilidades obtenida en 4.

¿Qué observas?

¿Estarías de acuerdo con la siguiente afirmación?

> La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que la componen.

Discute con tus demás compañeros(as) las conclusiones a que has llegado.

Observa con atención el video. Quizá éste te resuelva dudas que tengas sobre el tema.

Con tus compañeros(as) lee y analiza el siguiente texto:

PROBABILIDAD DE EVENTOS COMBINADOS. REGLA DE LA SUMA

En una caja se tienen diez tarjetas numeradas del *1* al *10*, se extrae una y se quiere determinar:

a) La probabilidad de extraer una tarjeta que tenga el número *4*.

b) La probabilidad de sacar el número *9*.

c) La probabilidad de elegir al número *4* ó *9*.

Observa que *a*) y *b*) se pueden resolver fácilmente:

Para resolver *a*) se tiene:

$n(s) = 10$, ya que es el número de tarjetas.

$n(A) = 1$, pues sólo hay una tarjeta con el número *4*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{1}{10}$$

La probabilidad de que la tarjeta que se extraiga tenga el número 4 es de $\frac{1}{10}$

Para b) la probabilidad es similar.

$$n(s) = 10$$
$$n(B) = 1$$
$$P(B)\frac{n(B)}{n(s)} = \frac{1}{10}$$

La probabilidad de extraer una tarjeta que tenga el número 9 es de $\frac{1}{10}$

En c) se pide la probabilidad de que la tarjeta que se extraiga tenga el número 4 ó el número 9. Cuando esto sucede, se suman las probabilidades de los eventos ya que «extraer 4» excluye la probabilidad de «extraer 9», esto es:

$$P(C) = P(A) + P(B)$$
$$P(C) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$
$$P(C) = \frac{2}{10}$$
$$P(C) = \frac{1}{5}$$

Esta probabilidad indica que puede suceder uno de los dos eventos mutuamente excluyentes; esto es, que salga la tarjeta con el número 4 ó con el número 9.

Se puede concluir que:

> Cuando dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente al realizar un experimento, se dice que éstos son ***mutuamente excluyentes*** o independientes y para terminar la probabilidad de dos eventos de este tipo ***se suman*** las ***probabilidades*** de que ocurra cada evento.

Con tu equipo y con base en el problema que se plantea enseguida, resuelve:

Al preguntar a diez personas qué tipo de música les gusta oír, contestaron lo siguiente:

Dos personas, música tropical; tres personas, música rock; cuatro personas, música norteña y una persona música romántica.

¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

¿Cuál es la probabilidad de que una persona oiga música:

a) norteña b) tropical c) rock d) romántica?

¿Cuál será la probabilidad de que alguna de estas personas oiga música norteña o tropical?

Para determinar dicha probabilidad, ¿qué se debe hacer?

¿Cuál será la probabilidad de que alguna de estas personas oiga rock o romántica

Si sumas las dos últimas probabilidades que se obtuvieron, ¿qué resultado obtienes?

¿Cuál crees que sea la razón de ello?

Compara tus respuestas con las de otro grupo, si no hay acuerdos consulten con el profesor(a).

En forma individual resuelve en tu cuaderno:

1. En una urna hay 10 boletas, 3 rojas, 4 blancas, 2 negras y 1 azul.

   De los siguientes sucesos, ¿cuál es el más probable y por qué?

   a) Sacar una boleta que sea blanca o azul.

   b) Sacar una boleta que sea roja o negra.

   c) Sacar una boleta que sea blanca o negra.

2. Una baraja española tiene 40 cartas, de las cuales se llaman figuras a las cartas As, Sota, Caballo y Rey. Además se clasifican en 4 palos: oros, bastos, copas y espadas.

   Calcula las siguientes probabilidades:

   a) Sacar un As

   b) Sacar una figura

   c) Sacar As o Rey

   d) Sacar Caballo de espadas o Sota de copas.

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as). Si es necesario consulta la clave.

CLAVE

1. $a)\ P(B \circ A) = P(B) + P(A) = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$

$b)\ P(R \circ N) = P(R) + P(N) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2}$

$c)\ P(B \circ N) = P(B) + P(N) = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{5}$

La suma más probable de los tres anteriores es $c)$

2. $a)\ P(As) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

$b)\ P(Fig) = P(As) + P(Sota) + P(Cab) + P(R)$

$= \frac{4}{40} + \frac{4}{40} + \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{2}{5}$

$c)\ P(As \circ Rey) = P(As) + P(Rey) =$

$= \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{1}{5}$

$d)\ P(Cab\ de\ esp\ o\ sota\ de\ copas) = P(CabE) + P(SdeC)$

$= \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{20}$

113
173 - 3

NO TE ANDES POR LAS RAMAS

Diagrama de árbol
Elaboración de diagramas en el manejo de probabilidades

Una buena estrategia en la resolución de problemas es hacer una representación gráfica que esquematice y resuma la situación planteada y quizás visualice caminos de solución.

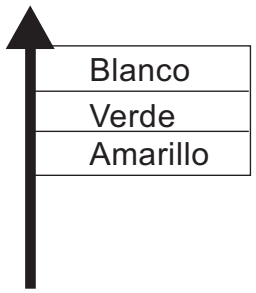
Una de estas representaciones es el ***diagrama de árbol***, llamado así porque presenta divisiones y subdivisiones parecidas a ramas, brotes y hojas de un árbol.

Resulta muy útil a la hora de contar casos que se pueden dar en una cierta situación.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo en la solución del siguiente problema:

Se quiere diseñar una bandera de tres franjas horizontales, empleando los siguientes colores: verde, blanco y amarillo, ¿cuántos diseños diferentes son posibles de hacer?

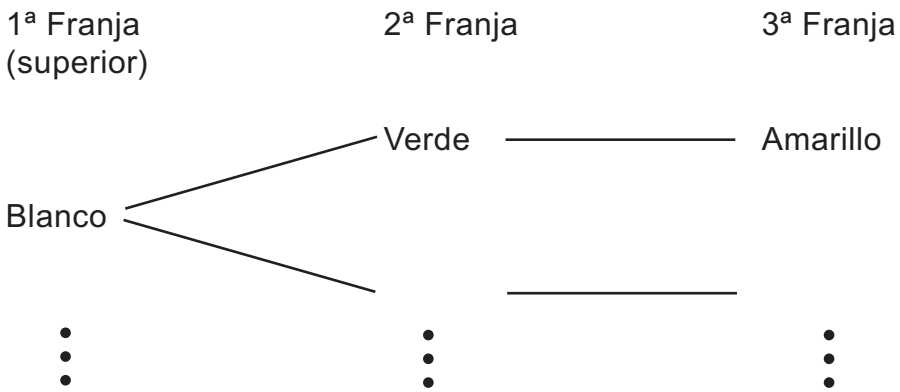
1. Haz tus dibujos, he aquí una muestra:



Si eliges blanco para la franja superior, ¿cómo pueden ser las otras dos franjas? ¿Cuántas opciones tienes?

Si eliges verde para la franja superior, ¿cómo podrían ser las otras dos franjas? ¿Cuántas nuevas opciones tendrías?

2. Organiza la información completando un diagrama como el siguiente:



Haz hecho un diagrama de árbol.

¿Cuántas banderas diferentes se han diseñado?

Compara tu trabajo con el de otros compañeros(as).

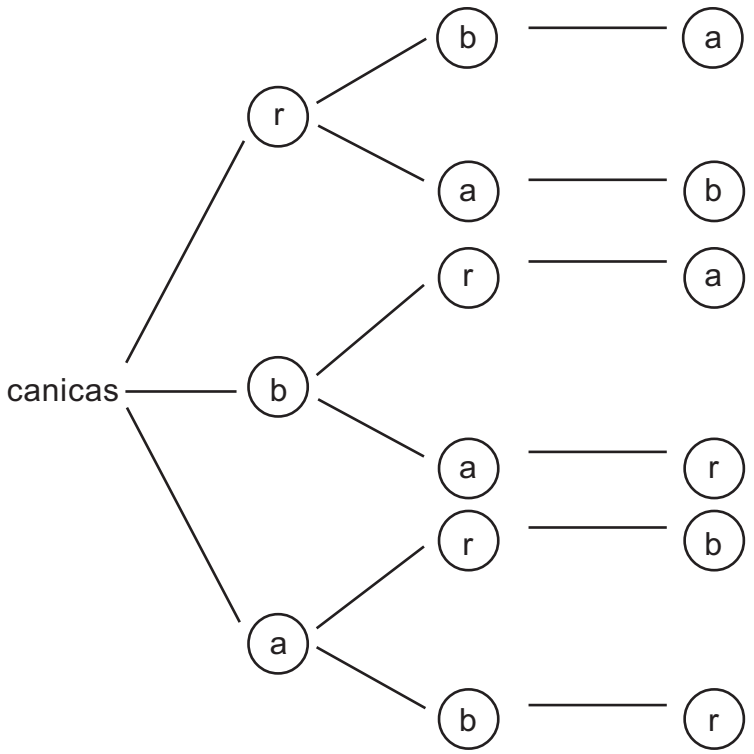
Lee y analiza el siguiente texto con tu grupo.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

El diagrama de árbol es una forma de conocer el número de posibles resultados o arreglos que se pueden hacer con varios eventos, como en la siguiente situación:

Dos niñas están jugando y una debe adivinar el arreglo que la otra haga con tres canicas de diferente color, cuando éstas caigan en tres huecos alineados (roja, blanca y amarilla). ¿Cuántos posibles arreglos se pueden hacer con esas canicas? Esto se puede representar a través de un diagrama, el cual se llama de árbol por la forma que adquiere.

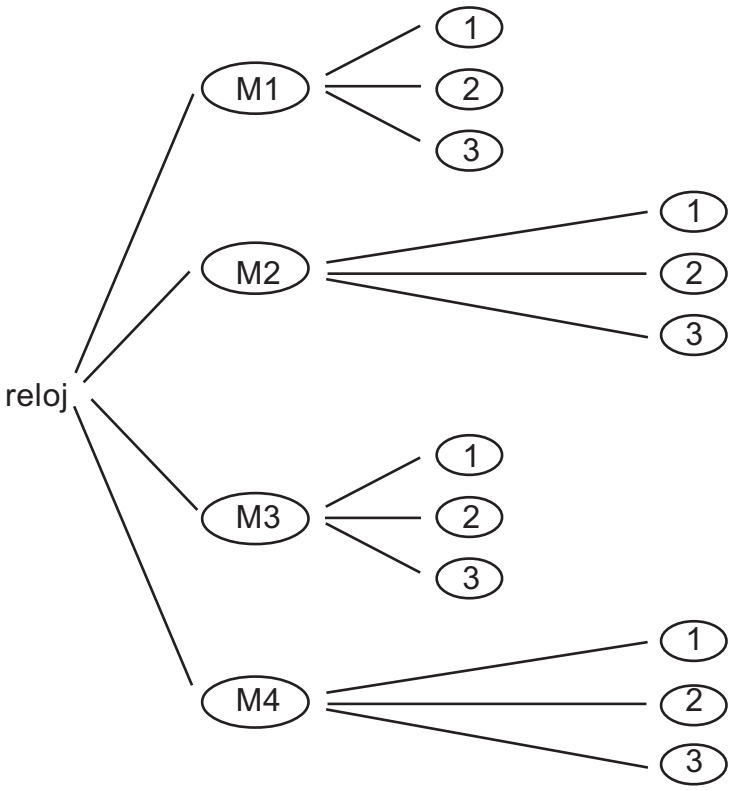
Observa el diagrama que muestra dichos arreglos, según el hueco que ocupe cada canica:



Los arreglos posibles son 6, pues es importante el lugar (hueco) en que se colocan o caigan las canicas.

En el siguiente caso no es importante el orden:

Se desea comprar un reloj y la tienda ofrece cuatro marcas diferentes y tres modelos de cada una. ¿Cuántas opciones se tienen para elegir un reloj? ¿Qué probabilidad se tiene de elegir un reloj de la marca 1 y modelo 3?



Como puedes ver hay 12 opciones, ya que si se desea es posible elegir un reloj de la marca 1 y modelo 3; o bien, uno de la marca 3 y modelo 2, o cualquier otra de las combinaciones dadas; además, en este caso no importa el orden de las marcas ni de los modelos.

La probabilidad de elegir un reloj de marca 1 y modelo 3 sería de $\frac{1}{12}$

Estos ejemplos muestran la utilidad de elaborar un diagrama de árbol.

Observa el video y podrás conocer más sobre la construcción y utilidad de los diagramas de árbol en la solución de problemas.

Trabaja con tu equipo.

Usa las siguientes cifras para formar números diferentes de cuatro cifras, sin repetir.

2	3	8	7

Organízalos en un diagrama de árbol.

¿Cuántos números pudiste escribir?

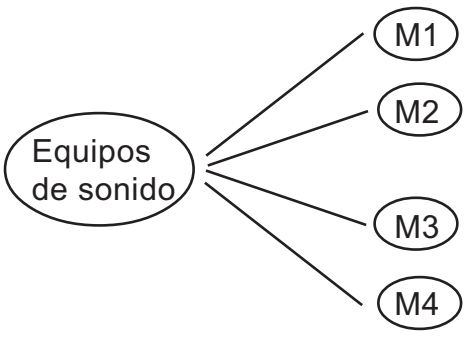
¿Es importante el orden en los arreglos que hiciste con tus cifras para formar los números? ¿Por qué?

¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos números sea par?

Comparte tus hallazgos con los de tus compañeros(as), si tienes dudas, consulta con tu profesor(a).

En forma individual resuelve el siguiente ejercicio:

Completa el diagrama de árbol para conocer cuántas opciones tiene una persona que desea comprar un equipo de sonido cuando le ofrecen cuatro marcas diferentes y tres modelos distintos de cada marca.

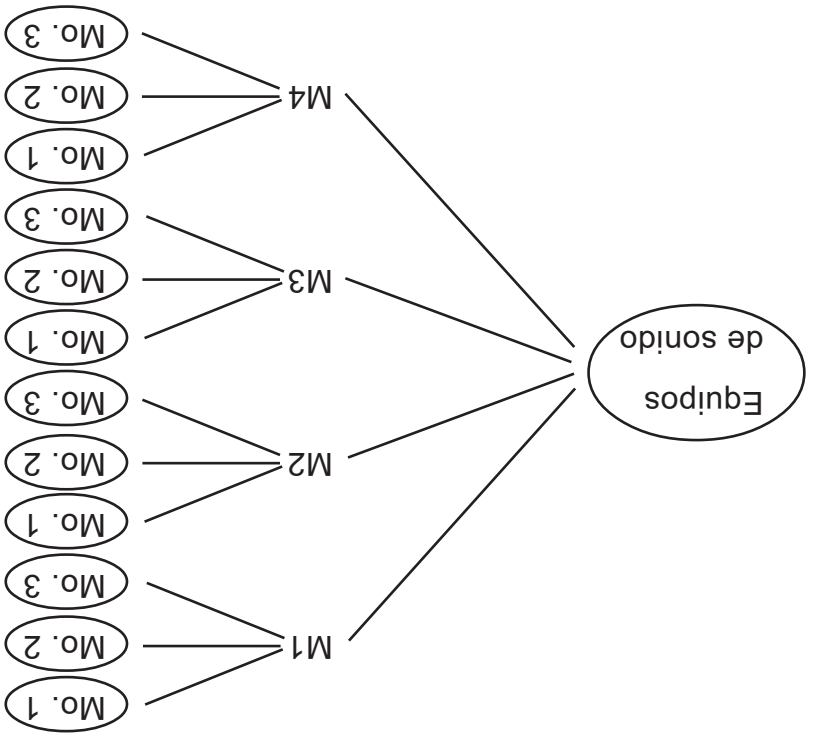


¿Cuántas opciones diferentes tiene esa persona?

¿Es importante el orden en este tipo de arreglos?

Compara tu ejercicio con la clave. Si tienes dudas, consulta a tu maestro(a).

CLAVE



Tiene 12 opciones

114
174 - 3

LA TÓMBOLA

La urna de Bernoulli
Obtención de la probabilidad de un evento con y sin reemplazo

Para determinar el número ganador en los sorteos de algunas loterías se emplea una tómbola, en la cual existen varias esferas con los números del 0 al 9. Así, al ir sacando las esferas, la probabilidad que tienen aquéllas que aún permanecen en la tómbola va cambiando. Para conocer cómo sucede esto, observa el video y después comenta con tus compañeros(as) las dudas que hayan surgido.

Con tu grupo de trabajo, lee y analiza el siguiente texto.

LA URNA DE BERNOULLI

Una persona encarga un vestido, pero está indecisa en cuanto al color. Los colores que le gustaron son: gris, azul, verde y crema. Escribe el nombre de cada color en una tarjeta y colócalas en una caja, decide que la tarjeta que extraigas en el tercer intento determinará el color del vestido. ¿De qué color será la prenda elegida? A fin de saberlo se trabajará con las probabilidades que tiene cada color; esto es:

Probabilidad de que sea gris: $P\,(G)$.
Probabilidad de que sea azul: $P\,(A)$.
Probabilidad de que sea verde: $P\,(V)$.
Probabilidad de que sea crema: $P\,(C)$.

El total de eventos es cuatro, entonces:

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

De aquí se observa que los cuatro colores del vestido tienen la misma probabilidad de ser elegidos. Ahora supón lo siguiente:

En el primer intento salió la tarjeta con el color crema y se regresó a la caja.

En el segundo se extrajo el color azul y también se regresó a la caja.

En el tercero se escogió el verde.

Por tanto, el vestido será verde.

Del ejemplo mostrado se observa que cada evento tiene la misma probabilidad de que suceda; además el total de eventos es el mismo, ya que el experimento se realiza ***con reemplazo***. Lo cual significa que cuando se extrae una tarjeta de la caja se vuelve a depositar.

Ahora observa otro ejemplo en donde el ***experimento*** es ***sin reemplazo***, es decir, sin que existan las mismas posibilidades, para cada tarjeta.

En cierta escuela se va a rifar una enciclopedia entre 10 de los alumnos más sobresalientes de primero, segundo y tercer grado. Hay cuatro alumnos de tercero, tres de segundo y tres de primero y sus nombres se colocan en un papel depositándolos en una urna. La rifa se hace por eliminación, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno de segundo grado gane la rifa en el cuarto intento?

Aquí el total de eventos son 10, ya que ése es el total de alumnos que participan en la rifa:

Probabilidad que tienen los alumnos de tercer grado: $P\,(T)$.
Probabilidad de los de segundo grado: $P\,(S)$.
Probabilidad de los de primer grado: $P\,(P)$.

Las probabilidades que tienen los alumnos, antes de iniciar la rifa, son:

$$P(T) = \frac{4}{10}$$

$$P(S) = \frac{3}{10}$$

$$P(P) = \frac{3}{10}$$

Si en la primera extracción se sacó el nombre de un alumno de tercer grado y la rifa es por eliminación o sin reemplazo, entonces, para determinar las probabilidades se tiene lo siguiente:

Total de alumnos	= 9
Alumnos de tercero	= 3
Alumnos de segundo	= 3
Alumnos de primero	= 3

Las probabilidades son ahora:

$$P(T) = \frac{3}{9}$$

$$P(S) = \frac{3}{9}$$

$$P(P) = \frac{3}{9}$$

En la segunda extracción se elimina el nombre de un alumno de primero.
Entonces, el total de alumnos es de 8 y disminuye en uno los alumnos de primero, con lo que las probabilidades son:

$$P(T) = \frac{3}{8}$$

$$P(S) = \frac{3}{8}$$

$$P(P) = \frac{2}{8}$$

En la tercera se extrae el nombre de un alumno de segundo; así pues, las probabilidades son:

$$P(T) = \frac{3}{7}$$

$$P(S) = \frac{2}{7}$$

$$P(P) = \frac{2}{7}$$

Y en la cuarta extracción se escoge el nombre de un alumno de primero, siendo las probabilidades:

$$P(T) = \frac{3}{6}$$

$$P(S) = \frac{2}{6}$$

$$P(P) = \frac{1}{6}$$

De aquí se tiene que la probabilidad de que un alumno de segundo grado gane la rifa en el cuarto intento es de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

De este ejemplo se observa que, cuando un experimento se realiza sin reemplazo, las probabilidades varían después de que sucede un evento.

Con base en los ejemplos mostrados se concluye que:

> El experimento de la urna de Bernoulli consiste en determinar la probabilidad de que un evento ocurra con o sin reemplazo.

Junto con otro compañero(a), analiza las siguientes preguntas y contéstalas:

¿Qué significa realizar un experimento aleatorio con reemplazo?

¿Qué entiendes por un experimento aleatorio sin reemplazo?

En una bolsa se tienen 3 canicas rojas, 2 amarillas y 4 blancas, determina lo siguiente (considera que el experimento es con reemplazo):

a) La probabilidad de extraer una canica amarilla.
b) La de sacar una canica blanca.
c) La de elegir una canica roja.
d) ¿Cómo son las probabilidades para cada color de canica?

Si el ejercicio anterior fuera sin reemplazo, ¿cómo serían las probabilidades, si se saca en su orden: amarilla, blanca y roja?

Compara con otros compañeros(as) tus respuestas; si son diferentes, consulta con el profesor(a).

Sigue con tu compañero(a) y resuelve el siguiente ejercicio:

En un almacén se tienen 7 televisores, de ellos 4 son a color y 3 en blanco y negro. Si una persona elige uno al azar, determina lo siguiente:

a) La probabilidad de elegir un televisor a color.
b) La de escoger uno en blanco y negro.
c) Si ya eligieron tres televisores sin reemplazo (uno a color y 2 en blanco y negro), ¿cuál es la probabilidad de que se elija un televisor a color en el cuarto intento?

Lee en el grupo tus respuestas, si hay errores, corrígelos.

Resuelve de manera individual:

Un señor tiene en su billetera 3 billetes de $1 000, dos de $2 000, dos de $5 000, dos de $10 000 y uno de $20 000. Si ya sacó dos billetes de $1 000, uno de $5 000 y el de $20 000, ¿cuál es la probabilidad de escoger billetes de cada denominación de los que aún tiene en la billetera?

Compara tus resultados con la clave; si hay diferencias, analiza los ejercicios y corrige.

CLAVE

$$P(\$5\,000) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(\$10\,000) = \frac{1}{3}$$

$$P(\$1\,000) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(\$2\,000) = \frac{1}{3}$$

115
175 - 3

NO DISIMULES

Simulación en problemas
Solución de poblemas por simulación

Ciertas medidas de seguridad consisten en organizar simulaciones de evacuaciones de sitios altamente poblados como escuelas, edificios, estadios, etc. ante posibles eventos como temblores de tierra, incendios u otros, con el fin de evitar desgracias.

En lo que respecta a la probabilidad también se hace una simulación de un experimento.

Observa con atención el video y comenta con tus compañeros(as) los aspectos que encuentres más interesantes.

Lee y analiza el siguiente texto. Invita a tus compañeros(as) de grupo.

SIMULACIÓN EN PROBLEMAS

El siguiente ejemplo ilustra la simulación de problemas de azar empleando una urna de Bernoulli, con reemplazo, lo cual permite dar una idea aproximada del comportamiento de un experimento.

El señor Rosas vende enciclopedias, los datos de ventas le han permitido establecer que cada vez que visita un cliente tiene una probabilidad de $\frac{1}{5}$ de hacer una venta de $1 000 000, una probabilidad de $\frac{2}{5}$ de hacer una venta de $500 000 y finalmente una probabilidad de $\frac{2}{5}$ de no vender.

Si el señor Rosas tiene programado visitar diez clientes, ¿cuánto venderá?

Para simular este problema, se emplea el experimento de la urna de Bernoulli con reemplazo; esto es, se colocan tantas canicas de diferente color en una urna (o caja) como eventos se tengan. Para este ejemplo, una canica roja representa la probabilidad de hacer una venta de $1 000 000, dos canicas blancas la probabilidad de hacer una venta de $500 000 y dos canicas verdes la probabilidad de no efectuar ninguna venta. Se extrae al azar una canica y se repite la experiencia diez veces (debido a que estos son los clientes que visitará), registrándose los resultados obtenidos. Con ello se puede tener una idea de lo que, quizá, ocurra cuando el señor Rosas visite a sus clientes.

Al efectuar el experimento se tienen los siguientes datos:

CLIENTE / EVENTO	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*TOTAL*
CANICA ROJA			✓	✓						✓	*3*
CANICA BLANCA	✓				✓	✓			✓		*4*
CANICA VERDE		✓					✓	✓			*3*

De la tabla de datos se observa que la canica roja salió tres veces, esto indica que probablemente venderá $3 000 000; como la canica blanca salió cuatro veces, tal vez venda $ 2 000 000. Por último, la canica verde salió tres veces, por lo que tal vez no realice venta alguna.

Esto da una idea aproximada de lo que quizá suceda si el señor Rosas visita a sus clientes.

Este tipo de modelo se puede aplicar a otros problemas y con ello determinar la probabilidad de que un evento ocurra en un experimento.

La simulación tiene una gran aplicación en la ingeniería y suele hacerse con programas de computador, por citar un ejemplo. Antes de probar un avión, se efectúa en tierra un simulacro de vuelo, en caso de que haya fallas se corrigen para evitarlas cuando el avión vuele.

> La simulación es una técnica empleada para realizar experimentos con ciertos tipos de modelos matemáticos que describen el comportamiento de un determinado sistema operativo.

Con tus compañeros(as) de grupo realiza el siguiente experimento:

Al lanzar un dado 30 veces, ¿cuántas veces caerá tres?

Registra los resultados de cada uno de los integrantes del grupo en una tabla como:

	TOTAL DE LANZAMIENTOS	*ACIERTOS DE 3*	*PROBABILIDAD EXPERIMENTAL*
Luisa	*30*	*X*	
Ricardo	*30*	*...*	*...*
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•

Compara tus resultados con los obtenidos por los demás integrantes del grupo.

¿Cómo son estos resultados?
¿Qué resultado teórico esperabas?
¿Quién de tus compañeros(as) estuvo más cerca de este resultado?

Si suman los lanzamientos de todo el grupo como si se tratara de un experimento realizado más veces, ¿cuál es la probabilidad experimental de sacar 3 en un lanzamiento de dado?, ¿se acerca este resultado un poco más a la probabilidad teórica?, ¿qué esperarías que ocurriera si el experimento se repite un número muy grande de veces?

Comenta tus opiniones con tus compañeros(as) y el profesor(a).

Con tu grupo, inventen una simulación de un problema y realicen el experimento.

Trabaja con ayuda de tu profesor(a).

116
176 - 3

LO VEO Y NO LO CREO

Probabilidad condicional
Manejo de la probailidad condicional en eventos

¿Cuántas de las actividades que realizas están condicionadas a que suceda o no otra cosa?

Piensa qué condición tendría que cumplirse para que entendieras esta lección.

Observa con atención el video y comenta con tus compañeros(as) qué entienden por probabilidad condicional.

Lee y analiza el texto que ilustra con un ejemplo el concepto de probabilidad condicional.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Quién no ha oído expresiones como las siguientes:

- Si haces la tarea, vas a la fiesta.
- Si llueve pronto, se echará a perder la siembra.
- Si otorga el préstamo el banco podremos sembrar.

Estas frases implican una condición, pues es necesario que ocurra algo primero para que suceda lo siguiente.

De igual forma, en la probabilidad de eventos se puede dar el caso de que sea necesario que ocurra el primero para que se dé el segundo.

Obsérvese el siguiente ejemplo:

Rosa lanza un dado y le pregunta a Martha qué probabilidad hay de que el número sea 6 dado que los resultados de los lanzamientos deben ser mayores que *2*?

Si Rosa no hubiese dado más información a Martha, la respuesta tendría que ser $\frac{1}{6}$; pero como Rosa ya mencionó que el número debe ser mayor que *2*, entonces el espacio muestral se reduce a los números *3, 4, 5* y *6*; por lo que la probabilidad de que sea 6 es de $\frac{1}{4}$.

La probabilidad de que al lanzar un dado caiga *6* es $\frac{1}{6}$; es decir, $P(6)=\frac{1}{6}$ puesto que el espacio muestral es *1, 2, 3, 4, 5, 6*; pero al condicionar el evento a la probabilidad de un número mayor que *2*, éste y el uno quedan excluidos del espacio muestral y se modifica la probabilidad, *P (6)* después de $n > 2$ para ser ahora igual a $\frac{1}{4}$.

A este tipo de probabilidad se le conoce como ***probabilidad condicional***.

Para designar la probabilidad de que ocurra un evento *A*, siempre y cuando haya ocurrido uno *B*, se representará como: *P (A/B)*.

Continúa con tus compañeros(as) y contesta las siguientes preguntas:

a) En el mismo evento de lanzar un dado, ¿cuál será el espacio muestral, si la condición es que el número que se obtenga sea mayor que *4*?

b) ¿Cuál será el espacio muestral, si la condición es que el número sea menor que *1*?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga *3* al lanzar un dado si el número debe ser menor que *4*?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que salga el *5* al lanzar el dado, si se sabe que se obtuvo un número menor que *6*?

Compara con tus compañeros(as) de otro equipo tus respuestas y corrige si tienes errores.

Con tus compañeros(as) realiza los siguientes ejercicios.

1. En una caja hay 10 fichas verdes, 7 azules y 5 rojas.

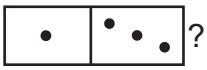
   ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha verde?

   Se saca una ficha:

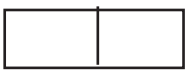
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea verde, si se sabe que la obtenida no es roja? ¿Cuál es el espacio muestral para este caso?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja, si se sabe que la ficha obtenida no es azul? ¿Cuál es en este caso el espacio muestral?

2. Un juego de dominó consta de 28 fichas con puntos combinados del 0 al 6.

   ¿Cuál es la probabilidad de obtener la ficha  ?

   Se saca una ficha del dominó:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga la ficha  , si se sabe que no es una ficha llamada «doble» (igual número de puntos en ambos cuadros)?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener la ficha si se sabe que las fichas ya obtenidas son aquellas cuyos puntos dan una suma mayor que 5?

Compara tus resultados con los obtenidos por otros grupos. Si tienes divergencias consulta con tu profesor(a).

Compara con otro equipo tus respuestas.

Individualmente resuelve el siguiente ejercicio.

1. En una caja se tienen 15 monedas de $1 000, 10 de $500 y 5 de $200. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una moneda de $200? P ($200)

¿Cuál es la de que sea una moneda de $1 000, si se sabe que no es de $500?

¿Cuál es la de que sea una moneda de $500, si la obtenida es mayor de $200?

2. En un cajón hay 3 blusas blancas, 5 azules y 2 negras.

¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar una negra?

¿Cuál es la de que sea azul? ¿Cuál es la de que sea azul, si se sabe que la obtenida no es blanca?

¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca, si ya salieron las azules?

Coteja tus respuestas con la clave. Si tienes dudas, coméntalas con tus compañeros(as) de grupo.

CLAVE

1. $\frac{5}{30}; \frac{15}{20}; \frac{10}{25}$ 2. $\frac{2}{10}; \frac{5}{10}; \frac{5}{7}; \frac{3}{5}$

117
177 - 3

CADA VEZ MENOS PROBABLE

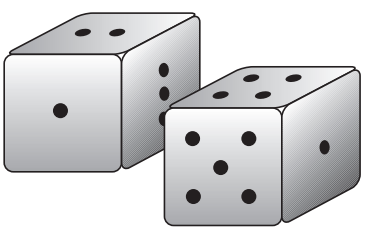
Regla del producto
Cálculo de la probabilidad de eventos combinados

¿Cuántos juegos de azar conoces? ¿Alguna vez te has preguntado cómo podrías calcular las posibilidades que tienes de ganar en cualquiera de ellos? Ahora juega a ganar conociendo las posibilidades que tienes.

Con tus compañeros(as) organiza un equipo y dispónganse a jugar lanzando dos dados.

1. Al lanzar los dos dados y sumar los números representados, ¿qué valores puede tomar la suma? Realicen 30 lanzamientos y registren los resultados.

2. ¿Cuál es el resultado menor?, ¿cuál el mayor? ¿Obtuvieron esos resultados? ¿Cuántos sucesos elementales resultan?



3. ¿De cuántas maneras se puede obtener dos unos?

   ¿Cuál es entonces la probabilidad de obtener dos unos, al lanzar dos dados?

4. Analiza este hecho de otra manera.

   La probabilidad de obtener *1* en el primer dado es $\frac{1}{6}$, ¿cuál es la probabilidad de obtener *1*, en el segundo dado?

   Observa que $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

   Compara este resultado con el obtenido en 3.

5. ¿Estarías de acuerdo con la siguiente conclusión?

   El experimento de obtener dos unos en el lanzamiento de dos dados puede considerarse como la composición de otros dos:

   P (dos unos) = P (uno en el 1er. dado) × P (uno en el 2º dado)

Compara y discute con tus compañeros(as) tus apreciaciones.

Observa atentamente el video y no dejes que el azar determine tu aprovechamiento.

Con tu equipo lee y analiza el siguiente texto.

REGLA DEL PRODUCTO

El concepto de probabilidad nace cuando algunos aficionados a los juegos de azar deciden estudiar las oportunidades que tienen de ganar. Así, se realizan experimentos y se obtienen reglas que actualmente se aplican en muchas situaciones en donde interviene el azar.

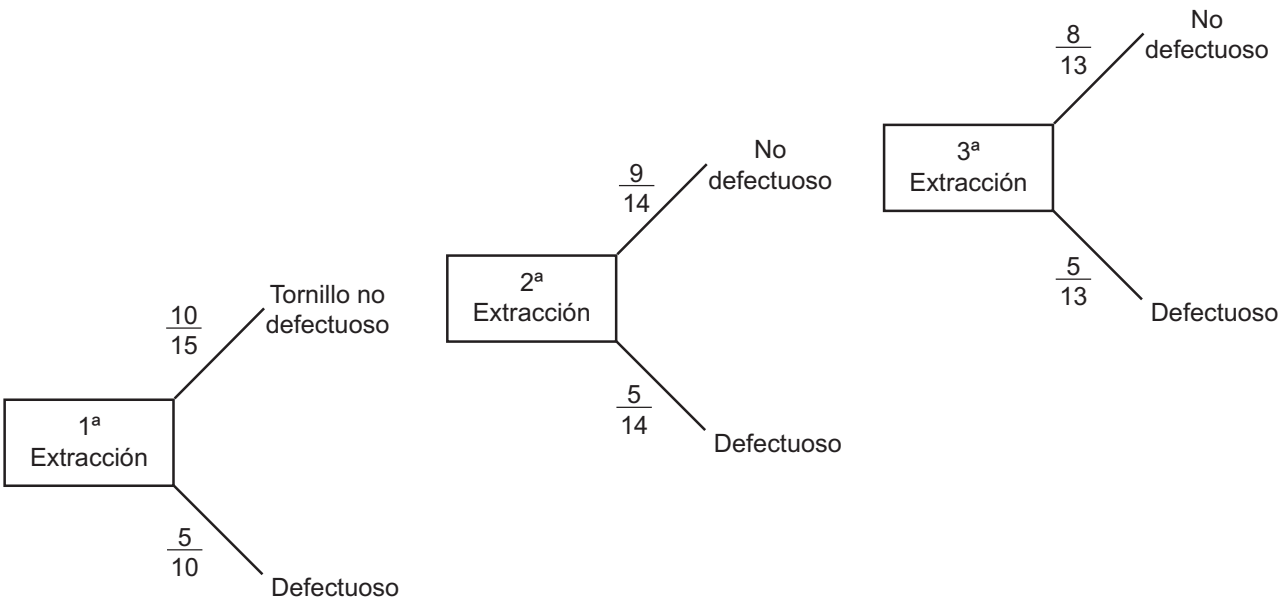
La regla del producto es una de las muchas que han surgido de esos experimentos y ahora corresponde ver en qué consiste.

Analiza el siguiente ejemplo:

En una urna hay 15 tornillos, de los cuales 5 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que al sacar 3 tornillos al azar, éstos no sean defectuosos.

La probabilidad de que el primer tornillo no sea defectuoso es $\frac{10}{15}$, pues son 10 tornillos no defectuosos. Si el primero no es defectuoso, la probabilidad de que el segundo no lo sea es de $\frac{9}{14}$, los casos favorables son 9 de los 14 posibles, ¡puesto que ya se ha sacado un tornillo! Y por último, si los dos primeros no salieron defectuosos, la probabilidad de que el tercero tampoco lo sea es de $\frac{8}{13}$.

Un diagrama de árbol nos ayuda a visualizar el experimento:



P (3 tornillos no defectuosos) = $\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}=\frac{720}{2730}=\frac{24}{91}$.

Observa un hecho importante en cada bifurcación: la suma de las probabilidades es ***1***.

En síntesis, se puede decir que:

> La probabilidad de dos o más eventos –cuando no hay reemplazo– es igual al producto de la probabilidad de cada uno, obtenida después de cada evento.

Ahora, analiza este otro ejemplo.

En un archivo hay 14 tarjetas blancas y 6 azules. Calcular la probabilidad de sacar dos tarjetas blancas, si al extraer la primera, ésta se reintegra al archivo.

La probabilidad de que la primera sea blanca es $\frac{14}{20}$, pues son 14 tarjetas blancas.

Si ésta se reintegra al archivo, entonces la probabilidad de obtener otra tarjeta blanca será de $\frac{14}{20}$, pues nuevamente en el archivo hay 20 tarjetas de las cuales 14 son blancas.

Así puede concluirse que la probabilidad de que las dos sean blancas es:

$$\left(\frac{14}{20}\right)\cdot\left(\frac{14}{20}\right)=\frac{196}{400}=\frac{49}{100}$$

De lo anterior se concluye que:

> La probabilidad de dos o más eventos –cuando sí hay reemplazo– es igual al producto de las probabilidades de ambos eventos independientes.

Con tu mismo equipo contesta el ejercicio. Utiliza tu cuaderno para hacer las operaciones necesarias y los diagramas de árbol cuando los necesites.

1. En un grupo hay 20 niños y 8 niñas. Si se eligen tres estudiantes al azar, ¿cuál será la probabilidad de que todos sean niños?

2. En un cajón hay 12 gorras negras y 4 gorras blancas. Si se extraen 4 gorras seguidas, ¿cuál es la probabilidad de que sean blancas?

Compara con otro equipo tus respuestas y si hay dudas consulta al profesor(a).

Tú solo resuelve los siguientes ejercicios. Realiza las operaciones en tu cuaderno.

1. Un jugador de dominó toma cuatro fichas de las 28. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean «dobles» (igual número de puntos en ambos cuadros)?

2. Para un espectáculo se dan al azar fichas con un logotipo determinado que indicará el orden en que participarán las personas. Calcular la probabilidad de que queden alternadas personas de ambos sexos, si hay 4 hombres y 3 mujeres para el espectáculo.

Compara tus respuestas con la clave. Si tienes dudas, coméntalas con tus compañeros(as) de grupo.

CLAVE

2. $\left(\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{144}{5040}=\frac{1}{35}$

1. $\left(\frac{7}{28}\right)\cdot\left(\frac{6}{27}\right)\cdot\left(\frac{8}{26}\right)\cdot\left(\frac{4}{25}\right)=\frac{480}{491400}=\frac{1}{585}$

118 ARREGLANDO Y RESUMIENDO

El cálculo de la media en distribuciones con datos agrupados

En grados anteriores aprendiste cómo la media de una distribución de datos es un parámetro adecuado para representarlos. Aprendiste además el procedimiento para calcularla. Pero, ¿cómo hacerlo cuando tenemos muchos datos que, para comodidad, se presentan agrupados?

Invita a tus compañeros(as) de grupo para realizar el siguiente trabajo.

Las estaturas de los 150 deportistas que participan en los juegos nacionales se presentan en la siguiente tabla:

Intervalo	*155 - 160*	*160 - 165*	*165 - 170*	*170 - 175*	*175 - 180*
Frecuencia absoluta	*30*	*35*	*60*	*15*	*10*

¿Qué puedes decir de las estaturas de los 35 deportistas en el intervalo 160 - 165?

Con los datos presentados de esta manera, ¿podrías saber cuál es la estatura de cada deportista?

¿Entre qué valores de estatura debería estar la media de esta distribución de datos? ¿Por qué?

Comenta tus apreciaciones con las que propongan otros compañeros.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo. Usa los datos de las estaturas de los 150 deportistas, del ejercicio anterior.

De la lectura de la tabla se puede observar que:

Hay 30 deportistas con estaturas entre 155 y 160, pero no sabemos cuánto mide cada uno. Una solución sería asignarles el valor central del intervalo en que están:

Entre 155 y 160 el valor central es: $\frac{155+160}{2}=157.5$

Hay 35 deportistas en el intervalo 160 - 165, se les asigna el valor central 162.5

Completa en tu cuaderno la tabla anotando el valor central que también se llama ***marca de clase.***

Intervalo	*Frecuencia absoluta*	*Marca de clase*
155 - 160	*30*	*157.5*
160 - 165	*35*	*162.5*
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Ahora puedes proceder a calcular la media de esta distribución, asignando a los individuos de un intervalo la estatura correspondiente al valor central o marca de clase. Completa la tabla de tal manera que puedas ir realizando operaciones parciales.

Intervalo	*Frecuencia absoluta: fi*	*Marca de clase: xi*	*fi . xi*
155 - 160	*30*	*157.5*	*4725*
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

El producto $f_i\, x_i$ es el número de deportistas por la altura media en el intervalo.

La suma de todos los productos $f_i\, x_i$ es una buena aproximación a la suma de todas las estaturas de los 150 deportistas. Esta suma se expresa así:

$$\Sigma\, f_i \cdot x_i$$

El número total de deportistas se expresa: $\Sigma\, f_i$

La media será: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma\, f_i\, n_i}{\Sigma\, f_i}$ $\quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \dfrac{\textit{suma de todas las estaturas}}{\textit{número total de deportistas}}$

Calcula la media de la distribución de datos de la estatura de los 150 deportistas.

Construye un histograma. Sobre las abscisas localiza las estaturas y sobre las ordenadas la frecuencia. Localiza la media en la gráfica.

Compara tu trabajo con el de otros grupos.

Trabaja en forma individual.

Los pesos de 40 estudiantes son:

60,	*60,*	*65,*	*55,*	*63*	*48,*	*45,*	*38,*	*47,*	*65*
50,	*59,*	*54,*	*52,*	*56*	*57,*	*48,*	*49,*	*50,*	*50*
36,	*47,*	*62,*	*63,*	*47*	*52,*	*76,*	*74,*	*65,*	*50*
61,	*59,*	*58,*	*45,*	*49*	*52,*	*52,*	*52,*	*48,*	*48*

a) Calcula la media de estos datos.

b) Agrupa los datos en intervalos:

(35,5 - 42,5) *(42,5 - 49,5)* *(49,5 - 56,5)*
(56,5 - 63,5) *(63,5 - 70,5)* *(70,5 - 77,5)*

Haz una tabla de frecuencias f_i, calcula el valor central de cada intervalo x_i
Anota en ella los productos $f_i\, x_i$ y encuentra la media de datos agrupados.

c) Compara los valores de la media obtenidos en a) y b), ¿qué observas?
¿Encuentras ventajas en el procedimiento de datos agrupados?

d) Construye el histograma con los datos agrupados, localiza la media en la gráfica.

Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros(as).

119
179 - 3

¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

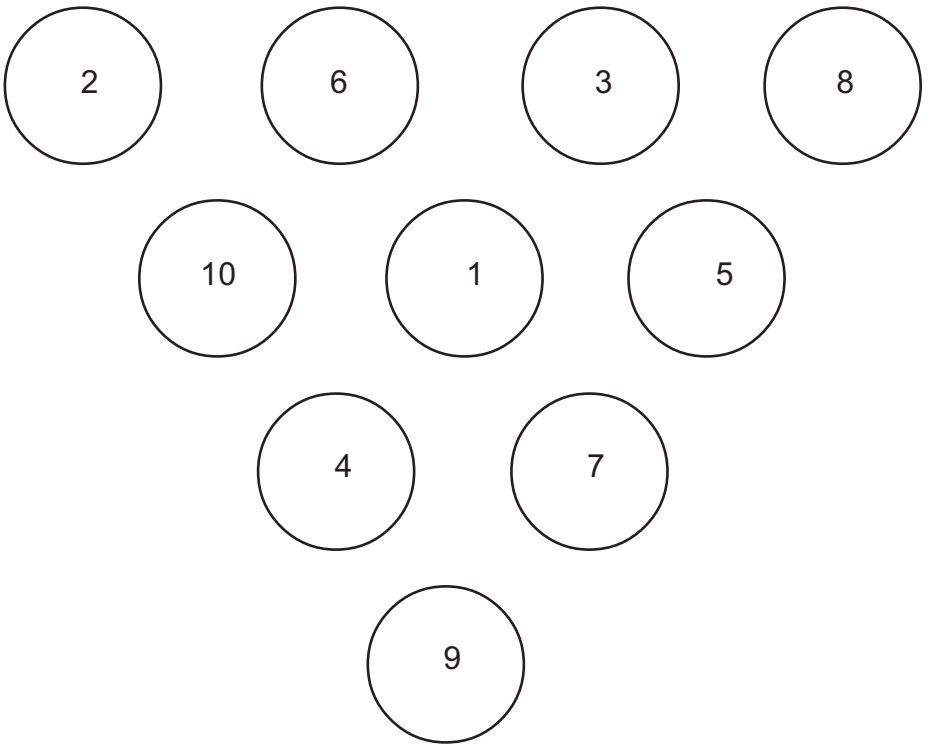
Demostración del aprendizaje logrado
Evaluación personal de los avances logrados

Estás a punto de concluir 9º grado de educación básica. Lo que hasta hoy has aprendido te será de gran utilidad para tus estudios posteriores, y en muchas actividades de tu vida aplicarás lo que has estudiado. Hoy realizarás tu última evaluación de matemáticas y en ella demostrarás lo que sabes.

Observa el video y sigue las actividades que te indica para que realices la primera parte de tu evaluación. ¿Estás listo? Pues ¡adelante!

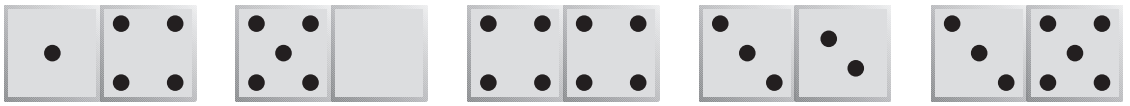
Realiza individualmente las actividades siguientes. El primer ejercicio lo efectuarás con la indicación que dé el video.

1. Prepara una hoja con círculos como los de la figura y anota en el círculo que corresponda la respuesta correcta de acuerdo con lo que indique el video.



Ahora, continúa sólo la siguiente parte de tu evaluación.

2. Si en un juego de dominó se tienen boca abajo las siguientes fichas, determina las cuestiones señaladas.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una ficha en la que una de sus partes tenga el número 5?

c) ¿Cuál la de obtener una ficha cuyos números sumen 5?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que si una persona toma una ficha ésta sea blanca?

e) Si la primera persona sacó la ficha (5,0), ¿cuál es la probabilidad de que una segunda persona levante una ficha que tenga un 4?

f) ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una ficha tenga el número 6?

g) ¿Qué nombre recibe este tipo de evento?

h) Si al finalizar quedan las fichas (3,2), (5,3), (4,1), representa en tu cuaderno con un diagrama de árbol los diferentes arreglos que se forman según el orden en que salgan.

i) ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden obtener con las 3 últimas fichas?

j) ¿Cuál es la probabilidad de que al tener 5 fichas, la primera persona saque la (5,3) y la segunda la (4,1)?

Revisa nuevamente tus ejercicios. Si encuentras errores, analízalos y corrige si es necesario. El maestro(a) indicará la forma de evaluar la sesión.

120
180 - 3
181 - 3

ARMANDO LAS PIEZAS

Panorámica de lo aprendido
Visión de noveno grado

Observa con atención los dos videos.

Con tus compañeros(as) participa en una plenaria donde se comenten los aspectos más relevantes del curso y se planteen aquéllos que ameriten algunas explicaciones o motiven una profundización.

Con tu equipo de trabajo desarrolla y discute los siguientes cuestionamientos.

1. ¿Qué números nuevos ampliaron el campo numérico en el que venías trabajando?

   ¿De dónde surge la necesidad de los números irracionales? Ensaya una explicación acerca de uno de ellos para alguien que no los conozca.

   ¿Qué hecho te llevó a conocer los números complejos? ¿Para qué te han servido?

2. En las sucesiones numéricas encontraste dos tipos especiales de ella, ¿qué caracteriza a cada una de ellas? Explica con ejemplos.

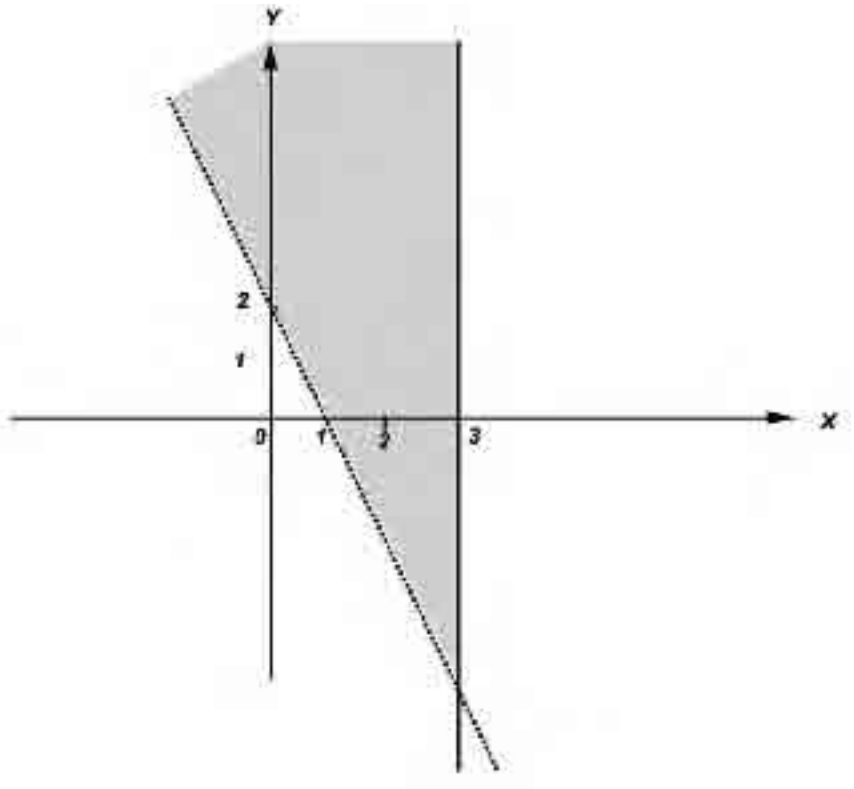
3. ¿Cuál es la operación que te permite factorizar una expresión algebraica?

   Algunas factorizaciones son llamadas productos notables. ¿Puedes ejemplificar alguno de ellos y explicarlo geométricamente?

4. Cuando la representación geométrica, en el plano cartesiano, de dos funciones lineales se cortan en un punto, ¿cómo interpretas este punto?

   Si conoces la expresión algebraica de una función lineal, ¿qué datos de ella te sirven de pista para predecir cómo será su representación gráfica?
   Utiliza la siguiente para explicar $y = -5x + 3$

5. En la gráfica está la representación de las soluciones de un sistema de dos inecuaciones lineales. Encuentra su expresión algebraica.

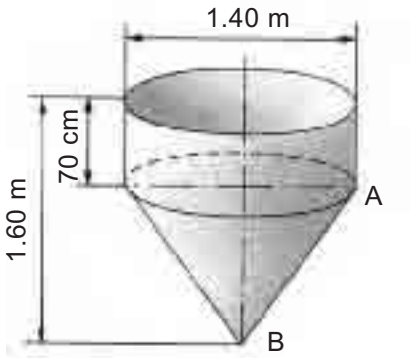


6. El discriminante, en la expresión para la solución de una expresión cuadrática puede ser:

Igual a 0, mayor que 0, ó menor que 0.

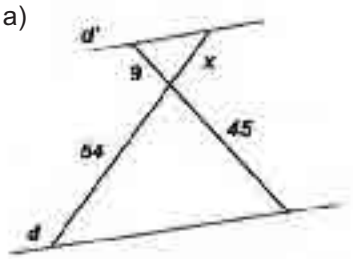
¿Cómo son las raíces de la ecuación en cada caso?

7. Un depósito de agua tiene la forma que muestra el dibujo: una parte cilíndrica y una cónica. Calcula el volumen del depósito.

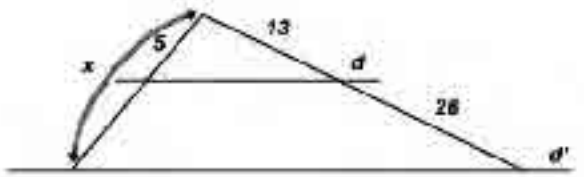


8. En cada uno de los casos que ilustra el dibujo, encuentra la longitud de x. Ten en cuenta que las rectas d y d' son paralelas.

a)



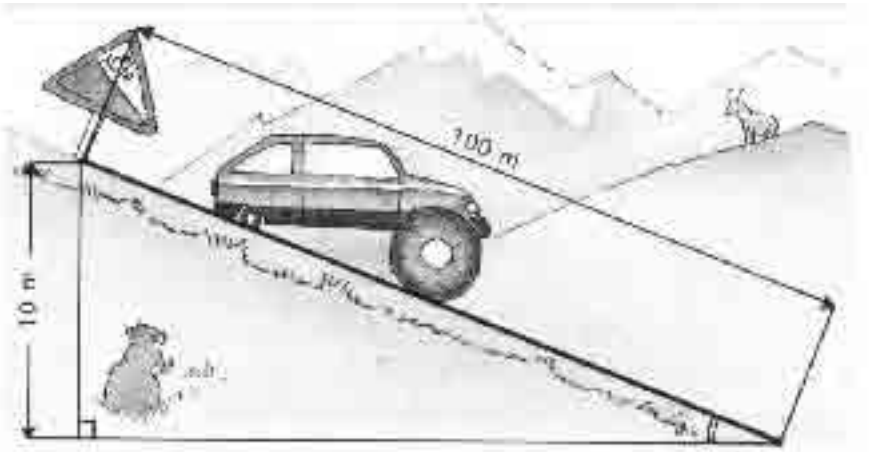
b)



9. Un aviso de carretera señala una pendiente de 10%, lo que quiere decir que cuando se avanza 100 metros de la vía se desciende o asciende 10 m verticalmente.

   ¿Cuánto mide el ángulo a?

   ¿Cómo sería la pendiente correspondiente a un ángulo de 10º?



11. Al lanzar dos dados, la probabilidad de obtener un puntaje 5 es $\frac{1}{9}$.

    ¿Existe otro puntaje que tenga esta misma probabilidad? ¿Cuál? ¿Cómo podrán caer los dados en este caso?