LAS FUNCIONES, EL ÁLGEBRA ESCOLAR Y LA GEOMETRÍA EN ENTORNOS TECNOLÓGICOS

Asuntos didácticos para pensar la enseñanza

Valeria Borsani, Mara Cedrón, Horacio Itzcovich, Cecilia Lamela, Juan Pablo Luna, Rodolfo Murúa, Valeria Ricci y Silvia Segal

Betina Duarte (coordinadora)

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

GOBIERNO DE LA PAMPA
Ministerio de Educación

CONSEJO FEDERAL DE INVERSIONES

Las funciones, el álgebra escolar y la geometría en entornos tecnológicos

Asuntos didácticos para pensar la enseñanza

Las funciones, el álgebra escolar y la geometría en entornos tecnológicos

Asuntos didácticos para pensar la enseñanza

Valeria Borsani
Mara Cedrón
Horacio Itzcovich
Cecilia Lamela
Juan Pablo Luna
Rodolfo Murúa
Valeria Ricci
Silvia Segal

Coordinadora
Betina Duarte

Presentación de Carmen Sessa

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

GOBIERNO DE LA PAMPA
Ministerio de Educación

CONSEJO FEDERAL DE INVERSIONES

UNIPE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE LA PAMPA
CONSEJO FEDERAL DE INVERSIONES (CFI)

Este libro ha sido posible gracias al aporte del Consejo Federal de Inversiones.

© De la presente edición, UNIPE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE LA PAMPA, CONSEJO FEDERAL DE INVERSIONES, 2019
Piedras 1080 (C1070AAV)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina
www.unipe.edu.ar
sitio.lapampa.edu.ar
cfi.org.ar

1ª edición, noviembre de 2019

Impreso en Argentina - Printed in Argentina

Todos los derechos reservados.
Prohibida la reproducción parcial o total, el almacenamiento, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización u otros métodos, sin el permiso previo y escrito del editor. Su infracción está penada por las leyes 11.723 y 25.446.

Índice

PRESENTACIÓN
Carmen Sessa 9

CAPÍTULO 1
LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA Y EL USO DEL PROGRAMA GEOGEBRA
Horacio Itzcovich, Rodolfo Murúa y Silvia Segal 13

CAPÍTULO 2
INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN A PARTIR DEL TRABAJO CON GRÁFICOS CARTESIANOS: DEPENDENCIA Y VARIABILIDAD
Cecilia Lamela y Valeria Ricci 51

CAPÍTULO 3
LAS FUNCIONES LINEALES: UNA OPORTUNIDAD PARA POTENCIAR EL VÍNCULO ENTRE LO FUNCIONAL Y LO ALGEBRAICO
Valeria Borsani y Mara Cedrón 97

CAPÍTULO 4
LA COORDINACIÓN ENTRE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA: UNA PROPUESTA PARA FORTALECER EL TRABAJO ALGEBRAICO
Juan Pablo Luna y Rodolfo Murúa 141

SOBRE LOS AUTORES 179

Presentación

Carmen Sessa
Directora de la Especialización en Enseñanza de
la Matemática en la Escuela Secundaria de la UNIPE

Durante el año 2018, un diálogo fecundo entre un grupo de profesores y profesoras de la Universidad Pedagógica Nacional, un grupo de especialistas del Ministerio de Educación de la Provincia de La Pampa y un grupo de profesoras de la Universidad Nacional de La Pampa sentó las bases para el diseño de la propuesta de formación del Programa x + Matemática. Durante el año 2019, muchos profesores y profesoras de la provincia concurrieron a Santa Rosa para recorrer el tramo de formación que se desplegó en este programa.

El Programa x + Matemática privilegió el análisis de problemas de enseñanza que dieran sentido al trabajo algebraico en la escuela secundaria, a partir de la selección de algunos núcleos de enseñanza ubicados en distintos momentos de la escolaridad. Se estudiaron en su transcurso diferentes propuestas en torno a la aritmética como una posible vía de entrada al álgebra y también situaciones de conteo y de generalización que propician el uso de la letra. En este marco, las funciones lineales, cuadráticas y polinómicas ampliaron el espectro de situaciones en las que el trabajo algebraico hace posible conocer más sobre el conjunto de funciones.

El aula de la capacitación, concebida como espacio de producción docente, posibilitó la construcción colectiva de nuevas miradas sobre la clase de matemática, los y las estudiantes, y la complejidad del rol docente, contextualizados en el eje de la formación en álgebra de los alumnos y las alumnas.

Presentamos ahora este libro pensado como un material tanto de ampliación como de profundización de los contenidos abordados en la capacitación. Con estos objetivos seleccionamos temas nuevos: geometría (Capítulo 1) e introducción a funciones (Capítulo 2). Y elegimos ahondar en temas ya abordados durante la capacitación: función lineal y ecuaciones (Capítulo 3), y función cuadrática (Capítulo 4).

Cada capítulo fue escrito por docentes y graduados de la UNIPE; en coherencia con esto, los autores y las autoras comparten una mirada de la clase de matemática como un espacio de producción de los y las estudiantes. Esa mirada está presente en todos los capítulos, no solo a partir de los problemas que se exponen como posibles para la clase, sino fundamentalmente sobre la labor docente que se imagina a partir de las resoluciones de los alumnos y las alumnas.

El espacio colectivo del aula es entonces el lugar donde la producción más autónoma de los y las estudiantes al resolver los problemas se comparte, se enriquece y avanza con una deliberada intencionalidad docente de que eso ocurra.

En el Capítulo 1, Horacio Itzcovich, Rodolfo Murúa y Silvia Segal nos abren las puertas del mundo de *la geometría*, a través de actividades que proponen el trabajo con el programa GeoGebra. Los problemas están preparados para estudiantes que han tenido poca o nula experiencia previa en el uso del *software*. En los primeros, la construcción de figuras está al servicio de comprender el funcionamiento del programa, apropiarse del dinamismo de las figuras y recuperar algunas relaciones entre sus elementos. Más adelante, se proponen problemas en los cuales la exploración y la argumentación se entraman en pos de un auténtico trabajo geométrico. En las últimas actividades, se problematiza la tarea del copiado de figuras con GeoGebra, proponiendo para el aula una reflexión con los y las estudiantes acerca de sus alcances.

En el Capítulo 2, Cecilia Lamela y Valeria Ricci proponen una aproximación a la noción de función a través del estudio de la dependencia entre variables con problemas en diferentes contextos que apunten a que los y las estudiantes atrapen desde el inicio los aspectos modelizadores de las funciones. El gráfico cartesiano, con todas las novedades que porta para los alumnos y las alumnas principiantes, se constituye en la forma de representación potente para plasmar la dependencia entre dos variables y proveer una imagen global de las funciones. Todo este capítulo gira en torno a la enseñanza de la *introducción a las funciones apoyada en los gráficos cartesianos*.

En los primeros problemas, los gráficos son un dato, y los y las estudiantes deben aprender a leer información sobre la situación que es modelizada. Más adelante, se presentan actividades donde son ellos y ellas quienes deben producir un gráfico a partir de datos dados en una tabla. Para un problema particular, las autoras ofrecen la experiencia de un aula, con las producciones de los alumnos y las alumnas y las discusiones que se generaron, como un modo privilegiado de acceder a los pliegues didácticos y cognitivos que la actividad puede presentar. El último grupo de problemas aborda la potencialidad de enfrentar a los y las estudiantes al análisis de gráficos “cualitativos”.

En el Capítulo 3, Valeria Borsani y Mara Cedrón nos hablan de las *funciones lineales*, destacando la propiedad de variación uniforme como el punto de partida para su aprendizaje. Como ellas señalan: “ninguna representación ‘atrapa’, en sí misma, la noción de función lineal; en este sentido, la fórmula de la función lineal no puede ser el único soporte para su definición”.

El juego entre diferentes formas de representación de una función es la piedra fundamental donde se apoyan las diferentes actividades propuestas. Y en este juego, el lenguaje algebraico se enriquece nutriéndose de nuevos sentidos para los y las estudiantes, por el conjunto de cuestiones matemáticas que permite considerar. En esa trama de coordinación entre diferentes formas de representación, los primeros problemas del capítulo apuntan a la apropiación de la noción de funciones de variación uniforme, a través de problemas contextualizados.

En una segunda parte del capítulo, se abordan problemas de encuentro que derivan en el planteo de ecuaciones. El trabajo con ecuaciones inmersas en un contexto funcional permitirá construir un sentido, dado por el contexto, a la manipulación de las ecuaciones en pos de su solución.

Por último, en el Capítulo 4, Juan Pablo Luna y Rodolfo Murúa se ocupan del estudio de las *funciones cuadráticas*. A lo largo de todo el capítulo, es notoria la presencia del trabajo algebraico y, nuevamente, destacamos la riqueza de poner la expresión algebraica en relación con otras formas de representación, en particular, con el gráfico de la función. Las funciones cuadráticas, además, presentan la riqueza de aceptar diferentes formas para la escritura de sus fórmulas –canónica, factorizada, desarrollada y otras no tan "famosas"–, dando lugar a expresiones equivalentes.

Las primeras actividades, sobre la escritura canónica, apuntan a caracterizar el tipo de curvatura diferenciándolo de otras gráficas y utilizando como soporte privilegiado los valores de la función organizados en una tabla. El reconocimiento de pares de valores con igual imagen es una propiedad clave de las funciones cuadráticas y las actividades permitirían a los y las estudiantes aprender a "leer" esta propiedad en la fórmula canónica.

Más adelante, se presentan actividades que enfrentan a los alumnos y las alumnas con otras formas de escritura de la fórmula –entre ellas la factorizada y la desarrollada–, buscando vincular las relaciones ya construidas sobre la expresión del tipo canónica con estas nuevas expresiones. En este trabajo la noción de expresiones equivalentes tiene una fuerte presencia.

En varias oportunidades, las actividades se plantean para trabajar con el programa GeoGebra, lo cual permite un juego potente con familias de funciones a partir de la incorporación de parámetros. Con diversas tareas, se va configurando un camino posible para resolver una ecuación cuadrática, con fuerte apoyo en lo funcional. Por último, se presenta un modo de construir la fórmula de Bhaskara o "resolvente", que les podría brindar a los y las estudiantes un mayor sentido que su mera aplicación mecánica.

Estos materiales fueron producidos teniendo en el horizonte la constitución de pequeños colectivos docentes, que, en cada escuela, los estudien, los analicen críticamente, y se inspiren en las propuestas que contienen para pensar un trabajo potente para sus propios alumnos y alumnas. El grado de novedad que suponga este material es un fundamento para hacer necesario un trabajo colectivo de análisis y de reelaboración, con vistas a sostener nuevas experiencias en el aula de cada docente. La discusión de los y las docentes en torno a lo acontecido sus aulas es la oportunidad de aprender más sobre nuestros y nuestras estudiantes y de repensar las propuestas a partir de esto. Esperamos, sinceramente, que ese sea su destino.

CAPÍTULO 1

La enseñanza de la geometría y el uso del programa GeoGebra

Horacio Itzcovich, Rodolfo Murúa y Silvia Segal

INTRODUCCIÓN

Estas páginas tienen la intención de compartir con los profesores y las profesoras de matemática algunas ideas en torno al trabajo geométrico, apelando al uso del programa GeoGebra. Se trata de un recorrido posible para los y las estudiantes de los primeros años de la escuela secundaria, quienes han tenido poco contacto con este programa –o ninguno– y por quienes, entendemos, es necesaria una propuesta que permita una aproximación al uso de esta herramienta y que, al mismo tiempo, revisite o involucre conceptos geométricos.

Una de las mayores dificultades reside en identificar cuáles son los vínculos que establecen los alumnos y las alumnas con el universo de las figuras geométricas a partir de diferentes tareas que propician tanto programas específicos (los que se instalan en las computadoras o los que funcionan en línea) como páginas digitales que ofrecen alternativas para la enseñanza. En algunos casos, las propuestas se basan en la observación de dibujos; en otros, la oferta no difiere mucho de lo que un docente podría hacer en su aula, salvo por su presentación en videos o en otros formatos que sugieren mayor "motivación", como por ejemplo los *applets*. En ciertas ocasiones, la potencia está depositada en relaciones basadas en las medidas; en otras, se promueve el desarrollo de dibujos con diferentes instrumentos, y muchas, recurren a las construcciones de figuras.

Creemos que uno de los aspectos a considerar sobre el vínculo de las y los estudiantes con las figuras geométricas es el tipo de trabajo que propiciamos al abordar el estudio de las propiedades de las figuras geométricas y en qué medida los recursos informáticos que seleccionamos resultan solidarios con tal finalidad. En este sentido, nos parece central compartir la perspectiva que adoptamos en relación al trabajo geométrico, la cual orienta el desarrollo de este capítulo.

Si bien hemos aprendido que el origen de la geometría –tal como su nombre lo indica–, hace referencia al tratamiento y estudio de las medidas de la Tierra; también hemos estudiado que esta perspectiva ha sufrido modificaciones, como todo conocimiento. La construcción de objetos geométricos y el desarrollo posterior de la geometría como rama de la matemática, principalmente en los tiempos de Euclides, se ha “desprendido” de los espacios reales que se medían para construir objetos teóricos ideales que los representasen. Este cambio, probablemente, se haya debido a la imposibilidad de medir todo. Claro, ¿cómo hacer para medir empíricamente la altura del cerro Aconcagua? Imposible. En todo caso habría que llegar hasta la cima, realizar un orificio en el medio de manera perpendicular a la tierra, hacer que este llegue hasta el suelo, arrojar por el orificio una cinta métrica y así obtener su altura.

Por ello, en vez de tratar con el objeto real, se trabaja con representaciones y se establecen relaciones que son válidas en estas representaciones. Es más, las relaciones solo valen en las representaciones y no en los objetos reales.

A partir de estas consideraciones, compartimos la perspectiva que identifica que la geometría se ha constituido en el estudio de un espacio ideal con “objetos teóricos” que obedecen a las reglas del trabajo matemático (Cappelletti, 2008: 12).

Concebimos un modo particular de hacer geometría, que podría caracterizarse, sintéticamente, de la siguiente manera (Itzcovich, 2006):

- los objetos de la geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico;
- los dibujos trazados son representantes de esos objetos teóricos;
- muchos problemas geométricos pueden ser, en un comienzo, explorados empíricamente, analizando diferentes dibujos que resultan sumamente útiles (como se verá más adelante) o recurriendo a mediciones. Estas experiencias permiten la obtención de resultados y la formulación de conjeturas. Será necesario transformar mediante argumentos estas conjeturas en verdades demostradas;
- los enunciados, relaciones y propiedades son generales, y se explicitan las condiciones a partir de las cuales una colección de objetos las cumplen. Para socializarlas, adquieren un cierto nivel de convencionalidad en su formulación.

Por lo tanto, cada una de estas particularidades del trabajo geométrico podría orientar el análisis de las diferentes propuestas que se plantean desarrollar apelando al uso de recursos informáticos, ya sean programas específicos o herramientas de páginas de internet.

Entendemos que el estudio de las figuras geométricas supone un recorrido donde, a través de la resolución de problemas, se ponen en juego relaciones –conocidas o nuevas– entre sus elementos, se encuentran modos de validarlas a través de argumentos que se van estructurando en un discurso deductivo que va prescindiendo de la constatación empírica y llega a una caracterización de las figuras en términos de algunas de las relaciones –propiedades– estudiadas. Es decir, las propiedades de las figuras se conciben como el resultado de un recorrido de trabajo, no como enunciados cerrados en cuya elaboración y fundamentación no se ha participado.

Entre los diversos tipos de problemas geométricos que se pueden proponer, las construcciones de figuras tienen un lugar muy destacado. ¿Por qué le atribuimos a estas actividades una gran riqueza? Porque la exigencia de construir una figura, bajo ciertas condiciones, requiere, en primer lugar, analizarla, inspeccionar sus elementos para seleccionar algunos que se consideren relevantes para concretar la construcción en función de los datos que se ofrecen y establecer relaciones para imaginar la sucesión de pasos que lleven a "completarla". Estos procedimientos, en diferentes medidas, según las condiciones en las que se realicen, ponen en funcionamiento una estructuración de relaciones que favorecen que se entablen dependencias, jerarquías y equivalencias, las cuales contribuyen a internarse en prácticas deductivas. El sujeto, entre el momento en el que toma contacto (inicialmente viéndolo) con un dibujo que va a reproducir considerando ciertas condiciones y el momento en que concreta la construcción, elabora una cantidad de relaciones que modifican su saber inicial. En este sentido, las construcciones son un medio para producir conocimientos sobre las figuras (Cappelletti, 2008).

Asumimos que, en las construcciones, los instrumentos de geometría son portadores de relaciones geométricas. Efectivamente, una escuadra, por ejemplo, "porta" un ángulo recto y, en consecuencia, la posibilidad de dibujar rectas perpendiculares. Si no se dispone de ese instrumento, pero sí de regla y compás, la construcción de rectas perpendiculares exige apelar a otras relaciones, las cuales no serían necesarias utilizar si se recurriera a la escuadra. Por esta razón, los instrumentos que se usan para realizar una construcción condicionan las relaciones que son necesarias movilizar.

Para el desarrollo de nuestra propuesta hemos optado por el uso del GeoGebra por el hecho de ser un programa gratuito y, a su vez, haber sido elaborado de tal manera que obliga a poner en juego, a través de su uso, una distinción fundamental en el trabajo geométrico: la de *dibujo y figura*. Un *dibujo* es una marca gráfica (en el papel, en la pantalla) a la que se accede perceptivamente; una *figura*, un objeto teórico –representado por ese dibujo– caracterizado por un conjunto de relaciones. El dibujo constituye un punto de apoyo para aproximarse a la figura, pero además es necesario elaborar un texto que dé cuenta de las relaciones que se reconocen en ese dibujo y en cualquier otro que tenga las mismas características. La interacción entre dibujo y figura comporta una generalización propia del trabajo geométrico. Gilbert Arsac, un didacta que ha realizado numerosas investigaciones en este campo, plantea que la geometría requiere permanentemente que el sujeto haga interactuar dibujos y textos.

¿Por qué el GeoGebra podemos asociarlo a la relación dibujo-figura? El programa permite modificar los dibujos realizados moviendo algunos de sus elementos (puntos, segmentos, etc.); pero para que al moverlos se conserven sus propiedades, es decir, para lograr que sigan siendo los dibujos que eran –aunque hayan cambiado de posición y/o tamaño–, es necesario que se los construya apelando a relaciones. Por ejemplo, si se quiere trazar dos rectas perpendiculares de modo que al moverlas sigan siendo perpendiculares, es necesario definirlas como tales, no alcanza con hacer un dibujo que las muestre perpendiculares. Además, para producir un dibujo en GeoGebra es preciso hacer explícitos los elementos que se usan y los comandos que se requieren, exigencia que no está presente cuando uno realiza una construcción con los instrumentos convencionales. Otros programas también abonan a estas cuestiones, pero tal vez no tan explícitamente.

Al dibujar, por ejemplo, un cuadrado recurriendo a las herramientas pertinentes, el movimiento permite obtener todos los cuadrados posibles que admita la pantalla, podemos decir que se trata de "infinitos" cuadrados que emergen al arrastrar alguno de sus elementos. Como consecuencia, en realidad se está construyendo una "familia" de dibujos. Siguiendo la idea de Colette Laborde (1997: 39), vamos a definir *dibujo-GeoGebra* como aquel que fue construido con las herramientas pertinentes, por ende, con las propiedades que lo definen, para que al mover sus puntos movibles no se desarme.

A su vez, GeoGebra brinda la opción de configurar su barra de herramientas. Esto le permite al o la docente decidir cuáles quedarán visibles y cuáles ocultar. Entendemos que esta posibilidad favorece el establecimiento de condiciones de trabajo en relación directa con las propiedades que se pretende estudiar.

Por otro lado, se debe considerar que en el GeoGebra las medidas son relativas, es decir, se puede programar que las longitudes sean establecidas en centímetros, pero el *zoom*, la pantalla de la computadora y otras variables hacen que esos centímetros no sean reales, aunque se preserven las proporciones. De allí que se utilizan unidades de medida GeoGebra, en lugar de centímetros.

A través de los problemas que propondremos y analizaremos en los diferentes apartados de este capítulo, se reconocerá que hay muchas maneras diferentes de caracterizar una misma figura, y eso resultará un buen contexto para poner en cuestión la noción de *definición* y de *propiedad* de un objeto teórico. Todo este análisis llevará a discutir qué es decisión del o la docente, en función de los asuntos que se propone estudiar; elegir qué relaciones se tomarán como punto de partida y cuáles se deducirán.

En el primer apartado, presentaremos el programa GeoGebra refiriéndonos a algunas de sus particularidades, presentando aquellos recursos que permiten iniciar el trabajo geométrico y asumiendo que la exploración de su funcionamiento se desarrolla a partir de enfrentar problemas que demandan construir figuras. El mismo proceso de construcción permite, mediante ensayos, ir familiarizándose con el conjunto de opciones que ofrece este programa, a la vez que van emergiendo propiedades de las figuras que se dibujan, en particular, cuadrados y rectángulos.

Un asunto que se vislumbra como central se torna objeto de reflexión: la posibilidad de mover los dibujos realizados. Esta cuestión recorrerá todos los apartados, jugando en cada uno de ellos un papel distintivo.

En el siguiente apartado, relacionado íntimamente con el primero, propondremos algunos problemas que vuelven sobre cuadrados y rectángulos, estudiándolos en torno a las propiedades de sus diagonales y las relaciones que se pueden establecer con los diámetros de las circunferencias que los inscriben.

Finalmente, en el tercer apartado, compartiremos algunas reflexiones sobre un tipo de problema particular: el copiado de figuras. Copiar una figura obliga a pensarla en términos de las relaciones que la caracterizan. ¿En qué medida el GeoGebra es potente para vincularse a las figuras desde esta perspectiva? ¿Cuáles son las condiciones que lo posibilitarían? ¿Cómo y quién decide si un copiado de una figura es pertinente o no? Estos y otros interrogantes son los tratados en esta parte.

Esperamos que este material resulte un aporte en varios sentidos. Por un lado, que permita al lector o la lectora revisitar conocimientos geométricos que seguramente ha tratado en algún momento y que pueda reencontrarse con relaciones, propiedades y modos de hacer –algunos que reconocerá y otros que, tal vez, le resultarán novedosos–. Por otro lado, esperamos que le resulte un insumo que le permita animarse –si aún no lo ha hecho– a proponerles a sus estudiantes un proyecto de enseñanza de geometría que utilice el GeoGebra, con todos los desafíos que ello implica. Finalmente, es nuestro deseo que la lectura de este material colabore en volver a pensar sobre las prácticas de enseñanza (frecuentemente centradas en el reconocimiento de nombres y propiedades, en la realización de clasificaciones y en una exagerada –desde nuestra perspectiva– importancia atribuida a la manipulación de los instrumentos de geometría). Prácticas que doten a la geometría, al uso de la computadora y a la tarea docente de algunos de los sentidos que podrían adquirir, y que posibiliten a los alumnos y a las alumnas –y docentes– involucrarse en un debate intelectual en el que prime la potencia de los argumentos por encima de la evidencia de los dibujos.

PRIMERAS APROXIMACIONES AL PROGRAMA GEOGEBRA

Aquí presentaremos el programa GeoGebra suponiendo que el lector o la lectora pocas veces –o nunca– ha trabajado con él. Consideramos que para visibilizar los posibles valiosos aportes de este *software* a la enseñanza, al aprendizaje de la geometría y al estudio de las propiedades que caracterizan los objetos geométricos es necesario dominar algunos aspectos de su uso.

Se trata de un programa de geometría dinámica; los elementos geométricos –por ejemplo, punto, segmento, recta– utilizados para construir una figura se pueden mover bajo ciertas condiciones, y este movimiento, promovido y acompañado por el o la docente, posiciona al estudiante de un modo diferente frente a sus propias construcciones. Ya no es solo la intervención del profesor o de la profesora, sino también del *software* que aporta lo suyo para que los alumnos y las alumnas comiencen a anticipar, explicitar e investigar las relaciones o propiedades que utilizan para construir una figura.

La propuesta tiene un doble propósito. Por un lado, iniciará a los y las estudiantes en el dominio del GeoGebra a partir de diferentes tipos de tareas. Por otro, esas mismas operaciones les permitirán recuperar o estudiar algunas propiedades que caracterizan a ciertos objetos geométricos ya conocidos por ellos y ellas –rectas paralelas y perpendiculares, circunferencia, rectángulo y cuadrado–.

Esta iniciativa es consecuente con la intención de que el modo de acceder a las particularidades del programa se vea atravesado por un proceso exploratorio –a raíz de la resolución de diferentes problemas–, que a su vez abone al uso de propiedades de las figuras que se proponen tratar. En la medida en que resulte necesario, explicitaremos aquellas cuestiones técnicas del uso de programa para poder avanzar en las tareas propuestas.

Invitamos al lector o a la lectora, entonces, a que instale en su computadora el programa –si aún no lo tiene–.[1] Es gratuito y de fácil instalación. Nuestra opinión es que la versión 5 es la más práctica y la más sencilla de utilizar.

En la versión 5, al abrir el programa se presenta una pantalla como la siguiente:

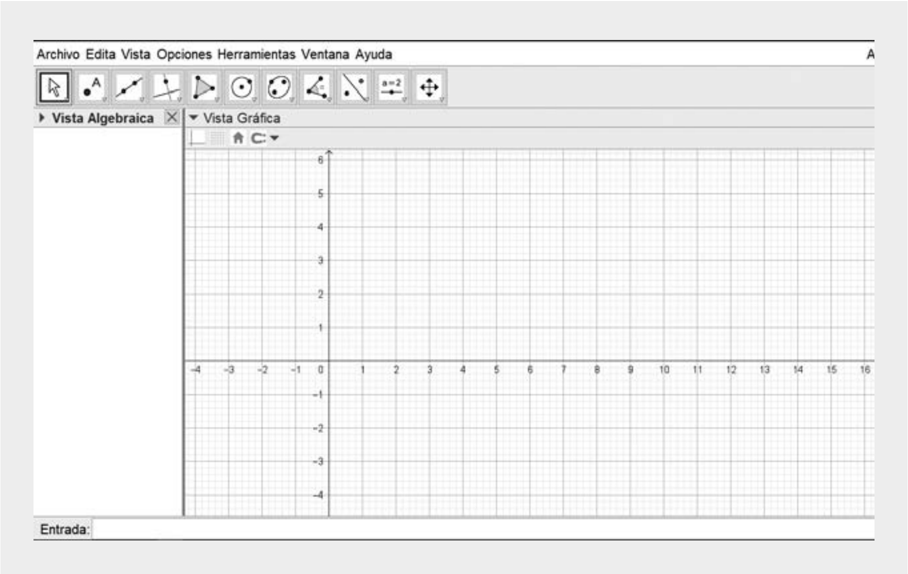


Figura 1. Pantalla que se visualiza al abrir el GeoGebra versión 5.

Esta ventana principal está dividida en vistas. A la izquierda, la *vista algebraica* (donde se explicitan los objetos que se van dibujando). A la derecha, la *vista gráfica* (sobre la cual se pueden hacer los dibujos).

1. Descarga disponible en: <www.geogebra.org>. En la misma página existen numerosos tutoriales de acceso libre.

Cada ícono de la parte superior incluye diferentes posibilidades que permiten realizar dibujos o efectuar mediciones. Estos se denominan íconos de herramientas. En la pantalla, arriba de los íconos, se presenta la *barra de menú* (“Archivo”, “Edita”, “Vista”, etc.).

La vista gráfica tiene opciones para dejar visibles los ejes cartesianos y la cuadrícula o para ocultarlos. Al cliquear en vista gráfica, se despliegan un cuadrito para los ejes y otro para la cuadrícula. Para el trabajo geométrico, proponemos ocultar los ejes y la cuadrícula, es decir, usar la pantalla como una hoja lisa. Esto permite problematizar la construcción, entre otras, de rectas paralelas y perpendiculares sin el apoyo de la hoja cuadriculada o rayada.

La vista algebraica también se puede dejar visible u ocultar. En ella aparecen las fórmulas algebraicas de los objetos libres (los que se van dibujando de manera independiente) y de los objetos dependientes (que son los que se dibujan a partir de otros, por ejemplo, líneas paralelas o perpendiculares a una cierta recta ya trazada, etc.).

Si se cliquea en el vértice inferior derecho de alguno de los íconos de herramientas, aparece una lista de opciones para elegir. Por ejemplo:

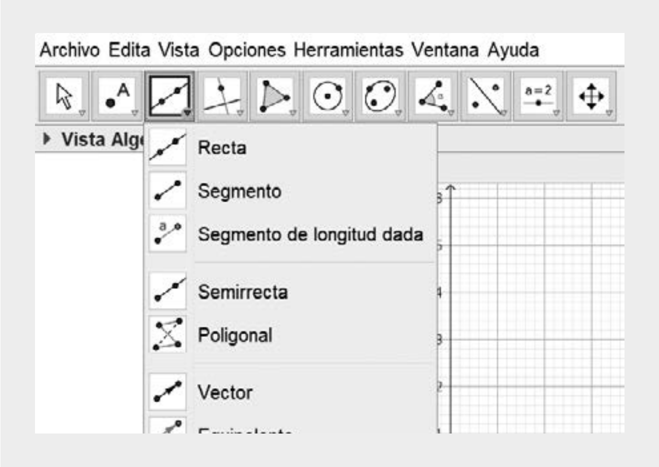


Figura 2. Despliegue de uno de los íconos.

El primer ícono, “Elige y mueve”, representado por una flecha, es el que le da sentido a este programa. Una vez seleccionada esta opción, se puede elegir –cliqueando– uno de los elementos ya dibujados anteriormente y moverlo con el cursor. Analizaremos más adelante cuáles son los movimientos posibles.

Al elegir un objeto dibujado, si se cliquea el botón derecho, se abre una ventana que permite modificar sus características –nombre, color, grosor, etc.–, ocultarlo o borrarlo (Figura 3).

Hay una diferencia importante entre “borrar” y “ocultar” un objeto. Cuando se borra, desaparecen simultáneamente todos los objetos relacionados con él que fueron dibujados *a posteriori*. Por ejemplo, al borrar el punto que define

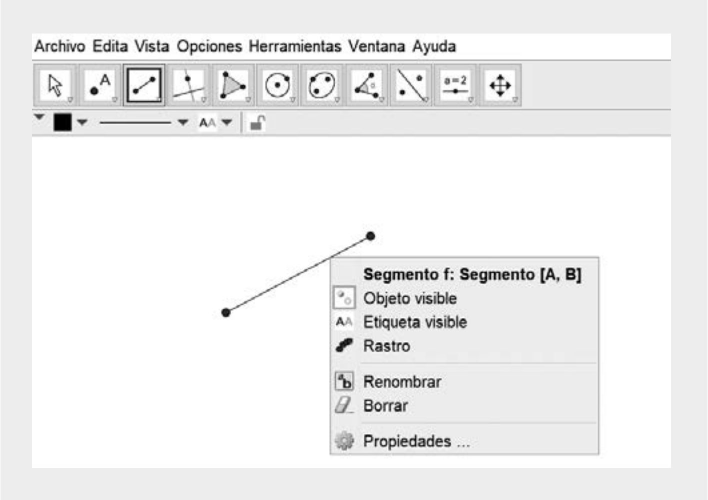


Figura 3. Modificación de las características del objeto dibujado.

a una recta, de forma automática desaparecerá la recta. Por lo tanto, si solamente se quiere invisibilizar un objeto, basta con ocultarlo.

A continuación proponemos varios problemas sobre objetos geométricos ya conocidos por los y las estudiantes –rectas paralelas y perpendiculares, cuadrados y rectángulos–, que les permitirán entrar en un nuevo contrato didáctico y en una nueva relación con la geometría, dado que este *software* los y las hará poner en juego, en las construcciones, las propiedades que ellos y ellas, de seguro, pueden enunciar verbalmente.

ACTIVIDAD 1

Dibujen una recta y un punto que no pertenezca a dicha recta. Tracen, luego, una paralela a la recta que pase por el punto y una perpendicular a la recta que también pase por el punto. Realizada esta construcción, les pedimos que muevan la recta –y los puntos que la definen– y el punto, e identifiquen qué se mueve y qué no se mueve. Traten de buscar razones sobre el "comportamiento" de estos objetos frente al movimiento.

Comentarios

Los alumnos y las alumnas pueden realizar este dibujo de diferentes maneras. A continuación presentamos algunos modos posibles.

Trazando la recta paralela "a ojo". Al trazar una recta y un punto que no pertenezca a la recta, resulta tentador dibujar una paralela a la recta que pase por el punto a partir de la opción "Recta". Un punto que la define ya está dibujado y el otro punto es aquel que permite trazar una recta que, a la vista, resulte paralela a la recta original (Figura 4).[2]

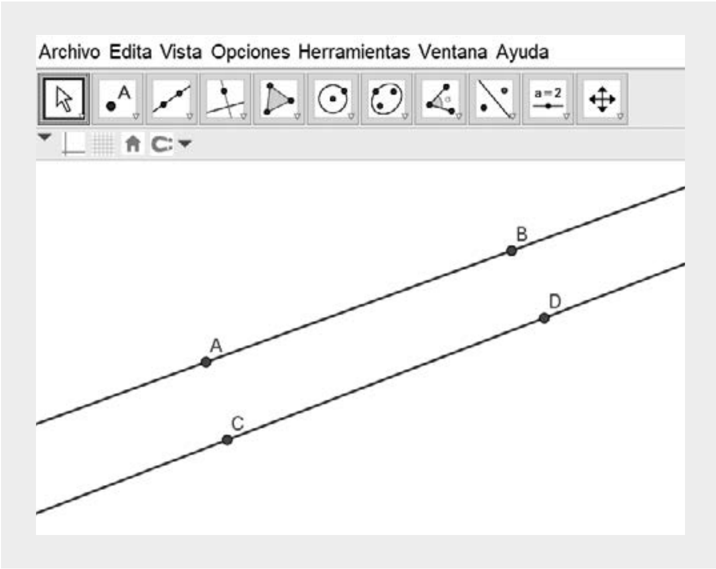


Figura 4. Trazado de una recta paralela a otra "a ojo".

Pero ¿cómo van a estar seguros de que la recta trazada que pasa por C es paralela a la recta original definida por los puntos A y B?

Se presentan al menos dos posibilidades de "batallar" con esto. Una sería hacer *zoom* sobre el dibujo, apelando al ícono correspondiente (el último). Al alejar el dibujo mediante la ayuda del *zoom* (o con la ruedita del *mouse*), se puede observar que en un momento determinado las rectas se cruzan en un punto. Es decir que el ojo observaba algo que no es lo que parecía ser (Figura 5).

Otra opción es mover algunos de los puntos A o B, utilizando la herramienta "Elige y mueve" y modificando la dirección de una de las rectas hasta conseguir que las dos rectas se crucen en la pantalla.

Nos encontramos aquí con una primera característica del programa: algunos objetos pueden moverse, desplazarse, acercarse, alejarse, etc. Esta particularidad hace que la tarea de dibujar en GeoGebra resulte notoriamente diferente a la tarea de realizar trazados en una hoja con lápiz e instrumentos de geometría. La posibilidad del movimiento genera nuevas preguntas cuando se trata de pensar en la enseñanza, cuestión que intentaremos ir desarrollando a lo largo de este capítulo.

2. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_a_figura4.ggb>.

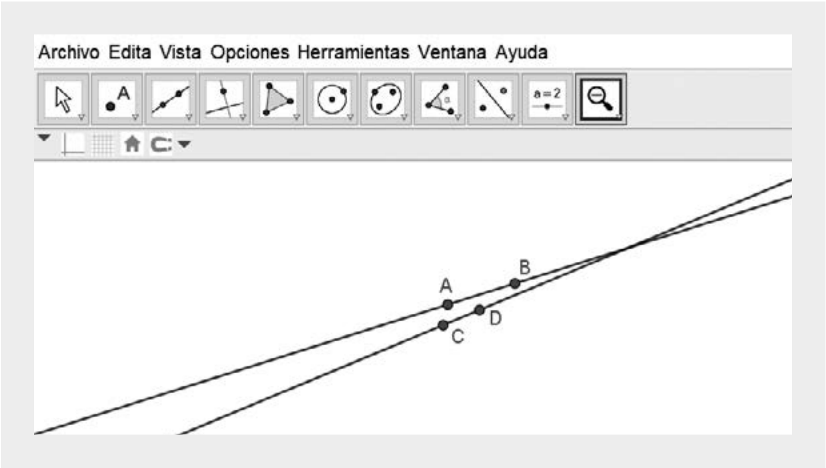


Figura 5. Uso del "Zoom" para analizar paralelismo.

Pero, a su vez, la posibilidad de mover los objetos dibujados demanda establecer que una construcción será pertinente si al mover cualquiera de sus elementos, se preservan las características de lo que se dice haber dibujado. En nuestro caso, al mover la recta original (o algunos de los puntos A o B), deberá preservarse el paralelismo entre ambas rectas y la segunda recta deberá seguir conteniendo al punto C.

¿Por qué se "pierde" el paralelismo al mover la recta original? Cuando se desarrolló la construcción no se recurrió a ninguna condición sobre el dibujo; no se condicionó el dibujo a ninguna relación entre la recta original, el punto y la nueva recta. El dibujo fue realizado "a mano" con la ayuda del ojo y no apelamos a ninguna propiedad que permitiera garantizar el paralelismo.

Utilizando herramientas del GeoGebra. Es decir, se le "pide" al programa que construya una recta paralela a la recta dibujada, y que pase por el punto trazado. Para ello hay que elegir la herramienta "Paralela" y, luego, seleccionar la recta y el punto (Figura 6).

Hecho esto, la recta queda instantáneamente dibujada. De esta manera, al mover la recta original o los puntos A o B, la nueva recta construida se mueve, preservando el paralelismo.[3] Pues se le "exige" al programa que el trazado de la recta se efectúe a partir de una relación entre la recta de inicio y la nueva a construir, esto es: el paralelismo; en consecuencia, al mover la primera, se mueve la segunda.

Queremos destacar ahora, dos cuestiones por las cuales consideramos que este *software* conlleva un aporte didáctico muy valioso.

3. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_posterior_a_figura6.ggb>.

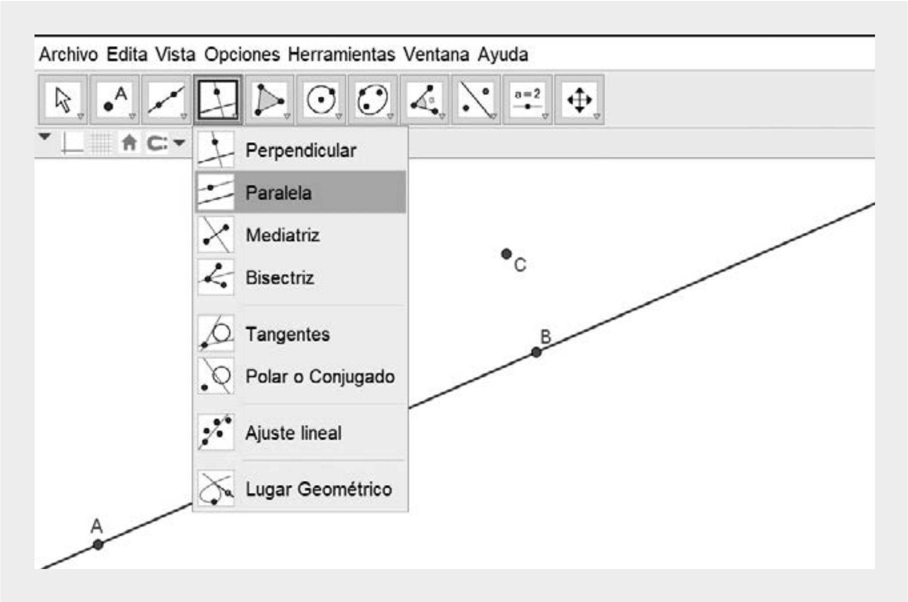


Figura 6. Selección de una recta paralela que pase por un punto.

Por un lado, para realizar un dibujo se necesita explicitar las relaciones que comandan la construcción, "decirle" al programa, a través de las herramientas, qué propiedad de la figura se quiere usar. Y esta cuestión no es menor: así se comienza a poner en funcionamiento una relación entre el dibujo y un texto que hace referencia –de cierta manera– a algunas características que debe poseer la construcción que se lleva a cabo. Este texto no siempre es necesario de ser considerado al trabajar en lápiz y papel con los instrumentos de geometría usuales.

Por otro lado, los alumnos y las alumnas comienzan a establecer un modo de decidir la pertinencia de la construcción realizada: si al mover cualquiera de los elementos del dibujo se preservan las relaciones que se dice que se usaron, la construcción podrá considerarse correcta. Esta cuestión también hace a la diferencia con el lápiz, el papel y los instrumento de geometría: el movimiento y lo que se preserva o no. Esto abona a la autonomía de los y las estudiantes, sin una necesidad imperiosa de depender del o la docente.

Usando la cuadrícula. Aun cuando nuestra propuesta es trabajar sobre "hoja lisa" (en este caso, pantalla en blanco), nuestros alumnos y alumnas nos han sorprendido alguna vez cuando resolvieron este problema usando la cuadrícula. Dibujaron dos rectas mediante la herramienta "Recta", cada una sobre una de dos líneas paralelas que forman la cuadrícula (Figura 7). Con el movimiento, esas rectas dejaron de ser paralelas.

La discusión que generó esta construcción en el aula dio lugar a la producción de la siguiente afirmación: esas rectas "están" paralelas, pero "no son"

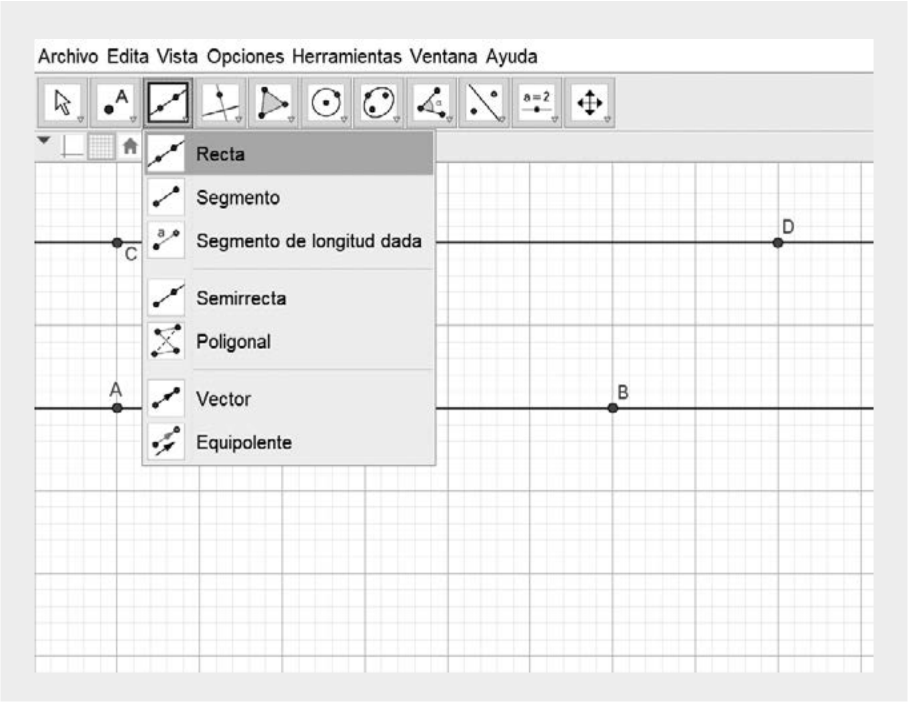


Figura 7. Construcción de rectas paralelas apoyándose en la cuadrícula.

paralelas para el programa GeoGebra. Dejamos abierto este debate para quien quiera seguirlo.

El mismo tipo de análisis se puede desarrollar para la construcción de una recta perpendicular a otra dada, y que pase por un punto determinado. Invitamos al lector o a la lectora a realizarlo.

ACTIVIDAD 2

Dibujen un segmento AB con la herramienta "Segmento". A continuación, construyan una circunferencia cuyo radio tenga la misma longitud que AB, de manera tal que esta relación se preserve al mover A o B.

Comentarios

Hay diferentes maneras de dibujar la circunferencia, a partir de su radio, en función de las instrucciones que le demos al programa. Una posibilidad, luego de dibujar el segmento AB, es recurrir a la herramienta "Compás", seleccionar el segmento (o sus extremos) –automáticamente el programa dibuja una circunferencia con radio de la misma longitud que el segmento– y, luego, cliquear

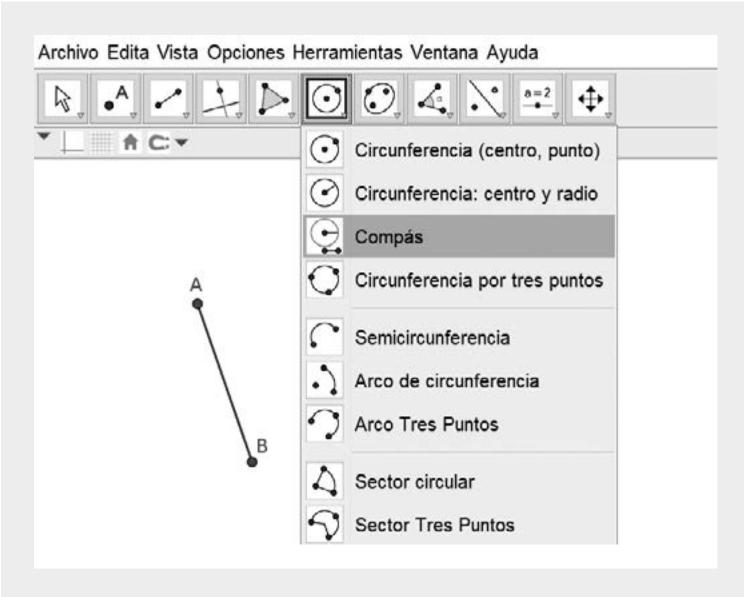


Figura 8. Construcción de circunferencia usando la herramienta “Compás”.

en un punto cualquiera de la pantalla –indicando la posición del centro de la circunferencia–, para que quede dibujada la circunferencia (Figura 8).

Al variar la longitud del segmento –moviendo los extremos–, se modifica el radio de la circunferencia, en consecuencia, su “tamaño”.[4]

Si bien en el problema anterior ya se puso en juego la idea de variable, en este caso tal vez resulte aún más llamativa: al mover algo por fuera del dibujo (el radio de la circunferencia), se desplaza el dibujo. El segmento AB es independiente, se dibujó sin ningún condicionamiento, y se pueden mover sus extremos a gusto del dibujante. En cambio, la circunferencia no admite movimientos, solamente es posible desplazar el centro, que “arrastra” toda la circunferencia.

A su vez, si se borra el segmento AB (por ejemplo, seleccionándolo con el botón derecho y cliqueando la opción borrar), desaparece la circunferencia.

Otra opción es seleccionar “Circunferencia: centro y radio”. Aquí, cliqueando en la pantalla queda dibujado el centro y se abre un cuadro de diálogo que solicita la escritura del radio, en nuestro caso AB (Figura 9).

Es probable que algún alumno o alumna ubique como valor del radio un número o la longitud del segmento AB. En ese caso, no se ampliará ni se reducirá el tamaño de la circunferencia cuando modifique la longitud del segmento AB. Como mencionamos anteriormente, para que esto no ocurra debemos ingresar “AB” en el cuadro de diálogo.

4. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_posterior_a_figura8.ggb>.

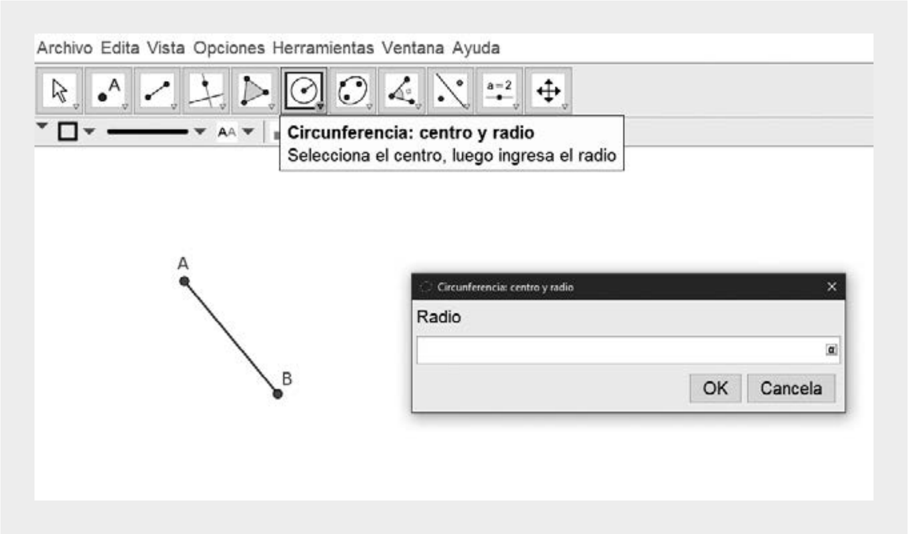


Figura 9. Construcción de circunferencia usando “Circunferencia: centro y radio”.

ACTIVIDAD 3

Construyan un rectángulo de manera tal que al mover cualquiera de sus elementos, siga siendo rectángulo.

Comentarios

La construcción del rectángulo implicará recurrir a alguna de sus propiedades para lograr un dibujo que siga siendo rectángulo al mover cualquiera de sus elementos. Se presentan diferentes caminos posibles. Cualquiera de ellos debe involucrar, de una u otra manera, el paralelismo entre lados opuestos, la perpendicularidad o ángulo recto entre lados consecutivos, la igualdad entre lados opuestos, etc. Para que el rectángulo siga siéndolo cuando se muevan algunos puntos, se requiere cierto nivel de anticipación que los y las estudiantes aún no poseen. Se demanda también una planificación de la tarea –¿se empieza por los lados paralelos?, ¿por los perpendiculares?, ¿conviene marcar un ángulo recto?, ¿cuáles serán los puntos libres?, ¿cuáles los puntos fijos?, etc.–, que permita garantizar que las propiedades se preserven al mover el dibujo.

Quizás resulte conveniente, en este momento, hacer una aclaración para evitar ambigüedades: diremos que un punto es libre si se puede desplazar por toda la pantalla (a estos puntos el GeoGebra los identifica con color azul y los llamaremos “puntos libres”). Otros puntos se pueden mover solamente sobre un objeto ya dibujado (por ejemplo, recta, un segmento, una circunferencia) y no por toda la pantalla (estos son color celeste y los denominaremos “puntos semilibres”). Y hay otros puntos que solo se pueden mover de manera indirecta, es decir, moviendo alguno de los puntos libres o alguno de los puntos semilibres (su color es negro y los llamaremos "puntos fijos").[5]

En general los y las estudiantes comienzan haciéndolo "a ojo", sin usar las herramientas "Paralela" ni "Perpendicular". Como el rectángulo se desarma al mover los puntos, van identificando algunas propiedades vía las herramientas del programa. Sin embargo, hasta lograr que soporte el arrastre, hay mucho ensayo y error. Dan varias idas y vueltas a la construcción hasta conseguir un rectángulo que siga siéndolo al mover todos los puntos libres y semilibres.

Mostramos aquí una construcción posible (Figura 10):[6]

- dibujar un segmento AB;
- trazar dos rectas perpendiculares al segmento que pasen por el punto A y el punto B, respectivamente;
- trazar un punto C en una de las rectas perpendiculares al segmento y, por ese punto, trazar una paralela al segmento;
- marcar con la herramienta "Punto" el punto D, intersección de la recta paralela con la otra perpendicular;
- unir los puntos A, B,C, D con la opción "Polígono";
- finalmente se pueden ocultar las rectas.

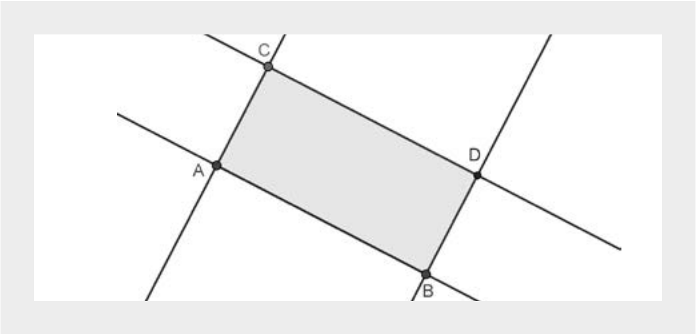


Figura 10. Construcción del rectángulo mediante las herramientas "Paralela" y "Perpendicular".

Un aspecto que se destaca en este problema, aunque también se viene jugando en los anteriores, es el tema de la generalidad del dibujo. Es decir, se parte de un segmento AB y se traza una perpendicular al segmento por el extremo A. El segmento, si bien es uno que está allí dibujado, es un representante de una colección (uno de todos los segmentos posibles). El hecho de poder cambiarlo de posición y

5. Recomendamos al lector o a la lectora ir abriendo los hipervínculos presentados en el capítulo para distinguir los colores de los puntos de las construcciones.

6. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura10.ggb>.

variar su longitud hace que sea uno de los muchos (en rigor, infinitos) que se podrían construir. En consecuencia, la perpendicular, si bien es una la que aparece dibujada, es la que responde al segmento construido. De allí que cada segmento posible de ser trazado tenga su perpendicular. Siguiendo con este razonamiento, el dibujo obtenido al finalizar la construcción es el representante de una colección, es un "rectángulo general". Como mencionamos en la introducción, a esta colección la llamamos dibujo-GeoGebra. Moverlo permite ir avanzando en la idea de que el dibujo es solo un representante, un grafo que da cuenta de un conjunto de relaciones que van más allá del dibujo. Es el que quedó plasmado, pero también es este (resultado de mover el vértice B del dibujo anterior):

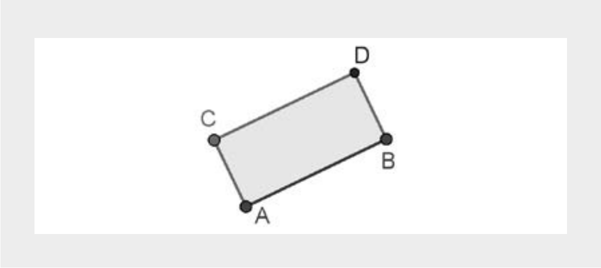


Figura 11. Colección de rectángulos al arrastrar alguno de sus elementos.

Y podría ser cualquier otro que resultara de mover un vértice o uno de sus lados. La interacción entre el dibujo particular y todos los posibles que se pueden obtener a partir de ciertos datos permite ir configurando una primera aproximación a la idea de que un dibujo particular representa una figura que responde a ciertas características. El análisis de los datos y las relaciones a las que se recurra serán entonces los que comanden la cantidad de dibujos-GeoGebra diferentes que se podrán obtener. La construcción que hicimos aquí no es la única posible. Otras construcciones podrían dar lugar a dibujos-GeoGebra diferentes.

ACTIVIDAD 4

Dibujen un segmento AB. Construyan un cuadrado que tenga ese segmento como lado de manera tal que, al mover cualquiera de sus elementos, siga siendo cuadrado.

Comentarios

Una opción para construir el cuadrado es recurrir a la herramienta "Polígono regular", ya que el cuadrado es el polígono regular de cuatro lados. Para promover una construcción en la que sea necesaria utilizar otras herramientas y poner en juego explícitamente las propiedades del cuadrado se puede inhibir la de “Polígono regular”.

Otra opción es elegir los mismos procedimientos que nos sirvieron para dibujar un rectángulo. Es necesario agregarle la condición de que todos los lados sean iguales. Para trasladar una medida se puede usar la herramienta “Compás”.

Mostramos entonces una posible construcción (Figura 12):[7]

- trazar el segmento AB;
- trazar una perpendicular al segmento AB que pase por A;
- usando la herramienta “Compás”, trazar una circunferencia de radio AB y centro en A;
- marcar el punto de intersección de la circunferencia con la perpendicular al segmento AB;
- seguir como se hizo con el rectángulo.

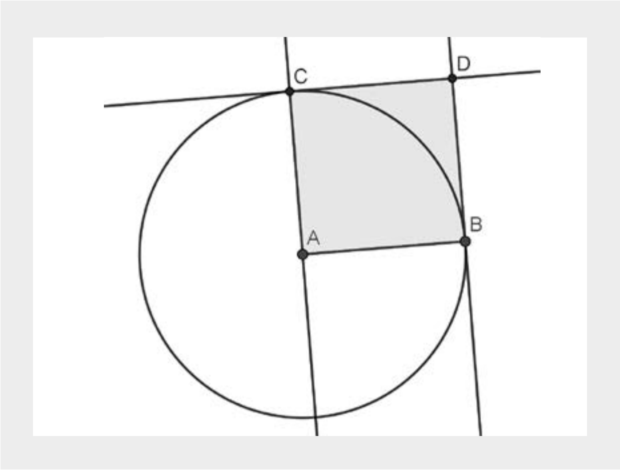


Figura 12. Trazado de cuadrado usando “Perpendicular” y “Compás”.

La pregunta sobre cuántos cuadrados es posible hacer puede abrir un debate interesante. Para cada segmento AB –que se puede “agrandar” o “achicar” moviendo los extremos A y B–, se obtiene un único cuadrado.

Hemos intentado presentar un posible recorrido imaginando alumnos y alumnas que han tenido poco o ningún contacto con el GeoGebra. Este itinerario busca recuperar algunas relaciones geométricas que caracterizan figuras, probablemente conocidas por los y las estudiantes, así como abonar a una exploración que les permita ganar confianza en el uso de este *software*, asumiendo rupturas con relación al uso del lápiz, el papel y los instrumentos de geometría.

7. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura12.ggb>.

Una ruptura fundamental la brinda el movimiento o arrastre que admite un dibujo, asunto no menor en el proceso de producción de propiedades de las figuras.

RELACIONES ENTRE CUADRADOS, RECTÁNGULOS Y CIRCUNFERENCIAS

En este apartado nos proponemos abordar relaciones entre cuadrados, rectángulos y circunferencias, a partir de considerar la diagonal de estos cuadriláteros como diámetro de la circunferencia que los inscribe. Esta relación no es esperable que esté disponible desde el inicio entre los conocimientos de los alumnos y las alumnas, más bien se espera que vaya emergiendo a partir del trabajo que se despliegue al tratar con cada uno de los problemas que planteamos a continuación, a modo de ejemplos posibles. Al mismo tiempo, buscamos que los y las estudiantes puedan identificar las características de las diagonales de estos cuadriláteros; las cuales incluso permiten definirlos desde ya no desde lados y ángulos, sino, precisamente, desde estas mismas.

ACTIVIDAD 1

Dibujen un segmento AB de 5 unidades. Tracen ahora un cuadrado que tenga a ese segmento como una de sus diagonales. ¿Cuántos cuadrados diferentes se podrán construir? Al mover cualquiera de sus elementos, debe seguir siendo un cuadrado.

Comentarios

Este problema tiene como propósito que se identifique, por un lado, que la diagonal del cuadrado coincide con uno de los diámetros de la circunferencia que lo inscribe. Al mismo tiempo, permite poner en debate la relación entre las dos diagonales del cuadrado: son iguales, se cortan en su punto medio y forman un ángulo recto.

Varios recorridos posibles permiten realizar la construcción. Cada uno de ellos requiere el uso de herramientas diferentes que podrían asociarse con propiedades distintas, aunque los y las estudiantes no las expliciten de entrada –por no conocerlas o porque el problema no lo demanda–.

Por ejemplo, una manera de resolver el problema es construir la segunda diagonal de modo que pase por el punto medio de la primera, como se muestra en la Figura 13.[8] Esta relación entre ambas diagonales probablemente sea intuitiva

8. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura13.ggb>.

para algunos y, al intentar dibujarla, se encuentren con otras relaciones que deben considerar: su longitud y su inclinación con respecto a la primera diagonal.

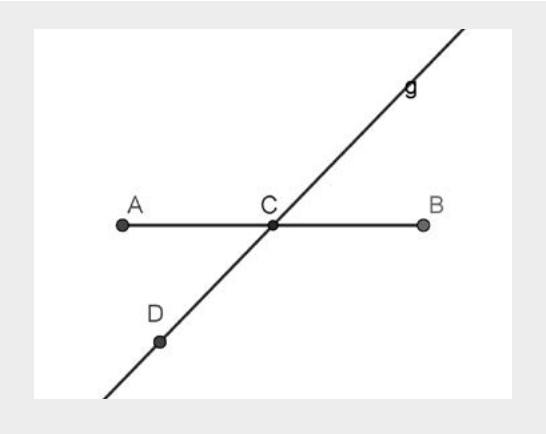


Figura 13. Con la herramienta "Segmento" se trazó el segmento AB de 5 unidades, luego se marcó su punto medio C con la herramienta "Medio o centro" y, finalmente, se construyó la recta *g* definida por los puntos C y D.

Al mover el punto D de la recta, va modificándose el ángulo que forman las dos diagonales. Si los y las estudiantes no identifican que ambas deben ser perpendiculares, el o la docente puede poner en debate esta relación.

En simultáneo, surge el inconveniente de determinar la longitud de la segunda diagonal, que muy probablemente algunos alumnos y alumnas reconozcan como la misma que la primera. El interrogante acerca de cómo lograr que las dos diagonales midan lo mismo demandará recurrir a la herramienta "Longitud" (como variable) o bien a "Circunferencia: centro y radio" (o "Circunferencia: centro y punto"). El radio deberá ser la mitad de la longitud de la primera diagonal (Figura 14).[9]

Es decir, el trabajo de construcción exige apelar a ciertas herramientas, las cuales deben "atrapar" las relaciones que se pretende que cumpla el dibujo que se realiza, de manera tal que al arrastrar o mover cualquiera de sus elementos siga siendo un cuadrado.

Otra opción sería comenzar el dibujo trazando una circunferencia que tenga a esa diagonal como diámetro. Esta relación probablemente no sea identificada en un primer momento, por lo cual el o la docente, si lo considera oportuno, puede ofrecer ciertas pistas. A su vez, será necesario que el radio de la circunferencia mida la mitad de la diagonal, para que el diámetro resulte congruente con esta última.

9. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura14.ggb>.

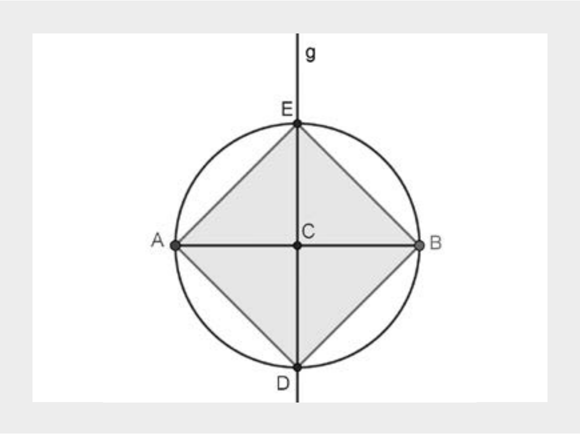


Figura 14. A diferencia del dibujo anterior, la recta *g* se trazó ahora perpendicular al segmento AB. Luego se dibujó la circunferencia con centro en C, pasando por A (o B), y se marcó su intersección con la recta. Posteriormente, usando esos cuatro puntos, se dibujó el polígono ADBE.

Para realizar esta construcción se debe indicar al programa, luego de trazar un segmento AB, que la circunferencia tiene por radio ½AB, tal como se presenta en la Figura 15.

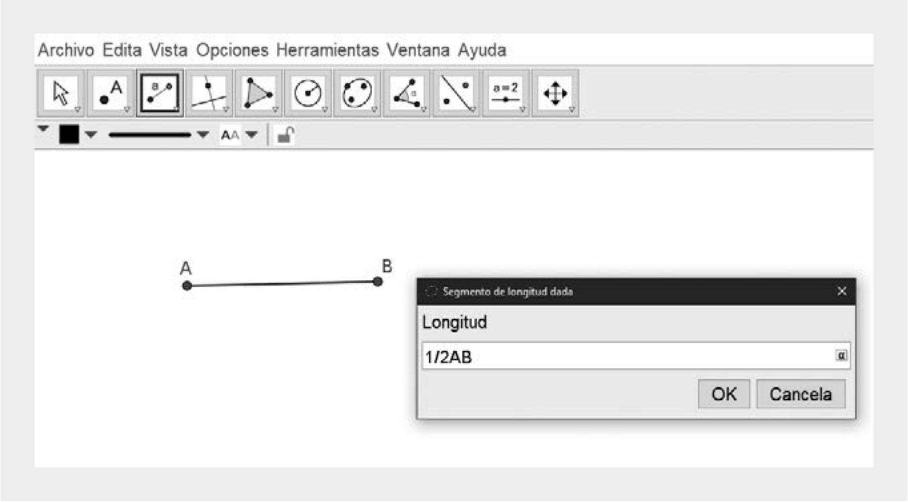


Figura 15. Es necesario ingresar "½AB" para que el radio de la circunferencia dependa de la longitud del segmento AB.

Para avanzar con la construcción, será necesario trazar las dos diagonales de manera perpendicular, lo que equivale a trazar dos diámetros perpendiculares (lo que requiere del uso de rectas o semirrectas e intersecciones con la circunferencia). Los puntos de intersección entre los diámetros y la circunferencia servirán como vértices del cuadrado:

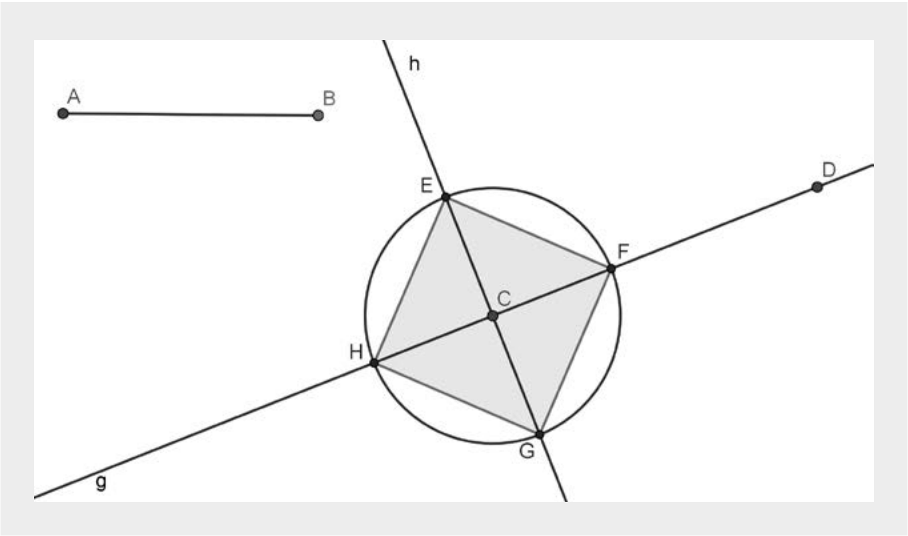


Figura 16. Circunferencia de centro C y radio ½ de AB.
Rectas perpendiculares que pasan por C. HGFE polígono

El dibujo obtenido (Figura 16)[10] efectivamente resulta ser un cuadrado.

Las herramientas utilizadas en algunas de las construcciones no se relacionan con ángulos rectos ni lados iguales, que son las características más "reconocidas" por los y las estudiantes. Esto es una oportunidad para promover un debate en torno a los motivos por los cuales, si se dibujaron diagonales iguales y perpendiculares que se cortan en su punto medio, el resultado es cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales. La congruencia de los triángulos que han quedado plasmados es un punto de apoyo que el o la docente puede compartir con los alumnos y las alumnas como argumento para establecer que el polígono, efectivamente, resultó ser un cuadrado.

ACTIVIDAD 2

Tracen un segmento AB de 6 unidades. Dibujen un rectángulo que tenga a ese segmento como una de sus diagonales. ¿Cuántos rectángulos diferentes se podrán construir? Recuerden que al mover cualquiera de sus elementos debe seguir siendo un rectángulo.

10. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura16.ggb>.

Comentarios

El enunciado propone inicialmente dibujar un segmento de longitud fija, al igual que en el problema anterior. La decisión de que esta longitud no pueda modificarse tiene que ver con el interés de centrar el análisis en torno a la diagonal y su relación con los rectángulos que se asocian a ella. En otra oportunidad, el profesor o la profesora podrá plantear el mismo tipo de problema pero a partir de un segmento variable. Esta cuestión complejiza el análisis de la cantidad de soluciones: si bien sigue siendo infinita, es probable que los y las estudiantes confundan este infinito con la variación de la longitud de la diagonal en vez de considerar la variación de su posición.

La construcción permite retomar algunas relaciones que pudieron jugarse en la resolución del problema anterior. Por ejemplo, que la diagonal AB –que es la que debe trazarse–, también se tenga que cortar en su punto medio con la segunda diagonal y que, además, deba tener la misma longitud. Es posible, entonces, trazar una circunferencia que tenga el centro en el punto medio de AB y que tome por radio a la distancia entre ese centro y A o entre ese centro y B, recurriendo a las herramientas "Medio o centro" y "Circunferencia: centro y punto". Luego, cualquier otro diámetro permitirá construir una segunda diagonal (Figura 17).[11]

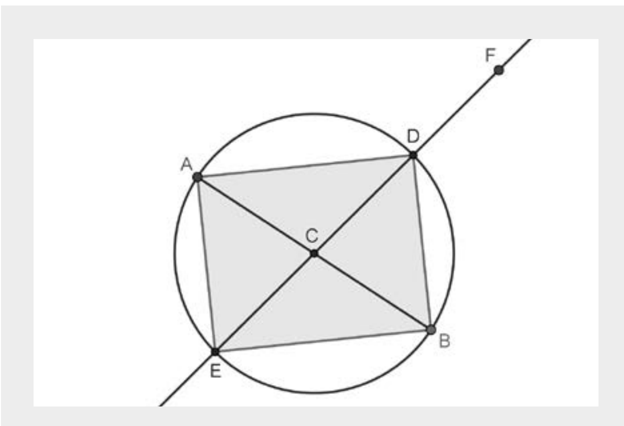


Figura 17. Segmento AB, punto medio C. Circunferencia de centro C que pasa por A (o B). Recta que pasa por F y C. Puntos de intersección E y D –entre la recta y la circunferencia–. Polígono AEBD.

En esta situación resulta interesante discutir con los y las estudiantes la cantidad de soluciones que pueden obtenerse con los datos que se ofrecen. Como el ángulo que forman las diagonales no está predeterminado, el movimiento

11. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura17.ggb>.

de la segunda diagonal colabora en identificar la posibilidad de que haya más de un rectángulo posible.

Otro recorrido que podría utilizarse para la construcción sería: dibujar la diagonal AB de 6 unidades, trazar una recta cualquiera que pase por A y, luego, trazar una perpendicular a esta recta, que pase por B, de manera de garantizar un ángulo recto:

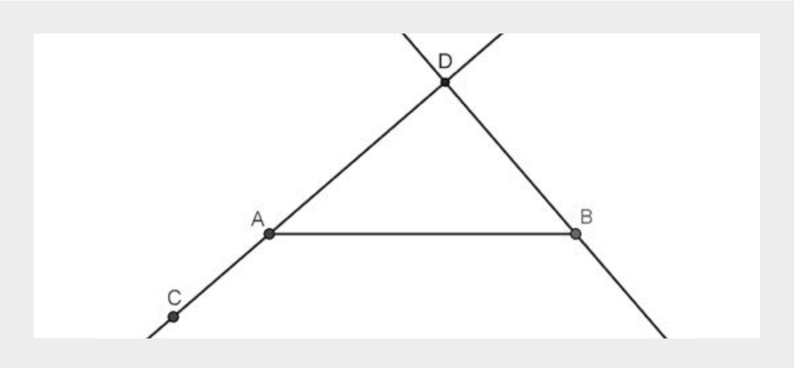


Figura 18. Segmento AB, recta que pasa por A y perpendicular a la recta que pasa por B. Se marcó el punto de intersección entre las rectas.

De esta manera se obtienen 3 vértices del rectángulo: A, D y B. Posteriormente, se pueden trazar rectas perpendiculares a los lados ya definidos, completando el dibujo (Figura 19).[12]

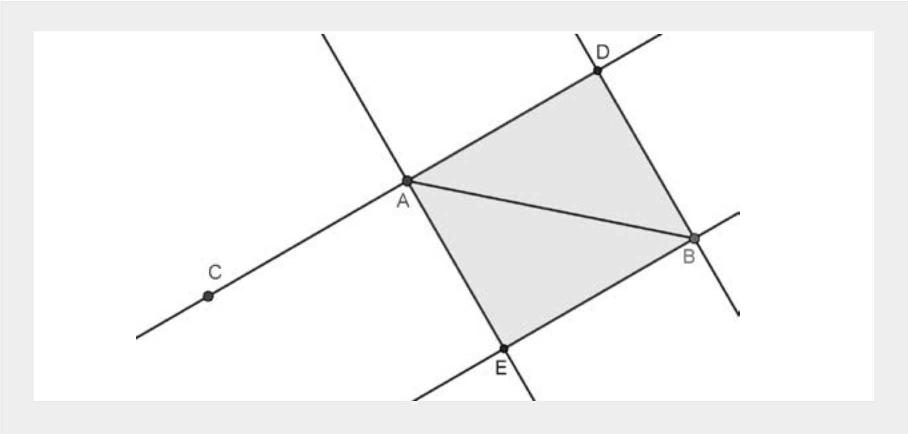


Figura 19. A la construcción de la Figura 18 se le trazaron paralelas a las dos rectas perpendiculares, que pasan por los extremos del segmento AB.

12. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura19.ggb>.

En este caso también se podrán identificar diferentes rectángulos (infinitos) que resultan al mover el punto A o el punto B de la diagonal original o bien al rotar la recta que se hizo pasar por A.

¿Cuál es la diferencia entre ambas construcciones? En el primer caso, se trazó una circunferencia, se recurrió a herramientas que no se vinculan directamente con los cuatro ángulos rectos –definición más reconocida por los alumnos y las alumnas–. En el segundo, en cambio, se recurrió a herramientas que garantizaron que los cuatro ángulos fueran rectos.

Un debate interesante a desplegar con los y las estudiantes se vincula con la posibilidad de "estar seguros" de que los cuatro ángulos que se formaron en la primera construcción son, en efecto, rectos. Se trata de una relación que puede ser explicitada: si las diagonales son iguales y se cortan en el punto medio de ambas, la figura construida es un rectángulo.

Una vez más, la congruencia de triángulos permite elaborar argumentos que garantizan que los cuatro ángulos así construidos son rectos.

Otro aspecto que puede incluirse en el debate se refiere a la relación entre ambas diagonales. Al mover una de ellas y ubicarla perpendicular a la otra, el rectángulo construido se transforma en un cuadrado, remitiendo al problema de la Actividad 1 como punto de apoyo:

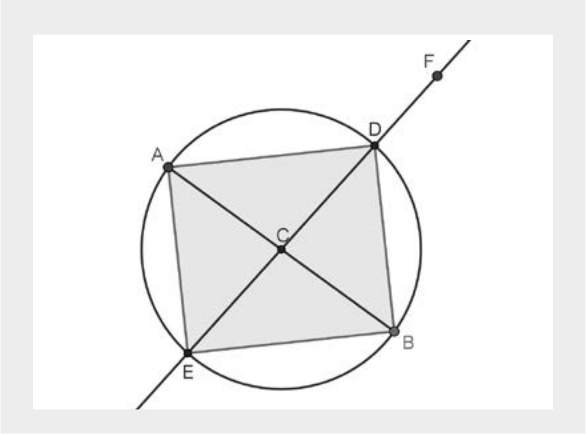


Figura 20. Por ejemplo, al mover B o F de la construcción de la figura 19, se obtiene un cuadrado.

ACTIVIDAD 3

Abran el archivo: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/Link_enunciado_parte2act3.ggb>. Se trata de dos segmentos perpendiculares que son lados de un rectángulo. Terminen de construir el rectángulo sin utilizar las herramientas "Paralela" ni "Perpendicular", de manera tal que al mover cualquiera de sus elementos siga siendo un rectángulo.

Comentarios

Al tener como datos dos lados perpendiculares de un rectángulo, la primera tentación es trazar las paralelas a cada lado; de allí que se inhiba este recurso, para que los alumnos y las alumnas se involucren en la búsqueda de otras relaciones que permitan lograr la construcción.

Una vez más, la circunferencia resulta un recurso pertinente. Es decir, permite trasladar segmentos, preservando su longitud (el radio), tal como se identifica en el siguiente procedimiento (Figura 21):[13]

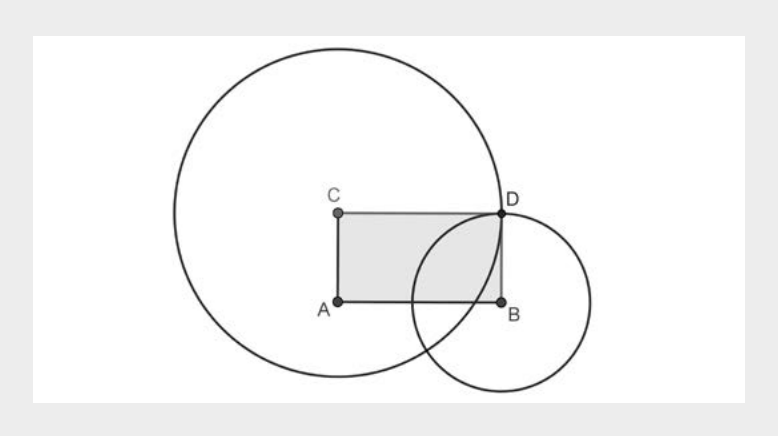


Figura 21. Se trazaron circunferencias, una de centro B y radio AC, otra de centro C y radio AB. Luego se marcó el punto de intersección D –entre ambas circunferencias– y, finalmente, se construyó el polígono ABDC.

Es decir, se trasladan las distancias de ambos lados para que, ahora, generen los dos lados que faltan. Las herramientas utilizadas garantizan que los lados opuestos del cuadrilátero resulten iguales, pero, al mismo tiempo, nada garantiza que los cuatro ángulos sean rectos. Una vez más el docente puede propiciar un debate en torno a las relaciones que permiten dar cuenta de que, en efecto, se trata de un rectángulo.

Se podrá, finalmente, discutir con los alumnos y las alumnas si el rectángulo que se obtiene es único o no. Es probable que aparezca la confusión entre los infinitos rectángulos que se pueden obtener al modificar los lados y la idea de que para cada par de lados hay un único rectángulo.

Los problemas planteados en las actividades 4 y 5 tienen la intención de volver sobre algunas de las relaciones tratadas en las propuestas que desarrollamos hasta aquí.

13. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura21.ggb>.

ACTIVIDAD 4

Tracen una recta y un punto que no pertenezca a la recta. Dibujen un rectángulo cuya diagonal esté en la recta y uno de los vértices sea el punto dibujado de manera tal que, al mover cualquiera de los elementos del dibujo, siga cumpliendo las condiciones planteadas.

Comentarios

Aquí se trata de volver sobre uno de los modos de resolver la Actividad 2. En este caso, la recta dibujada permite, marcando dos puntos que le pertenezcan, ubicar una diagonal sobre ella. El punto que figura como vértice es aquel por donde debe pasar la recta que trazamos sobre uno de los extremos de la diagonal. La perpendicularidad de los siguientes lados garantiza la obtención del rectángulo.

ACTIVIDAD 5

a) *Abran el siguiente archivo: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_enunciado_parte2act5a.ggb>. Al mover los vértices A, B o C el dibujo siempre es un rectángulo. Intenten construir una circunferencia que pase por sus cuatro vértices.*
b) *Abran el siguiente archivo: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_enunciado_parte2act5b.ggb>. Intenten dibujar una circunferencia que pase por los cuatro vértices del paralelogramo.*

Comentarios

Este problema vuelve sobre las relaciones que se pudieron haber utilizado en las construcciones de los problemas planteados en las Actividades 1 y 2: entre diagonales de cuadrados y rectángulos, y los diámetros de las circunferencias que los inscriben. En el caso de la parte a), las diagonales permiten determinar el centro de la circunferencia para poder construirla. En cambio, en el caso de la parte b), es probable que a los y las estudiantes se les presente alguna confusión acerca de la posibilidad o no de construirla. Si siguieran los mismos pasos que en el caso anterior, la circunferencia obtenida pasaría únicamente por dos de los vértices. Es una buena oportunidad para analizar que el centro obtenido no equidista de los cuatro vértices y que nunca podrá ser hallado; es decir, no hay una circunferencia que inscriba a este paralelogramo (salvo que se obtengan casos particulares, como por ejemplo el cuadrado), dado que las diagonales, si bien se cortan en su punto medio, no son iguales.

En este apartado hemos intentado proponer una serie de construcciones que permitan a los alumnos y las alumnas volver sobre las relaciones que caracterizan a las diagonales de cuadrados y rectángulos, y a su relación con las circunferencias de las cuales son diámetros. Asimismo, hemos analizado que las construcciones posibles, a partir de ciertas herramientas, dan cuenta de propiedades de estos cuadriláteros, algunas que probablemente las y los estudiantes reconozcan mientras que otras, no. Entendemos que el debate y la búsqueda de argumentos acerca de las equivalencias entre las propiedades motorizan la entrada al terreno de la demostración así como también a la compleja idea de que, si herramientas diferentes permiten construir las mismas figuras, las propiedades que subyacen a las herramientas deben poder relacionarse de alguna manera. La noción de *equivalencia* es un asunto clave.

LA TAREA DE COPIADO DE UNA FIGURA EN GEOGEBRA

Un objetivo dentro del campo de la geometría, tanto de la escuela primaria como de la escuela secundaria, debería ser que los alumnos y las alumnas sean capaces de distinguir al objeto figura de su representación, el dibujo. Aclaremos estos conceptos también mencionados en la introducción: como menciona Bernard Parzysz (1988 [citado por Laborde y Capponi, 1994: 168]), la figura es una idea, un objeto geométrico teórico; mientras que el dibujo es su representación, algo concreto que puede manipularse.

> Se genera, de esta manera, una especie de paradoja, que, inspirados en Duval, enunciamos así: por un lado, el aprendizaje de las relaciones que caracterizan a las figuras requiere de un trabajo conceptual que supere la percepción, y, por otro lado, el trabajo se apoya fuertemente en los dibujos –es decir, en representaciones–, sin los cuales se ven disminuidas las posibilidades de desplegar una actividad matemática con los alumnos en torno a las figuras (Itzcovich y Murúa, 2018: 74).

En la escuela primaria la tarea de copiar una figura en lápiz y papel está reconocida como una actividad "potente" para que los y las estudiantes avancen en esta distinción. Además, resulta ser una tarea muy fértil para trabajar con la indagación, el reconocimiento y, eventualmente, la producción de las propiedades que definen a una figura. En la escuela secundaria reconocemos que este tipo de tarea no está muy explotada, sin embargo, sostenemos que también podría ser muy interesante trabajar con actividades de copiado en este nivel de la escolaridad.

Ahora bien, en general, el modo de validar que el dibujo realizado es una copia del original suele ser la superposición. Nos podemos preguntar entonces: al utilizar el programa GeoGebra, ¿el tipo de validación es el mismo? Más aún, ¿qué significado adquiere la idea de copia de una figura cuando el modelo original y la copia ya no son objetos estáticos sino dinámicos? ¿Qué maniobras novedosas incorpora el hecho de que el dibujo original también pueda ser transformado mediante el arrastre? ¿Qué significa que dos figuras sean iguales? Algunas de estas preguntas las responderemos en esta parte y otras quedarán a modo de reflexión para el lector o la lectora.

El foco de nuestra propuesta es que los alumnos y las alumnas puedan esbozar una respuesta a la pregunta *qué es hacer una copia con GeoGebra*. Es decir, proponemos definir junto a nuestros estudiantes cuándo un dibujo-GeoGebra es copia de otro. En general, en la enseñanza de la geometría (y nos animamos a decir de la matemática), las definiciones las presenta el o la docente o, a veces, se llega a ellas mediante un trabajo previo con los alumnos y las alumnas. Pero no es muy común que los y las estudiantes sean los productores de una definición. Este tipo de tarea es posible en este caso particular, porque además no hay una definición (o nosotros no la encontramos en la bibliografía leída) instalada dentro del campo de la matemática ni de la didáctica de la matemática.

A continuación presentaremos tres problemas que permiten abordar esta cuestión.

ACTIVIDAD 1

Abran el archivo: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_enunciado_parte3act1.ggb> y copien[14] el dibujo del cuadrilátero inscripto en la circunferencia en otro lugar de la pantalla (Figura 22).

Comentarios

En el enunciado de la actividad no se explicita cuál es el cuadrilátero en cuestión, para que los alumnos y las alumnas tengan que identificarlo. Si el problema se trabaja luego de las propuestas desarrolladas en los apartados anteriores, es probable que las y los estudiantes exploren el dibujo-GeoGebra moviendo los puntos libres y semilibres. Aun conociendo el dinamismo del programa, puede ocurrir que se intente hacer una copia "estática". Es decir, que se haga la copia pensando en que el modelo está dado en lápiz y papel. Si no mueve ningún objeto movible, seguramente se piense que el cuadrilátero es un cuadrado. Más aún, utilizando las herramientas "Distancia"[15] y "Ángulo" se puede reforzar esta conjetura (Figura 23).

14. Justamente por lo mencionado en la introducción de este apartado, no se hace referencia en el enunciado a cuál va a ser nuestra definición de *copia*. Esto será trabajado en la siguiente actividad.

15. El archivo está configurado con una cifra decimal para que la longitud de los lados sea la misma en el cuadrilátero inicial. Al aumentar las cifras decimales, se puede visualizar que, en realidad, los lados del cuadrilátero no miden lo mismo. Sin embargo, la intención es que se identifique que CEBD es un rectángulo al desplazar los objetos movibles.

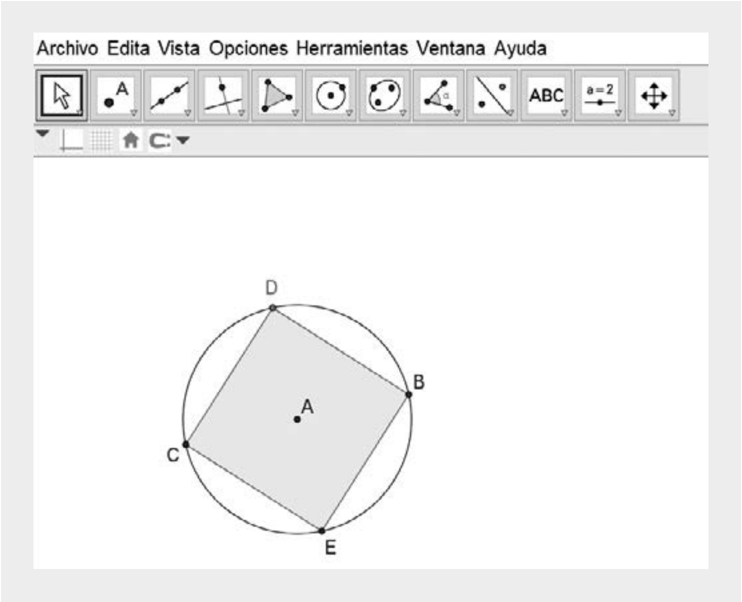


Figura 22. Captura de pantalla de la imagen que se visualiza al abrir el archivo. El dibujo-GeoGebra es una *familia* de *rectángulos* inscriptos en una circunferencia. Los puntos A y B son libres y el punto D es semilibre, se mueve sobre la circunferencia.

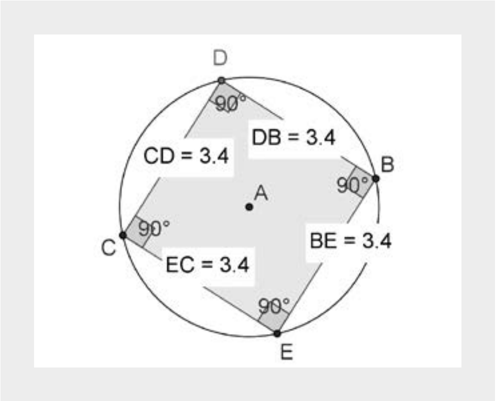


Figura 23. Al utilizar las herramientas "Distancia" y "Ángulo", se puede ver que las longitudes de los lados son iguales y los ángulos rectos.

Si todavía no hubo una apropiación por parte del alumno o de la alumna sobre el uso de las herramientas que involucran a las propiedades que definen a la figura, al mover todos los objetos movibles, el dibujo *se* desarmará. Al o la estudiante que no exploró dinámicamente el modelo, pero que copie un cuadrado inscripto en una circunferencia utilizando las herramientas pertinentes, no se le va a desarmar su dibujo frente al movimiento. Sin embargo, el o la docente puede proponerle que desplace alguno de los puntos movibles del dibujo-GeoGebra original. En este caso, la sorpresa estará en descubrir que el cuadrilátero DBEC no era un cuadrado, sino un rectángulo.

Analicemos ahora algunas construcciones que “soportan” el arrastre y que, en principio, podrían ser aceptadas como una copia:

1) *Comenzando con la circunferencia* vía *diagonales*. Una primera construcción podría resultar de hacer una circunferencia con la herramienta “Circunferencia (centro, punto)”; luego, ubicar un punto I en la circunferencia y, finalmente, trazar dos rectas que pasen por el centro para que contengan a dos diámetros, tal como se puede ver en la Figura 24.[16] Esta construcción pone en juego varios conocimientos trabajados en las partes anteriores de este capítulo.

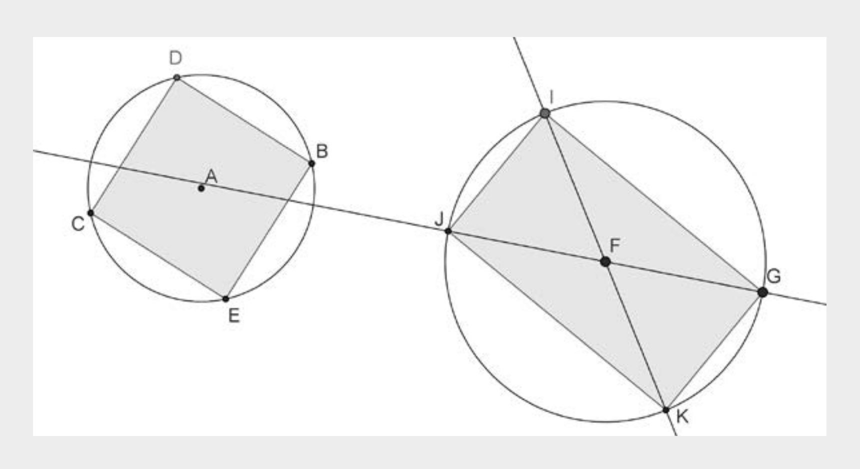


Figura 24. Construcción comenzando por la circunferencia.

2) *Comenzando por el rectángulo.* Otra opción es empezar construyendo un rectángulo y, luego, construir la circunferencia,[17] identificando el centro de la misma (Figura 25).[18]

Al ingresar al enlace del archivo, el lector podrá notar que el comportamiento del dibujo-GeoGebra de la copia no es el mismo que el del modelo. Sobre esta cuestión nos detendremos más adelante.

16. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura24.ggb>.

17. Ver la construcción de la Actividad 5, punto a), del apartado “Relaciones entre cuadrados, rectángulos y circunferencias”.

18. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura25.ggb>.

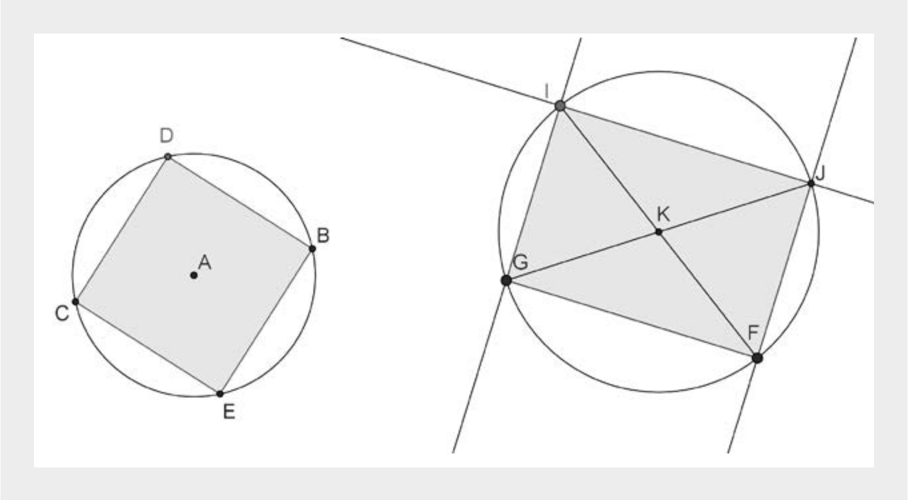


Figura 25. En esta construcción se comenzó construyendo al rectángulo GIJF.

3) *Vínculo entre el dibujo-GeoGebra dado y la copia*. Veamos qué ocurre si también se comienza la construcción por la circunferencia, pero ahora utilizando la herramienta "Compás". Luego de trazar la circunferencia, para hacer el rectángulo es necesario construir dos diámetros cualesquiera. Se pueden ubicar dos puntos en la circunferencia o directamente trazar dos rectas que pasen por F (Figura 26).[19]

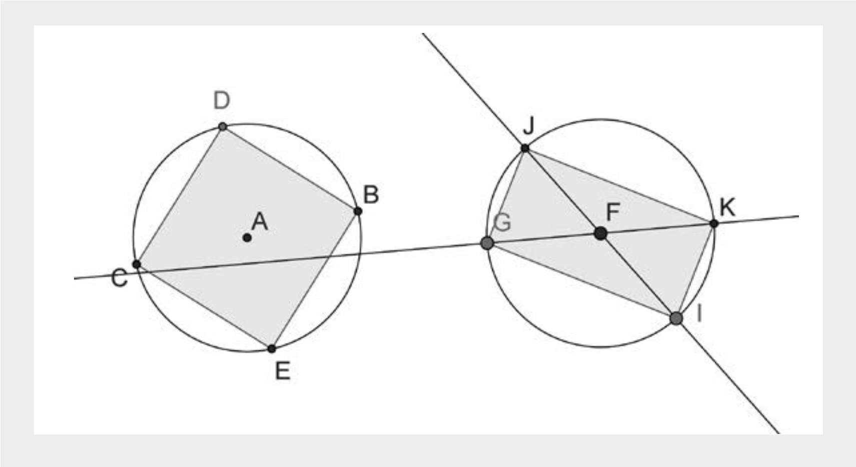


Figura 26. En esta construcción se optó por ubicar los puntos G e I en la circunferencia.

19. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura26.ggb>.

Lo novedoso de esta construcción es que al mover el punto A o B del dibujo original, ¡también se mueve la copia! Aquí a pesar de que el *comportamiento* no es el mismo, hay una *dependencia* entre los dibujos-GeoGebra.

Hasta aquí hemos anticipado algunas construcciones que podrían hacer los alumnos y las alumnas. Obviamente no son todas, pero optamos por mostrar las que consideramos más representativas. Si algún o alguna estudiante resuelve la tarea rápidamente, el o la docente le puede solicitar que haga otra construcción posible. O si comenzó por la circunferencia, puede solicitarle explícitamente que empiece por el rectángulo. También le puede pedir que haga una construcción de forma tal que, al mover el dibujo-GeoGebra original, se mueva también la copia.

En una discusión colectiva sobre este problema se sugiere no invalidar ninguna construcción que "soporte" el arrastre y que además "genere" toda familia de rectángulos inscriptos en una circunferencia. Es decir, las tres formas mencionadas podrían aceptarse como copia, no así la del cuadrado inscripto en una circunferencia. A pesar de que esta construcción no se desarma frente al movimiento, no genera la misma familia.

Imaginamos este momento colectivo con un proyector, para que el profesor o la profesora seleccione algunos alumnos y alumnas (o grupos) y que cuenten cómo hicieron la construcción. Se puede optar por comenzar con construcciones que no "soportan" el arrastre o con la familia de cuadrados inscriptos en una circunferencia. En caso de tener *notebooks*, los y las estudiantes pueden pasar directamente con la computadora y conectarla al cañón para, luego, contar cómo[20] realizaron la copia.

ACTIVIDAD 2

En grupos, completar la siguiente frase: un dibujo-GeoGebra es copia de otro si ....

Comentarios

Al dar esta tarea, podemos anticipar, basándonos en nuestra experiencia de llevar esta actividad al aula, que el foco de las definiciones que se planteen los alumnos y las alumnas va a estar puesto en el *comportamiento*. Es decir, una definición de *copia* puede ser aquella que sostenga que ambos dibujos-GeoGebra se comportan igual. En este caso, el o la docente podrá ir recorriendo los bancos y solicitar que cada uno o cada una explicite a qué se refiere con "igual comportamiento". Una opción puede ser sugerir que usen los nombres

20. Pueden ir mostrando el paso a paso visualizando el protocolo de construcción.

puntos libres, *semilibres* y *fijos*. Por ejemplo: "el centro de la circunferencia A es libre, entonces su correspondiente en la copia también debe serlo" o "D es semilibre porque se mueve sobre la circunferencia, entonces esto mismo tiene que ocurrir en la copia", etc. Tomando esta definición solamente se aceptaría como copia la primera construcción mencionada. También pueden surgir otras definiciones basadas en la superposición. Por ejemplo: si se elige un representante del dibujo-GeoGebra original, es posible mover la copia hasta que se superponga (Figura 27).

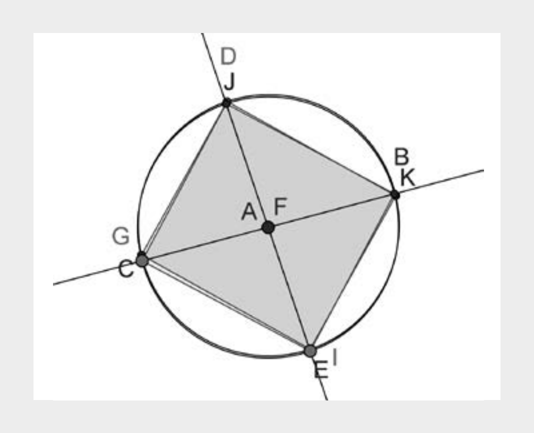


Figura 27. En el caso de la construcción que se inicia a partir de un rectángulo, es un tanto complejo superponer la copia con el original, aunque siempre sea posible hacerlo dado que las familias generadas son las mismas. Si se utilizó "Compás", es más sencillo, porque siempre los radios de ambas circunferencias tienen igual medida.

Una definición interesante es aquella que está basada en las propiedades y no en el *comportamiento*. Una posible versión puede ser: "un dibujo-GeoGebra es copia de otro si las propiedades involucradas son iguales o, en su defecto, equivalentes".

Por último, otra definición de *copia* que puede surgir puede tener relación con la dependencia entre los dibujos-GeoGebra. Es decir, se le puede exigir a la copia que, además de ser rectángulos inscriptos en la circunferencia, dependa del modelo original. Esto es que al mover los puntos A y B, también se mueva la copia.

En un momento colectivo sobre esta actividad es esperable que se discutan cuáles fueron las definiciones que se escribieron. También el profesor o la profesora puede preguntar cuáles de las construcciones vistas en la Actividad 1 serían copia. Tanto la definición que involucra el comportamiento como la que exige dependencia restringen la cantidad de construcciones posibles. Otro aspecto a tener en cuenta es la validación. Por ejemplo, si tomamos la idea de superposición, la argumentación además de ser empírica es imposible de llevar a la práctica, porque hay infinitos rectángulos inscriptos en la circunferencia. Este tipo de trabajo está más ligado a la escuela primaria.

Por las razones esbozadas en el párrafo anterior, a nuestro entender, la definición que proponemos adoptar es la que involucra a las propiedades iguales o equivalentes. Esto además daría pie a seguir profundizando el tema de las equivalencias, abordado anteriormente.

ACTIVIDAD 3

Abrir el archivo <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_enunciado_parte3act3.ggb> y copiar el dibujo en otro lugar de la pantalla, de manera que en la copia estén involucradas las mismas propiedades (o equivalentes) (Figura 28).

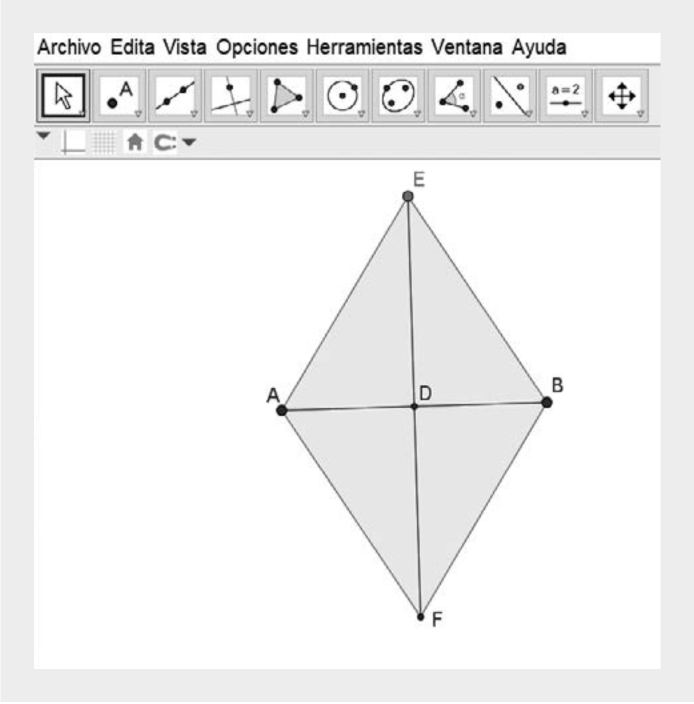


Figura 28. Captura de pantalla de la imagen que se visualiza al abrir el archivo. El dibujo-GeoGebra es una *familia* de rombos.

Comentarios

A diferencia de la actividad anterior, en esta el enunciado explicita cuál es la condición para que la copia sea aceptada como tal. El docente puede adaptar la consigna dependiendo de cuál sea su objetivo. Aclaremos esta cuestión: esta construcción fue realizada trazando la mediatriz del segmento AB, luego se ubicó el punto E sobre la recta y, finalmente, se hizo una circunferencia con centro D y *punto de paso* E. Si el objetivo fuera trabajar la validación sobre el porqué al hacer esta construcción los cuatro lados del cuadrilátero resultan iguales, la definición más apropiada de copia sería la de *igualdad de comportamiento*, ya que para realizar la construcción necesariamente hay que hacer el rombo vía diagonales. En relación a esto, podemos destacar algo que por lo menos a nosotros nos resulta novedoso: *la definición de copia que adoptemos puede ir cambiando dependiendo de los objetivos que tengamos* y, como también esto va a repercutir en las construcciones que son (o no) solución del problema, podemos hablar de que en este caso *la definición es una variable didáctica*.[21]

Además de construir el rombo vía diagonales, otra estrategia posible es utilizar circunferencias para garantizar directamente la igualdad de los lados (Figura 29).[22]

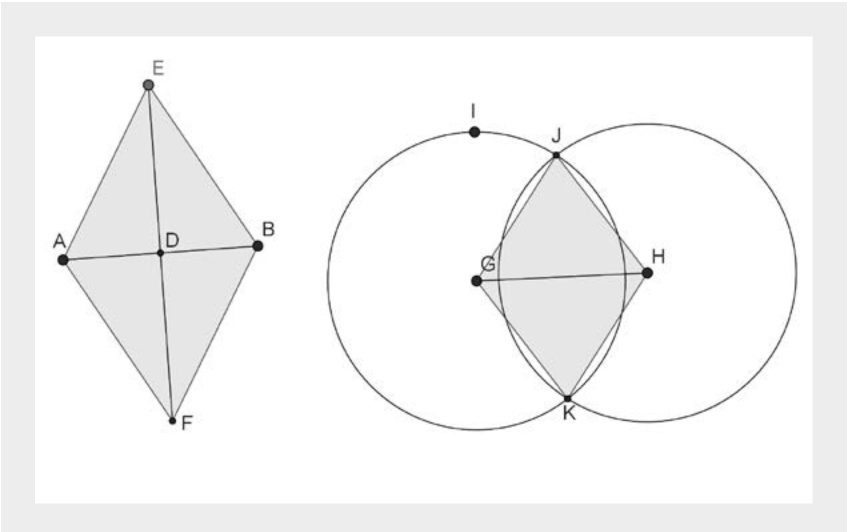


Figura 29. En esta construcción el *comportamiento* no es el mismo que en el dibujo-GeoGebra original, aunque también se trata de una *familia* de rombos.

En este caso, luego de trazar el segmento GH, se hizo una circunferencia de centro G y *punto de paso* I. Luego, se utilizó la herramienta “Circunferencia (centro, radio)”, ingresando en la casilla GI. Esto asegura que las dos circunferencias tengan el mismo radio.

21. Una *variable didáctica* es una condición del problema que modifica las estrategias de resolución y, en consecuencia, el conocimiento necesario para resolver la situación.

22. Se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo1/link_figura29.ggb>.

Algo muy interesante para trabajar en el aula es por qué en esta construcción el rombo desaparece para varias ubicaciones del punto I (Figura 30).

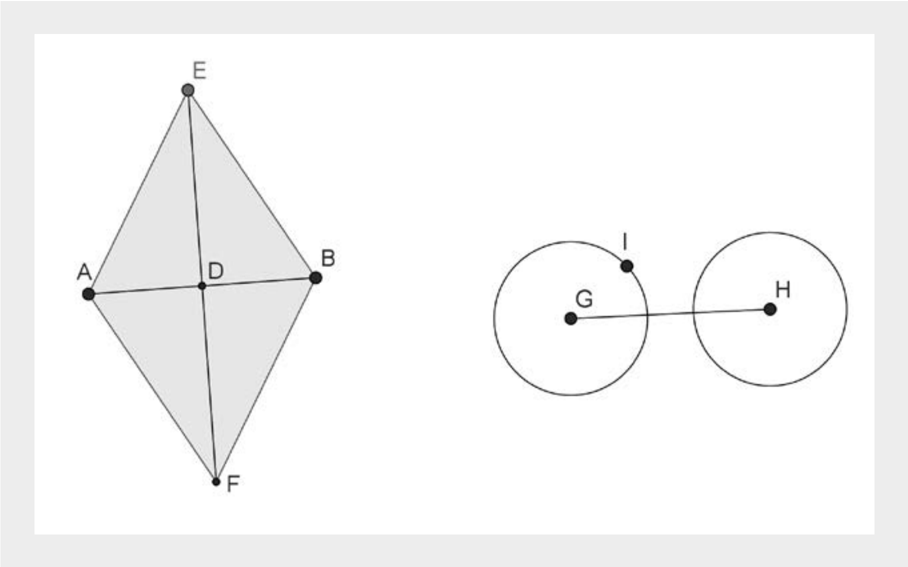


Figura 30. El rombo de la copia desaparece cuando las circunferencias no se intersecan. Esto no ocurre al mover los puntos movibles del dibujo-GeoGebra original, salvo cuando E coincide con D o B, con A.

Al igual que en el problema anterior, hay otras construcciones posibles para construir un rombo. Es interesante que en la discusión colectiva se discutan todas las equivalencias entre las propiedades involucradas.

En este apartado quisimos mostrar las rupturas y las continuidades que se dan en la tarea de realizar un copiado utilizando el programa GeoGebra respecto al mismo tipo de problema efectuado con lápiz y papel. Como pudimos ver, el dinamismo del programa le aporta a la tarea diversas aristas que el o la docente (y los alumnos y las alumnas) tendrá que tener en cuenta.

Además reiteramos que, a nuestro entender, lo más novedoso de esta propuesta es que los y las estudiantes sean quienes produzcan una definición, más allá de que después el profesora o la profesora decida cuál es la más pertinente, de acuerdo al objetivo del problema.

Hay otras variables didácticas sobre las cuáles no profundizamos, pero invitamos al lector o a la lectora a hacerlo, por ejemplo: el dibujo-GeoGebra a copiar puede estar proyectado sobre una pared –o el profesor o la profesora puede tenerlo en su computadora– y un o una estudiante, representante de cada grupo, puede levantarse y explorarlo una cierta cantidad de veces, o directamente la figura a copiar puede estar dada en lápiz y papel y la copia deba hacerse con el programa.

Respecto del GeoGebra, como ya hemos mencionado, es posible: personalizar la barra de herramientas ocultando aquellas que no se crean necesarias, optar por mostrar el protocolo de construcción, dejar todos los objetos de la construcción visibles, etc.

Por último, queremos mencionar que la actividad de copiado tiene que tener detrás un objetivo de enseñanza y no ser un mero juego o desafío para los y las estudiantes. En nuestro caso, además de darle sentido a la definición de *copia*, el foco de los problemas planteados en las Actividades 1 y 3 también está puesto en trabajar con las propiedades de los cuadriláteros, en particular el rectángulo y el rombo.

BIBLIOGRAFÍA

Cappelletti, Graciela (coord.)
2008 *Matemática. Geometría. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio*, Buenos Aires, Dirección de Currícula del Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: <https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf> [consulta: 1 de octubre de 2019].

Duval, Raymond; Godin, Marc y Perrin-Glorian, Marie-Jeanne.
2005 "Reproduction de figures à l'école élémentaire", en Castela, Corine y Houdement, Catherine (eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2004*, París, ARDM/IREM de París 7, pp. 5-89. Disponible en: <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR05003.pdf> [consulta: 1 de octubre de 2019].

Itzcovich, Horacio
2005 *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Itzcovich, Horacio y Murúa Rodolfo
2018 "GeoGebra: 'nuevas' preguntas sobre 'viejas' tareas", en *Yupana*, nº 10, vol. 16, pp. 71-85. Disponible en: <http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/Yupana/article/view/7698/11098> [consulta: 1 de octubre de 2019].

Laborde, Colette
1997 "Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría", en Puig, Luis (ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática,* Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica/Una empresa docente de la Universidad de los Andes, pp. 33-49.

Laborde, Colette y Capponi, Bernard
1994 "Cabri Géomètre constituant d´un milieu pour l´apprentissage de la notion de figure géométrique", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, nº 12, vol. 14, pp. 165-210.

Sadovsky, Patricia; Parra, Cecilia; Itzcovich, Horacio y Broitman, Claudia
1998 *Matemática. Documento de trabajo nº 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*, Buenos Aires, Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: <http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/67-matematica-documento-de-trabajo-no-5-la-ensenanza-de-la-geometria-en-el-20-ciclo-actualizacion-curricular-educacion-general-basica-1998> [consulta: 1 de octubre de 2019].

CAPÍTULO 2

Introducción a la noción de función a partir del trabajo con gráficos cartesianos: dependencia y variabilidad

Cecilia Lamela y Valeria Ricci

INTRODUCCIÓN

El trabajo con las funciones atraviesa gran parte de la escuela secundaria. Progresivamente, se va abordando el estudio de diferentes funciones: lineal, cuadrática, polinómica, exponencial, logarítmica, entre otras. La pregunta que nos convoca en este capítulo es: ¿qué enseñar en el inicio del trabajo con las funciones?

Concebimos la clase de matemática como un espacio de producción de conocimiento; este es construido por los y las estudiantes a partir de interactuar con situaciones intencionalmente propuestas por el o la docente. Interacciones que implican intercambios con los problemas, entre alumnos y alumnas, con el profesor o la profesora. Y en estas interacciones se van desplegando un conjunto de prácticas, en cuyo seno los y las estudiantes irán construyendo sentidos de los conceptos matemáticos tratados en las aulas (Brousseau, 2007; Sadovsky, 2005).

Es en este contexto que se propone considerar a la actividad matemática escolar como una actividad de modelización. Esto supone enfrentarse a varias decisiones al realizar un problema: qué relaciones se estudiarán, con qué herramientas matemáticas se van a operar, cómo se interpretan los resultados, cómo validar las soluciones matemáticas que resultan como solución del problema (Sadovsky, 2005). En consonancia con esta mirada sobre la matemática que se juega en la escuela, entendemos a las funciones como herramientas que posibilitan modelizar distintos fenómenos, en particular aquellos que se refieren a *procesos de cambio*.

La noción de *función* en la matemática no fue siempre la misma, ha ido cambiando a lo largo de la historia según los conocimientos disponibles, el tipo de problemas presentes en la matemática y el paradigma científico vigente en cada época. La definición formal de *función*, como aplicación entre conjuntos numéricos, es entonces la construcción de un concepto a lo largo de la historia. Sin embargo, las funciones ya eran consideradas herramientas de la actividad matemática o extramatemática mucho antes de que la disciplina arribara a su definición formal. Las funciones son herramientas que permiten describir y analizar, tanto cualitativa como cuantitativamente, fenómenos de cambio. De este modo las ideas de *dependencia entre variables*, *variabilidad* y *cambio* son constitutivas a la noción de función. La definición conjuntista de las funciones oculta estas ideas de *variabilidad* y *dependencia*, las cuales sí se atrapan en las fórmulas y en los gráficos (Ruiz Higueras, 1998; Hanfling, 2000).

Optamos aquí por aproximarnos a la noción de función a través de estudiar la *dependencia entre variables*, antes que definirla como correspondencia entre conjuntos numéricos; abordando problemas ligados a situaciones de *dependencia* y *variabilidad*, que permitan a los y las estudiantes recontextualizar los aspectos modelizantes de las funciones. De este modo, intentaremos atrapar el carácter dinámico de las mismas. En particular, el gráfico de las funciones tendrá un lugar destacado en los problemas que se planteen, en tanto permite representar esa variación y determinar la dependencia y conexión entre esas variables, poniendo en escena el dinamismo antes mencionado.

Esta propuesta didáctica se posiciona en línea con lo sostenido en los núcleos de aprendizaje prioritarios (NAP) y en los saberes seleccionados en el documento *Materiales curriculares* para el Ciclo Básico de la Educación Secundaria de la provincia de La Pampa (Ministerio de Cultura y Educación, 2009), en particular en su eje "Álgebra y funciones", donde se propone el uso de relaciones entre variables en situaciones problemáticas que requieran: interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos; leer directamente de los gráficos, e inferir información a partir de ellos; y reconocer las limitaciones de los gráficos para las representaciones de la realidad.

Acerca del trabajo en la clase de matemática, se plantean actividades que –más allá del quehacer específico sobre el contenido que nos ocupa en esta oportunidad– buscan aportar a la construcción de las cuestiones que se reconocen, también en el documento *Materiales curriculares* del Ministerio de Cultura y Educación del Gobierno de La Pampa, como "Objetivos Generales para el Ciclo Básico".

LECTURA DE INFORMACIÓN EN LOS GRÁFICOS CARTESIANOS

En este apartado proponemos cinco actividades en las que intentaremos abordar la complejidad que comporta la representación en gráficos cartesianos de las funciones. En particular, estos problemas involucran la lectura de información de un gráfico cartesiano que representa una relación entre variables que se recortan de una situación contextualizada. Para realizar esta lectura se llevan a cabo distintas operaciones sobre los gráficos, por ejemplo, en unos casos alcanza con leer información puntual, mientras que en otros es necesario identificar un conjunto de datos que permitan construir una lectura global de la situación. A su vez, a lo largo de las actividades aparecerán preguntas cuyas respuestas son certeras, pero también otras que no se pueden contestar con seguridad y que llevarán a la aparición de ciertos supuestos y/o al reconocimiento de varias respuestas posibles.

En el análisis que haremos intentaremos identificar diferentes acciones que los alumnos y las alumnas tienen que realizar para contestar las preguntas planteadas, así como las distintas ideas que se pondrán en juego.

Para el desarrollo de estas actividades –salvo la Actividad 4–, proponemos una primera etapa de abordaje del problema en pequeños grupos, para luego discutir las resoluciones en el espacio colectivo de trabajo.

ACTIVIDAD 1

La intención con esta actividad es comenzar a trabajar la interpretación y el análisis global de una situación contextualizada, mediante la observación de un gráfico que la modeliza. Además de una lectura punto a punto en los ítems a) y b), se proponen otras preguntas donde una lectura global del gráfico permite un análisis cualitativo del fenómeno que representa, habilitando el análisis de las variaciones que van ocurriendo en dicho proceso.

Una paciente está internada y se le coloca un termómetro especial que registra la temperatura en cada instante. La siguiente gráfica (Figura 1) describe la evolución de la temperatura con el paso del tiempo a partir del momento de internación.[23]

- *a) ¿Qué temperatura tenía la paciente al finalizar el primer día de internación? ¿Y al sexto?*
- *b) ¿Cuándo tuvo 37 °C? ¿Y 36,5 °C? ¿Y cuándo tuvo 38 °C?*
- *c) ¿Cuál fue la máxima temperatura que tuvo la paciente? ¿Cuándo se produjo? ¿Y cuál fue la mínima temperatura que tuvo la paciente y cuándo se produjo?*
- *d) El informe médico dice que la paciente tuvo una recaída. ¿Es posible saber cuándo fue? Justifiquen su respuesta.*
- *e) ¿En qué momento la temperatura no varió?*
- *f) ¿Durante qué día se produjo el mayor descenso de la temperatura?*

23. Este problema es análogo al ejemplo 20 que aparece en *Actualización de Programas de Nivel Medio. Programa de Matemática. Primer Año. 2002* (Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2002).

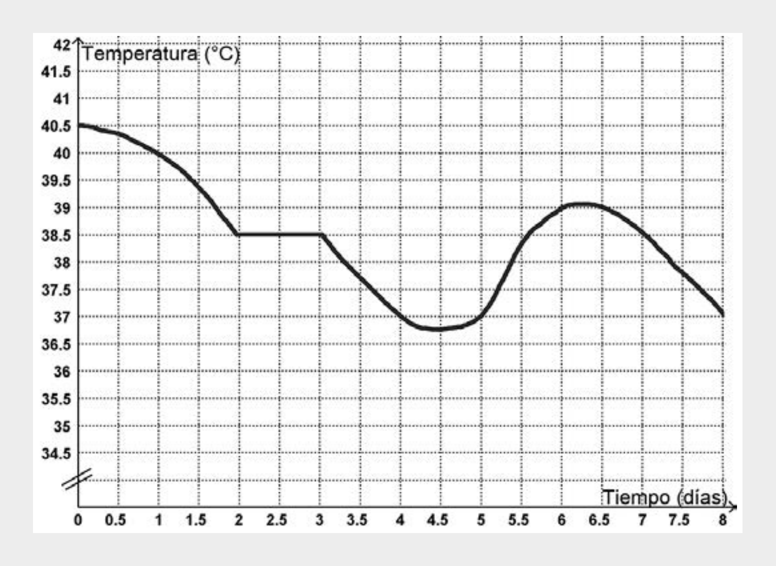


Figura 1

Comentarios

Antes de que comiencen a responder las preguntas, podría haber un momento colectivo en donde se identifique qué representa ese gráfico. En ese momento se puede leer que, en horizontal, está el tiempo expresado en días y, en vertical, la temperatura. Algo a señalar con el grupo de estudiantes es que en ese eje aparecen dos rayas. Será necesario notar que esas rayas indican que no se consideran los valores de temperaturas menores a 34,5 °C. ¿Por qué pueden dejarse de lado? Porque si se consideran temperaturas de cuerpo humano, no es posible tener valores menores a 34,5°. En algunos de los gráficos que se presentarán aparecerán estas rayitas, que indican que es posible no considerar algunos valores en tanto no son relevantes para la relación representada.

Como mencionamos anteriormente, el ítem a) propone una lectura puntual. Para saber la temperatura al finalizar el primer día –y el sexto día de internación–, es necesario que los y las estudiantes pongan en juego alguna estrategia como, por ejemplo, situarse en el valor 1 del tiempo expresado en días y subir hasta "chocarse" con la curva. Desde allí será necesario leer en las temperaturas cuál valor se relaciona, a través de esa curva, con el valor 1 del tiempo. Aparece entonces una primera relación: esa curva es la que permite relacionar las temperaturas que tuvo la paciente en los distintos momentos de internación, es decir, dicha curva *representa los valores de la relación* entre los días de internación y la temperatura que tuvo la paciente.

En el ítem b) aparecen varias cuestiones a discutir con los alumnos y las alumnas en el espacio colectivo:

- No hay un solo momento en el que la paciente haya tenido 37 °C. Si bien se puede utilizar un procedimiento similar al aplicado en el ítem a), esta vez al pararse en el valor 37° de temperatura y desplazarse hacia la derecha hasta encontrarse con la curva, es necesario “continuar” el valor de 37° para determinar que este se alcanzó al finalizar el día 4, el día 5 y el día 8.
- Pudo no haber tenido alguna temperatura, como es el caso de 36,5 °C. Y eso se puede saber porque la curva no “toca” ese valor.
- Este gráfico no informa de manera exacta los momentos en los que tuvo 38 °C, a diferencia de lo que sucede con 37 °C. Puede suceder que los y las estudiantes ensayen posibles respuestas, por ejemplo, buscando el promedio entre las preimágenes de 38,5° y 37,5 °C. Será discusión del espacio colectivo que esa es una posible entre otras y que todas son inexactas. En este momento el o la docente decidirá junto con la clase cuál o cuáles respuestas se tomarán como válidas. A modo de ejemplo: “entre 3 y 3,5 días”, “comenzando el cuarto día de internación”, “3,3 días aproximadamente”.
- La máxima temperatura se produce en el momento de internación. Justamente, este momento se representa con el 0 en el tiempo y muestra que la curva se encuentra sobre el eje vertical. Para algunos o algunas estudiantes esto podría ser desconcertante. En el caso de la mínima temperatura, no se puede precisar de manera exacta, ya que es un valor entre 36,5° y 37 °C. Esta pregunta invita a retomar al menos dos de las cuestiones analizadas en el ítem anterior:
  - la paciente en ningún momento registrado tuvo una temperatura de 36,5°, por lo cual la mínima deberá ser mayor,
  - y no se puede saber de manera exacta cuál fue la mínima temperatura, pero sí se puede aproximar.

Esto es interesante: si bien no se puede saber de manera exacta cuál fue la temperatura mínima –habrá estudiantes que dirán que “no se puede saber”–, sí es viable acotar el valor posible. Por lo tanto, no es que “no se puede saber”, sino que “no se puede saber con exactitud”.

El ítem d) invita a los alumnos y las alumnas a mirar el gráfico en relación con la situación descripta. Que la paciente haya tenido una recaída no implica que la curva “caiga”, sino que, en el contexto del problema, tener una recaída implica que vuelva a subir la temperatura. Algunos o algunas estudiantes pueden sostener que es desde el valor 4,5, ya que allí comienza a subir. Otros u otras pueden sostener que es recién desde 5, porque allí empieza a ser mayor que 37 °C, o bien cuando pasa los 38 °C –después de 5,5–, pues consideran temperatura de fiebre a más de 38°. Como sea, será cuestión de acordar con el total de la clase en qué momento se considera que aumenta la temperatura de manera tal que se pueda afirmar que la paciente tuvo una recaída con su enfermedad. Es interesante, si surge, señalar que no es posible saber, a partir de este gráfico, por qué tuvo una recaída.

Para contestar el ítem e), tal vez sea necesario acordar qué significa que la temperatura no varió, es decir, que no hubo cambio. Será interesante discutir cómo se lee en el gráfico que la temperatura no varía: la línea horizontal de la curva señala que el "tiempo transcurre" mientras que la temperatura se mantiene en 38,5 C°. En este ítem aparece por primera vez la necesidad de señalar un intervalo para la temperatura. No se está proponiendo trabajar la notación de intervalo, pero sí reconocer que, a diferencia de los ítems anteriores, aquí la respuesta no es un valor, sino una serie de valores, por ejemplo, "entre el 2 y el 3 la temperatura estuvo estable" o bien "a lo largo del tercer día de internación la temperatura no varió".

El ítem f) también implica considerar intervalos de tiempo, en este caso, el transcurso de cada día, es decir, considerar la diferencia de temperatura entre 0 y 1, en donde varió 0,5 grados –o medio grado– desde 40,5 °C a 40 °C; entre 1 y 2, en donde varió 1,5 grados desde 40 °C a 38,5 °C, y así sucesivamente. En particular se puede analizar que desde 2 a 3 la variación fue de 0°, lo que es lo mismo que decir que no varió (igual que en el ítem anterior). Este análisis puede requerir un trabajo en el espacio colectivo y sería posible organizar esta información en una tabla.

ACTIVIDAD 2

En esta actividad se presenta un tipo de gráficos que representan la *distancia a un lugar en función del tiempo*. Interpretar en estos gráfico que el eje horizontal representa una distancia 0 a un lugar podría ser confuso para los y las estudiantes. Tal vez sea necesario aclarar oralmente de qué se trata el gráfico si surge algún inconveniente.

Una cuestión interesante a discutir con toda la clase es que este gráfico no muestra un recorrido, en este caso de Bruno, sino la distancia a su casa; esto es: Bruno no caminó como muestra el gráfico. Las preguntas que se plantean permiten empezar a analizar esta cuestión.

Los abuelos de Bruno lo invitaron a él y a sus primas a almorzar. La casa de Bruno, la de sus primas y la de sus abuelos quedan todas en la misma calle. Bruno sale caminando a las 11:30, pasa a buscar a sus primas por su casa y se van a lo de sus abuelos. Al regreso, vuelven juntos. El siguiente gráfico (Figura 2) representa la distancia de Bruno a su casa en cada momento del día domingo hasta que regresa nuevamente a su casa.

a) ¿Cuándo estuvo a 1 km de su casa? ¿Y a 3 km de su casa?
b) ¿A qué distancia de su casa se encontraba a la media hora de haber salido? ¿Y a las 11:50? ¿Y a las 13:10 y 13:20?
c) ¿A qué hora volvió Bruno a su casa?
d) ¿A qué distancia de la casa de Bruno está la casa de sus primas? ¿Y a qué distancia queda la casa de sus abuelos de la casa de sus primas?

e) ¿Durante cuánto tiempo estuvieron en la casa de sus abuelos?
f) Al regreso, se quedaron en la casa de sus primas. ¿Cuánto tiempo estuvieron?

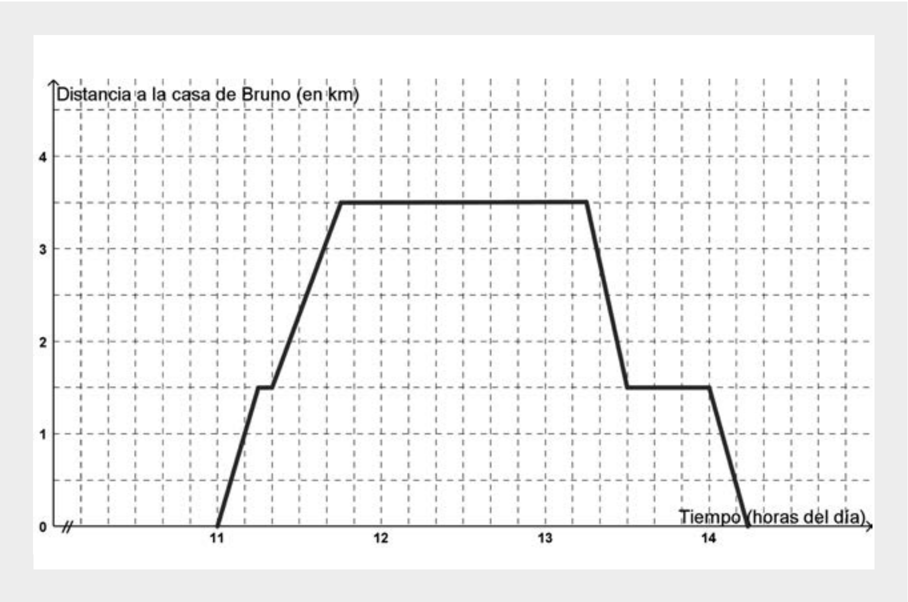


Figura 2

Comentarios

Para responder el ítem a), los chicos y las chicas tienen que poner en evidencia que hubo dos momentos en los que Bruno estuvo a 1 km y otros dos momentos en los que se halló a 3 km de su casa. Esto se puede interpretar: pues son momentos a la ida y momentos a la vuelta de su visita a la casa de sus abuelos. En el caso de la distancia a 1 km de su casa, el primer momento se puede leer de manera exacta, a los 10 minutos de haber salido. En cambio, el segundo momento está entre las 14:00 y 14:10. Si bien con ciertos conocimientos de proporcionalidad directa se puede asegurar que exactamente a las 14:05 estuvo a 1 km de distancia, no se espera en esta actividad llegar a esa precisión. El caso de la distancia a 3 km de su casa, en ambos momentos, tanto de ida como de vuelta, no es posible leerlo exactamente. Se podría tomar como respuesta correcta, por ejemplo, que estuvo a esa distancia cuando eran casi las 11:40 y cuando eran casi las 13:20.

El ítem b) también implica una lectura puntual, y aparecen dos modos de preguntar sobre la hora: según el tiempo transcurrido desde que Bruno salió de su casa y según la hora del día. Se espera poner en relación cómo leer de este doble modo el gráfico. Nuevamente, aparecen valores de distancia exactos –a las 11:50 y a las 13:20 se encontraba a 3,5 km– y también valores aproximados –a la media hora de haber salido, es decir 11:30, y a las 13:10 no se pueden responder con exactitud–.

La pregunta del ítem c) acerca de a qué hora regresó puede ser confusa para los alumnos y las alumnas. Podrían pensar que no es posible saber en este gráfico cuándo Bruno volvió a su casa. De nuevo, el foco estará en poder analizar que el eje horizontal "representa la casa de Bruno" en términos de los y las estudiantes. Algo interesante a preguntar, en el momento de poner en común las resoluciones con toda la clase, es si la casa de Bruno se encuentra en el eje de coordenadas o en el punto del eje en donde "regresa" a su casa (donde "finaliza" la curva). De este modo se busca separar el gráfico del recorrido: no hay un punto del gráfico que represente la ubicación de la casa de Bruno, pero sí podemos saber que la distancia 0 significa que está en su casa.

El ítem d) nuevamente permite discutir, en el espacio colectivo, cómo se lee en el gráfico dónde se ubican la casa de las primas y la de los abuelos. Al igual que el ítem anterior, no hay puntos en el gráfico que determinen que "ahí" están esos lugares, sino que leer en el gráfico en términos de relaciones permite conocer esas distancias. En este caso, es necesario poner en evidencia que los tramos horizontales se relacionan con la casa de sus primas y la de sus abuelos.

Los ítems e) y f), junto con el d), invitan a darles sentido a tales tramos horizontales del gráfico. Esos tramos no se refieren a que "Bruno caminó en línea recta", sino que, justamente, Bruno no se alejó ni se acercó a su casa, pues su distancia no cambió, aunque el tiempo sí transcurre.

Analizadas estas preguntas en el espacio colectivo, será interesante que el o la docente realice otras preguntas para "cuestionar" este tipo de gráficos, por ejemplo: ¿podemos decir que a las 11:20 Bruno dio la vuelta a la esquina, dado que el gráfico se curva? También se podría preguntar cuántos kilómetros recorrió en total, para identificar que aunque el valor mayor representado en el gráfico es de 4 km, en realidad recorrió 8 km, al contar su viaje de ida y de vuelta.

ACTIVIDAD 3

A diferencia de las actividades anteriores, esta presenta un gráfico cartesiano que describe una relación entre variables discretas.

Alejandra es fanática de los libros, y siempre que puede se compra uno nuevo para leer. En su librería preferida se manejan con un sistema de "créditos", de manera que cada compra le otorga distinta cantidad de créditos, que se acumulan en una tarjeta y después puede canjear por un libro nuevo. El siguiente gráfico (Figura 3) representa la cantidad de créditos que tiene Alejandra en función de la cantidad de compras que realizó:

a) ¿Cuántos créditos le dio la primera compra? ¿Y la segunda?
b) ¿En qué número de compra aprovechó para canjear sus créditos?

c) *Una de las compras no le otorgó créditos a Alejandra porque compró un libro en oferta que no estaba incluido en la promoción de la tarjeta de créditos ¿Qué número de compra fue?*
d) *¿Hubo compras que le otorgaron la misma cantidad de créditos? ¿Cuáles fueron y cuántos créditos le sumaron?*
e) *Se sabe que para la décima compra Alejandra canjeó 50 créditos y le quedaron 30 en la tarjeta. Completá el gráfico con los puntos correspondientes a la novena y a la décima compra.*

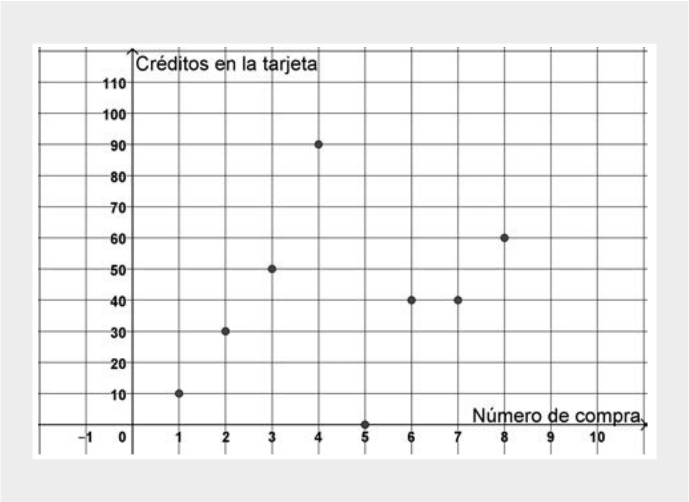


Figura 3

Comentarios

El primer ítem busca que los y las estudiantes entren en la lógica del problema, y que puedan diferenciar la cantidad de créditos acumulada de la cantidad de créditos que aporta cada compra. Por ejemplo, luego de la segunda compra, Alejandra tenía acumulado un total de 30 créditos, lo que es representado en el gráfico por el punto (2; 30). Sin embargo, la segunda compra en sí misma le otorgó solo 20 créditos, lo que se puede identificar haciendo la resta entre 30 y 10 o en el gráfico –dibujando el "escalón" que se forma entre ambos puntos–.

A continuación, el ítem b) requiere mirar globalmente el gráfico para reconocer que la cantidad créditos desciende de la quinta a la sexta compra, donde la tarjeta queda vacía; es por eso que se puede deducir que Alejandra canjeó 90 créditos al realizar la quinta adquisición.

Para el ítem c) es posible que algunos o algunas estudiantes afirmen que el libro de oferta fue la compra número 6 y no la 7. Ante esto, el o la docente podría proponer que analicen la compra anterior y posterior a la que eligieron como respuesta: si luego de la quinta compra tenía 0 créditos y luego de la sexta tenía 40, es porque esta última otorgó créditos; y si luego de la séptima seguía teniendo 40 créditos, es porque fue aquella compra la del libro en oferta (ya que no se modificó la cantidad total de créditos en su tarjeta).

El ítem d) recupera la diferencia identificada en el ítem a), de manera de reconocer que no se está preguntando en qué momento Alejandra tuvo 20 créditos en su tarjeta, sino si alguna compra le otorgó esa cantidad. Es interesante que para responder a esta pregunta no es necesaria una lectura puntual sino una global del gráfico, que analice la variación en la cantidad de créditos entre las distintas compras. De esta manera, se podrá responder que la segunda, tercera y octava compra le aportaron 20 créditos cada una.

Al finalizar la discusión colectiva a propósito de las resoluciones de los y las estudiantes para los primeros ítems, el o la docente podría proponer un nuevo ítem para este problema:[24]

> *f) ¿Les parece que tiene sentido unir los puntos que forman este gráfico? Si responden que sí, expliquen cómo los unirían; si responden que no, expliquen por qué.*

Consideramos que esta pregunta se verá nutrida por la discusión colectiva anterior, y apunta a concluir que no tiene sentido, en esta situación, unir los puntos del gráfico. Posibles justificaciones serían afirmar que no podría existir una compra número 1,3 o que la cantidad de créditos cambia en forma abrupta cada vez: por ejemplo, cuando Alejandra realiza la tercera compra y le cargan los créditos en su tarjeta, pasa de tener 30 a tener 50, sin en ningún momento haber tenido 40, 45 ni 30,25. A su vez, podría surgir en el aula la idea de que unir puede ofrecer una lectura rápida de cómo cambió la cantidad de créditos a medida que Alejandra compraba libros, y, por ejemplo, se podría notar más claramente la disminución que sucedió en la quinta compra. Sin embargo, es importante que los y las estudiantes puedan comprender que si bien ese trazo sería una ayuda auxiliar, no representaría realmente la variación de la cantidad de créditos. La cuestión de si unir o no los puntos del gráfico se volverá a poner en juego en la segunda parte de esta propuesta, pero desde otro enfoque, ya que las variables graficadas no serán discretas –como en este caso–, sino continuas, aunque se realice un registro limitado (discreto) de su comportamiento. Argumentar la postura sobre la posible unión de los puntos en un caso donde la variable es continua requerirá argumentos distintos a los planteados en este problema, los cuales serán profundizados más adelante.

ACTIVIDAD 4

El trabajo con estas actividades y otras similares que proponga el o la docente, en las que los y las estudiantes analicen gráficos que representan relaciones

24. Podría proponerlo de forma oral.

entre variables de una situación contextualizada, será el punto de apoyo para incorporar algunas cuestiones teóricas. Sostenemos que la tarea de resolución de problemas en clase permite una serie de interacciones en las que los y las estudiantes producen conocimiento. Pero es necesario generar un momento de reflexión sobre lo realizado para reconocer, de todas esas relaciones puestas en juego, cuáles son aquellas importantes de retener. Es tarea del profesor o de la profesora dar lugar a ciertas cuestiones del lado de la teoría. Ahora bien, estamos pensando que estas cuestiones teóricas tengan anclaje en la resolución previa de las actividades.

Es así como de las interacciones que surjan a partir de las tareas realizadas en la clase –entre los y las estudiantes con el problema, con compañeros y compañeras y/o con el o la docente–, se pueden reconocer distintas cuestiones sobre las funciones estudiadas y su representación en gráficos cartesianos. La noción de qué es una función y los conceptos de dominio, imagen y preimagen de valores, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos locales, variable dependiente e independiente, aparecen en las respuestas a las preguntas planteadas, aun cuando estas nociones no hayan sido definidas formalmente.

A continuación proponemos una posible tarea de sistematización para realizar con toda la clase. Este trabajo parte del registro que puedan tener los y las estudiantes en sus carpetas. Por eso, es importante asegurarse de que en el transcurso de la realización de las actividades anteriores tomen registro tanto de sus resoluciones como de las conclusiones a las que se arriban en el espacio colectivo.

En estas clases hemos trabajado con distintos gráficos. Vuelvan a los gráficos que analizamos y registren a qué hace referencia cada uno de ellos, qué relaciona.

Comentarios

Este enunciado se podría proponer oralmente. A su vez, el trabajo de los chicos y las chicas puede ser individual, en pequeños grupos o entre todo el colectivo de la clase, junto con el o la docente. En el caso de que no sea claro para los y las estudiantes qué se espera que hagan, es posible volver con toda la clase a la Actividad 1 y analizar que en ese gráfico se relacionan la *temperatura de un paciente* y *los días de internación.*

En el momento del trabajo colectivo se puede ir registrando en el pizarrón, a modo de ejemplo:

En los gráficos que estudiamos hasta ahora vimos las siguientes relaciones:

- *en la Actividad 1: la temperatura de la paciente y el tiempo de internación expresado en días;*

- *en la Actividad 2: la distancia a la casa de Bruno en km y la hora del día domingo;*
- *en la Actividad 3: la cantidad de créditos en la tarjeta y el número de compras.*

Junto a este despliegue sobre lo realizado es posible presentar que se están estudiando *relaciones entre variables*, definiendo que las *variables* son esas cantidades o magnitudes que van cambiando en cada una de estas situaciones: la temperatura, el tiempo, la distancia a un punto, la cantidad de créditos, el número de compras. Además se está estudiando *el modo en que cambian esas variables*, por ejemplo, en el caso de la Actividad 2, se está estudiando cómo varía o cómo cambia *la distancia a la casa de Bruno en km* a medida que transcurren *las horas del día domingo*.

En cuanto a la noción de *función*, tal como lo hemos mencionado en la introducción, optamos por aproximarnos a ella través de las nociones de *dependencia* y *variabilidad*, antes que mediante la correspondencia entre conjuntos. Es por esto que no consideramos necesario, al menos en este momento, recurrir a la definición conjuntista de función.[25] En cambio, en este momento sí es posible ir aportando algunas ideas que se apoyan en lo realizado y que irán nutriendo la construcción de la noción de función por parte de los y las estudiantes. En particular, se espera caracterizar a las funciones como *las relaciones entre dos variables que se recortan de una situación contextualizada, donde una cambia cuando cambia la otra, pudiéndose ver este cambio en los gráficos cartesianos.*

Si bien una característica fundamental de las relaciones entre variables para ser funciones es la existencia de un único valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente, elegimos por el momento no abordar esta cuestión, dadas las actividades trabajadas. De este modo, reconocemos que estamos tomando algunas características –a nuestro entender fundamentales– como la *dependencia* y *variabilidad*, dejando la posibilidad de abordar otras para más adelante. En estas actividades la *unicidad* se hace presente desde el contexto de manera implícita, y sostenemos que para discutir su sentido en la definición de función es necesario desplegar un trabajo con otro tipo de actividades, en particular algunas que muestren relaciones que no cumplen con la unicidad.

Con lo mencionado anteriormente queremos explicitar que no es la intención de esta actividad dejar cerrada una definición de función, pero sí poner en evidencia que en las relaciones estudiadas hasta ahora una de las variables cambia/varía *en función* de la otra. Así, para la Actividad 2 se podría explicitar que se está estudiando la distancia a la casa de Bruno *dependiendo de* la hora del día domingo y que esto se suele nombrar como *distancia a la casa*

25. Una *función* es una relación entre dos conjuntos, a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto.

de Bruno en función de la hora del día domingo. De este modo, se podrían explicitar las funciones para cada actividad trabajada: en la Actividad 1, se estudia *temperatura de la paciente en función del tiempo de internación* y, en la Actividad 3, *cantidad de créditos en la tarjeta en función del número de compras*.

También, si el o la docente lo cree pertinente, puede hacer referencia en este momento a las nociones de *variable dependiente* e *independiente*. Algo que es necesario tener en cuenta cuando hablamos de dependencia funcional es que, en el sentido común y considerando por ejemplo la situación que describe la Actividad 1, la temperatura de una paciente no solo "depende" del tiempo. Es así como la idea de dependencia está relacionada con las variables que se recortan. En la relación temperatura y horas del día, queda determinada la dependencia funcional en la enunciación: *temperatura en función de las horas del día*.

Por otro lado, es posible aprovechar este momento de síntesis y revisión sobre lo realizado para instalar ciertos conceptos como *gráficos cartesianos*, *ejes*, *plano cartesiano*, etc. A modo de ejemplo: "Estos gráficos se llaman *gráficos cartesianos* y representan relaciones entre dos magnitudes que varían, que cambian. Estos gráficos se representan en dos ejes: un eje horizontal y otro vertical, que se llaman *ejes cartesianos*. La relación entre las dos variables se suele representar por puntos, curva o tramos rectos".

ACTIVIDAD 5

En esta actividad se propondrá realizar una lectura global de los gráficos en relación con la situación que se describe.

Tres personas, que viven en diferentes ciudades, viajaron en auto a Mar del Plata para sus vacaciones. Cuando se les preguntó qué tal fue su viaje, cada uno dijo esto:

- *Ariel: "Salimos a la mañana, porque teníamos muchos kilómetros que recorrer. El primer tramo lo hicimos bastante rápido, pero más adelante nos encontramos con que estaban arreglando la ruta y se atascó bastante el tráfico. Después de un tiempo ya se normalizó todo, y pudimos continuar el viaje. Llegamos a las 14:00 a Mar del Plata. Ah, hacia el final del viaje tuvimos que parar a cargar nafta".*
- *Belén: "Cuando salimos no habíamos desayunado, así que luego de un rato de estar viajando ya quisimos parar a comer algo. El viaje estuvo bien, no tardamos mucho. Hay momentos donde se puede ir a mayor velocidad, otros a menor, depende de la cantidad de autos, ¿no? No me acuerdo a qué hora llegamos, pero seguro fue antes de las 15:00".*
- *Camila: "Voy seguido a Mar del Plata, y en general fue como siempre, es fácil porque la ruta es toda recta. Viajamos un tiempo, paramos en*

una estación de servicio para cargar nafta y seguimos. El problema fue que uno de mis amigos se olvidó una campera en el lugar donde habíamos parado, así que tuvimos que volver a buscarla, y al final nos quedamos ahí y almorzamos. Normalmente desde mi ciudad tardamos 6 horas en llegar, pero claro, esta vez tardamos más.

Decidan cuál de los siguientes gráficos podría representar la relación distancia total recorrida por cada turista en función del tiempo:

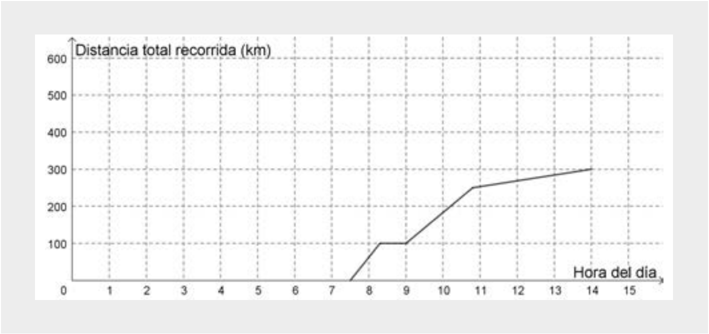


Figura 4. Gráfico 1

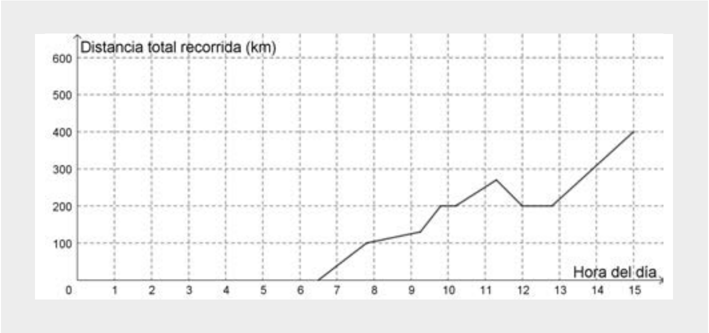


Figura 5. Gráfico 2

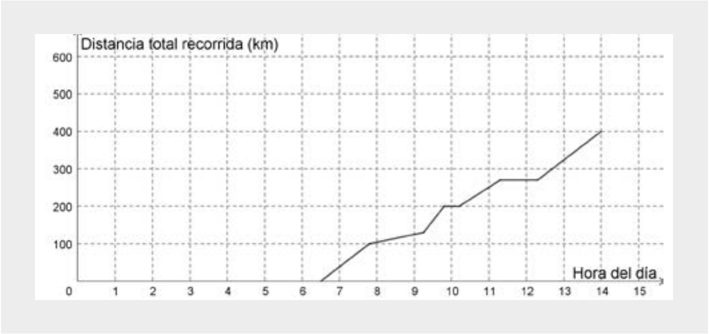


Figura 6. Gráfico 3

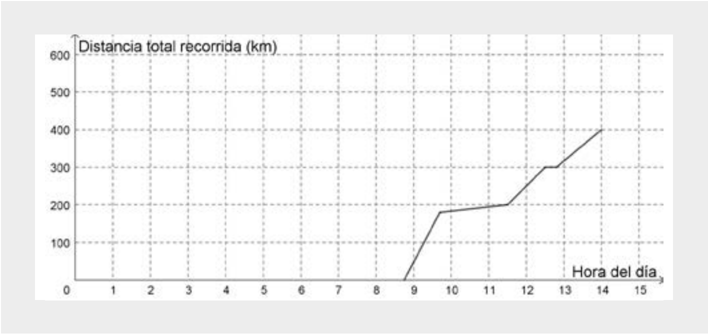


Figura 7. Gráfico 4

Comentarios

En el enunciado se presentan tres textos que plasman lo dicho por distintos turistas, los cuales los y las estudiantes deberán relacionar con su gráfico correspondiente; este representa la función *distancia total recorrida en función de la hora del día* para cada viajero, y quedará un gráfico sin texto relacionado. Lo interesante de esta tarea es que por el tipo de información que aporta lo que dijeron los turistas, el análisis de los gráficos no será "punto a punto", sino más cualitativo, más global. El único dato que garantiza un valor puntual es que Ariel llega a Mar del Plata a las 14:00. El resto de la información es, en algunos casos, ambigua, por ejemplo, el "salimos temprano" –esto implicará observar la totalidad de los gráficos, para notar que todos salen por la mañana, por lo que el dato no es útil–, y, en otros, requerirá observar las distintas formas de crecimiento de la curva, que en esta ocasión está relacionada con la velocidad a la que iba el auto y también con la duración de las paradas. Este reconocimiento de la velocidad puede surgir de modo intuitivo en los y las estudiantes, con ideas como "va más para arriba" o "la línea está más aplastada", y será el o la docente quien podrá pedir más precisión sobre esta idea a lo largo del trabajo con la actividad.

Al analizar detenidamente los gráficos y los textos, los grupos de estudiantes podrán identificar que el Gráfico 1 corresponde a Belén y el Gráfico 4, a Ariel, con mayor o menor discusión previa. Sin embargo, la elección del gráfico de Camila puede resultar más compleja, y es un asunto importante para retomar en el momento del trabajo colectivo con la actividad. En principio, los alumnos y las alumnas pueden haber seleccionado los Gráficos 2 y 3 como correspondientes a este caso, pero es allí donde juega un papel importante la relación que estos representan: a diferencia de la Actividad 2, en estos gráficos no se representa la función *distancia a un punto en función del tiempo*, sino *distancia total recorrida en función del tiempo*. De esta forma, no podría ser posible que la distancia disminuyera al pasar el tiempo y, por lo tanto, el Gráfico 2 no tendría sentido. Sin embargo, siendo que Camila "vuelve para atrás" en su viaje para buscar la campera perdida, algunos o algunas estudiantes pueden pensar que es justamente este gráfico el que representa aquel hecho. El Gráfico 2 está propuesto con una intencionalidad didáctica específica, que es la de aportar a la idea de que la forma de la curva no tiene por qué tener relación con el “dibujo” de la situación. Esta cuestión suele resultar difícil, para ciertos o ciertas estudiantes, en el trabajo con gráficos cartesianos de funciones y resultará interesante retomarla en actividades posteriores. A su vez, en el contexto de esta propuesta, para fortalecer la idea de por qué el gráfico correcto es el 2 y no el 3, se puede referenciar a la Actividad 2 y mostrar que allí la curva sí “bajaba”, porque se estaba graficando la distancia a la casa de Bruno, y no la distancia total que él había recorrido.

A partir de la tarea de relacionar los gráficos con los textos se podrán explicitar distintas cuestiones sobre la situación y sería posible que el o la docente presentara nuevas preguntas. Según el grupo, algunos de estos interrogantes podrían ser necesarios en un comienzo para orientar la tarea de identificación de los gráficos. A modo de ejemplo:

- *¿Qué variables están representadas en los gráficos? ¿Por qué en todos los gráficos hay una “zona vacía” a la izquierda?*
- *¿Quién vive más cerca de Mar del Plata? ¿Y más lejos?*
- *¿Quién tardó más en llegar? ¿Quién llegó primero?*

Es decir, todas estas preguntas se podrían responder mirando los gráficos –sin reconocer a qué turista corresponde cada uno–, como para generar una primera interacción con las cuatro opciones, o también se podrían proponer una vez que ya se hubiera discutido a qué turista corresponde cada una.

Luego de identificar cuál gráfico va con quién, se podrían hacer otras preguntas disparadoras de nuevas discusiones, que permitieran precisar algunas cuestiones. Por ejemplo:

- *Belén dijo que en algunos momentos se podía ir a mayor velocidad, y en otros a menor. ¿Cómo se puede reconocer esto en el gráfico?*
- *Entre las 11:00 y las 14:00, ¿quién recorrió mayor distancia?*
- *¿Aproximadamente a qué hora Ariel se encontró con el atascamiento del tráfico?*
- *¿Cuánto tiempo tardó Ariel en cargar nafta?*

En particular, estas preguntas buscan poner la mirada en el reconocimiento de las distintas velocidades de crecimiento, y en el análisis de los “escalones” que se forman en el gráfico (Figura 8). Por ejemplo, en el gráfico de Belén se puede reconocer que entre las 9:00 y las 11:00 (aproximadamente) viajó a una mayor velocidad que de 11:00 a 14:00, porque en las primeras dos horas recorrió cerca de 150 km y en las últimas tres horas recorrió solo alrededor de 50 km.

La cuestión de estudiar cómo se cambia la variable dependiente y poder reconocer esto en el gráfico será un asunto importante que permitirá

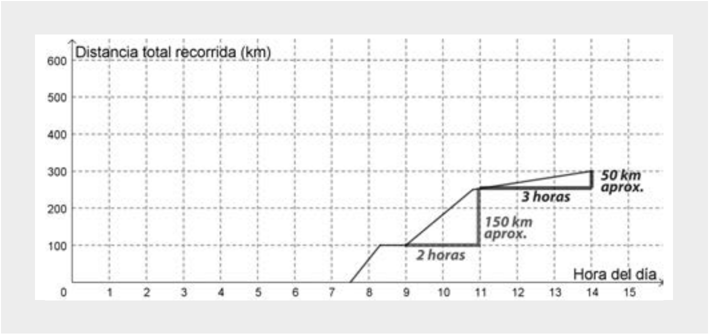


Figura 8

caracterizar a distintos tipos de funciones más adelante en la escolaridad (por ejemplo, posibilitará distinguir funciones de variación uniforme de las que no lo son), por lo que resulta potente desarrollar este tipo de análisis con los y las estudiantes en esta oportunidad. De todas formas, este análisis se profundizará en el último apartado de este capítulo, destinado a la lectura de gráficos cualitativos.

En todas las actividades presentadas hasta aquí, se pone en relación la situación que se estudia con el gráfico que representa una función que se recorta de aquella situación: qué se puede conocer de la situación descripta a partir del gráfico y qué no. ¿Por qué decimos *una* función que se recorta de aquella situación y no *la* función? Tomemos como ejemplo la Actividad 2. Ante la misma situación descripta, es posible recortar otras variables y, por consiguiente, otras funciones: *distancia de Bruno a la casa de sus abuelos en función de las horas del día* o *distancia total recorrida por Bruno en función de las horas del día*, por ejemplo. Estas otras funciones que se recortan de la misma situación generan gráficos diferentes. Este asunto será retomado en el próximo apartado, en el marco de un conjunto de actividades en torno a la producción de gráficos cartesianos.

PRODUCCIÓN DE GRÁFICOS CARTESIANOS

En este apartado abordaremos un recorrido para propiciar la producción de gráficos cartesianos por parte de los y las estudiantes. En la Actividad 1 se propondrá trabajar con una función presentada a través de una tabla de valores. Se plantearán preguntas para leer los datos que presenta la tabla, y sus limitaciones y sus diferencias con la información que se puede leer en un gráfico cartesiano. La Actividad 2, y luego del trabajo colectivo a propósito de la primera actividad, se propone realizar –tal vez por primera vez– un gráfico posible para esta función. En un segundo momento, se propicia que en pequeños grupos se analicen varios de los gráficos elaborados para la consigna anterior, y luego se discuta entre toda la clase sobre ellos. A partir de este intercambio colectivo, se espera poder desplegar con los y las estudiantes una síntesis teórica que pueda concluir, acordar y/o presentar ciertas convenciones a la hora de hacer gráficos cartesianos (la ubicación de las variables independiente y dependiente en los ejes, la posición del origen de coordenadas, la conveniencia del orden de los valores en los ejes, la decisión de unir o no los puntos y cómo hacerlo, entre otros asuntos). Por último, en la Actividad 3 se propondrá producir gráficos a partir de otros registros de representación de una función.

ACTIVIDAD 1

En este primer problema aparece como registro inicial una tabla de valores, por lo que se podrá identificar qué cuestiones son similares y cuáles se diferencian y tienen particularidades propias en relación con las del trabajo con gráficos cartesianos. Específicamente, varias de las preguntas de la actividad apuntan a analizar momentos o temperaturas que no están registrados en la tabla; pues se harán presentes distintos supuestos para dar respuesta a ellos. Este será el núcleo del abordaje de este problema junto con la representación de una función a través de una tabla de valores.

En un observatorio meteorológico de la ciudad de Bariloche a lo largo de un día se registró la temperatura cada dos horas, empezando a las 0:00. Anotaron estas temperaturas registradas en la Tabla 1:[26]

- *a) ¿Cuál es la temperatura a las 10:00? ¿Y a las 21:00?*
- *b) En un cierto momento del día se registró una temperatura de 4 °C. ¿Se puede saber a partir de la tabla qué hora era?*
- *c) ¿En qué momentos del día la temperatura se mantuvo estable?*
- *d) ¿Cuál habrá sido la temperatura máxima de ese día? ¿A qué hora?*
- *e) ¿Se puede saber en qué momentos del día la temperatura subió y en cuáles bajó?*
- *f) ¿En algún momento hizo una temperatura de 4,5 °C?*

Comentarios

En este nuevo registro, por ejemplo, el pedido por temperaturas u horarios registrados en la tabla se puede contestar con total seguridad. Este es el caso

26. Este problema es análogo al ejemplo 21 que aparece en *Actualización de Programas de Nivel Medio. Programa de Matemática. Primer Año. 2002* (Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2002).

Hora	Temperatura
0	5 °C
2	1 °C
4	1 °C
6	0 °C
8	2 °C
10	4 °C
12	8 °C
14	10 °C
16	7 °C
18	4 °C
20	3 °C
22	2 °C
24	0 °C

Tabla 1

del ítem a), con la pregunta por la temperatura a las 10:00 o del b), donde aparecen dos momentos distintos en los cuales se registraron 4 °C. Sin embargo, como dijimos anteriormente, la complejidad aparece cuando se pregunta por valores que no se encuentran en la tabla.

Para responder qué temperatura hizo a las 21:00 –en el ítem a)–, muchas veces los alumnos y las alumnas piensan que contestar "no se puede saber" es suficiente. El o la docente puede incitar a pensar que más allá de no haberse registrado una temperatura en ese horario, necesariamente existió una temperatura a las 21:00, y que se busca saber cuál fue, aunque no se pueda establecer con certeza. Se puede invitar a la clase a partir de preguntas como: ¿es posible saber cuál fue aproximadamente la temperatura en ese horario a partir de los datos registrados en la tabla? Algunos o algunas estudiantes pueden decir que en ese momento sería de 2,5 °C, suponiendo implícitamente que la temperatura se comporta de manera proporcional entre las 20:00 y las 22:00, aunque en la realidad probablemente no suceda así. Como sea, se comienza abrir una variedad de posibles respuestas, todas inexactas y sujetas a la situación que se describe, la temperatura de una ciudad a lo largo de las horas del día.

Del mismo modo, en el ítem c), una respuesta posible es que entre las 2:00 y las 4:00 la temperatura se mantuvo estable, pero también algún o alguna estudiante podría decir que entre esas horas la temperatura “podría haber subido muy poquito y luego volver a bajar”.

En la pregunta d), aunque la temperatura máxima registrada sea de 10°, es posible que la máxima “del día” haya sido mayor, y no hay elementos para saber cuál habrá sido ni si fue antes o después de las 14:00.

Ante este tipo de preguntas, los y las estudiantes podrán ensayar muchas respuestas diferentes entre sí, y todas aproximadas. Sin embargo, el texto del problema –que aporta el contexto de esta situación– permite recortar la incertidumbre sobre estas cuestiones y ofrecer cierto “control” sobre cómo responder. Es decir, siendo que la tabla corresponde a las temperaturas de la ciudad de Bariloche a lo largo de un día, habrá varios supuestos que se podrán sostener, como, por ejemplo, que no tendría sentido que la temperatura máxima hubiera sido de 20°C.

El gran abanico de respuestas que genera la influencia de todos estos supuestos se presenta como un tema para estar atentos desde la enseñanza. Porque aunque resulta interesante analizar las distintas opciones en clase, también puede suceder que ante la presencia de muchas variaciones posibles los y las estudiantes se sientan abrumados, o desorientados, entre las opciones. Aquí será el o la docente quien analice la conveniencia de hasta dónde sostener algunas discusiones y en qué momento hacerlo. De la misma forma que en problemas anteriores, es importante acordar con los y las estudiantes qué supuestos se establecerán sobre la situación y cuáles respuestas serán tomadas como válidas.

La pregunta e) podría requerir hacer explícito el supuesto de que existe cierta monotonía en el aumento y descenso de la temperatura ambiente, es decir, que su comportamiento no da “saltos muy inesperados”, sino que sube y baja coincidiendo aproximadamente con cómo suben y bajan los valores de la tabla.

Por otro lado, la aparición de muchas respuestas posibles para algunas de estas preguntas les permitirá a los estudiantes, en una instancia de trabajo colectivo, enfrentarse con argumentos y afirmaciones distintos a los propios. Así, se presenta en la clase la tarea –bien interesante desde el punto de vista de la enseñanza– de tener que escuchar argumentos críticamente, comprenderlos, cuestionarlos y, luego, aceptarlos o refutarlos.

Por último, el ítem f) invita a mirar de otro modo los valores de la tabla. Una primera distinción a trabajar con los chicos y las chicas es que no se está preguntando por un registro de 4,5°, sino si en algún momento se alcanzó esa temperatura. En este caso a partir de la tabla, es posible asegurar que hubo momentos del día en los que se alcanzó una temperatura de 4,5°: si a las 0:00 la temperatura es de 5°C y luego a las 2:00 es de 1°C, necesariamente la temperatura fue de 4,5°C en algún momento intermedio. Esta idea –que vuelve a aparecer en los intervalos entre las 10:00 y las 12:00, y entre las 16:00 y las 18:00– requiere utilizar que la temperatura es una variable continua, cuestión que los y las estudiantes pueden tener disponible, aunque sea implícitamente. Esta pregunta se puede relacionar a algunas cuestiones que se plantearon en el trabajo con gráficos cartesianos, pues es posible saber que la temperatura de 4,5°C se logra en cierto intervalo, pero no en qué momento exacto. A su vez, alguna o algún estudiante podría decir que se podría lograr una temperatura de 4,5°C a las 18:30, por ejemplo, "si la temperatura sube un poquito antes de bajar". Ante esto, será la situación del problema –siendo que es un horario durante el atardecer– la que permitirá poner en cuestión esta posibilidad y, nuevamente, será central el papel de la negociación colectiva, gestionada por el o la docente, sobre qué se considerará válido según los supuestos sostenidos para resolver la actividad.

Luego de esta discusión se podrán agregar otras preguntas, por ejemplo, retomando el ítem b), si además de los valores registrados de 4 °C, pudo haber en otros momentos del día esa misma temperatura aunque no esté registrado en la tabla.

Se puede concluir esta parte de la tarea poniendo en relieve aquellas cuestiones que son posibles de conocer con distintos grados de certeza y aquellas que se pueden inferir de la situación, a partir de tener una tabla de valores que represente una relación entre variables.

ACTIVIDAD 2[27]

Esta actividad está organizada en dos momentos. En el primero la propuesta es realizar un gráfico cartesiano que represente la función *temperatura de la ciudad de Bariloche en función de las horas del día*, estudiada en la actividad anterior. Estas producciones serán el punto de partida para en un segundo momento discutir colectivamente acerca de las condiciones que debe tener un gráfico cartesiano.

Proponemos desarrollar esta actividad en dos clases en diferentes días.

Primer momento

La primera consigna tiene por intención que las y los estudiantes realicen, tal vez por primera vez, un gráfico cartesiano. Si el o la docente considera o ve que algunos alumnos o algunas alumnas no pueden avanzar en esta tarea, puede proponerles recuperar la síntesis teórica que se había realizado en la Actividad 4, cuando pudieron haber reconocido algunas cuestiones que se ponen en juego en los gráficos cartesianos.

¿Cómo quedarían representados los valores de la tabla de la Actividad 1 en un gráfico cartesiano como los que estuvimos estudiando en los problemas anteriores? Realizá, en forma individual, un gráfico que considerés adecuado

27. Esta actividad fue diseñada junto al profesor Juan Pablo Luna.

para representar la función temperatura de la ciudad de Bariloche en función de las horas del día.

Comentarios

Queremos destacar una cuestión, es una intención de esta actividad que sean las alumnas y los alumnos quienes busquen formas de representar la información de la tabla, ahora en un gráfico, registro con el que ya interactuaron en problemas anteriores. Es por esto que en este momento el o la docente no deberá validar los gráficos producidos; pues es esperable –y deseable– que surjan gráficos muy diferentes entre sí, y por eso se propone que esta instancia de la actividad sea individual. En relación con esto, puede ser importante aclarar en la clase que no se guíen por lo que haga el compañero o la compañera, ya que puede haber más de un gráfico correcto. La no intervención docente durante la producción de los gráficos tiene como propósito que estos representen de modo genuino las ideas de los y las estudiantes. Justamente, estas ideas se pondrán en discusión en un siguiente momento para analizar si los gráficos producidos permiten representar los valores de la tabla y leer información sobre la situación.

Al finalizar la tarea individual de las y los estudiantes, el o la docente se llevará los gráficos realizados para seleccionar de los producidos cuáles le interesa discutir, y así preparar la discusión colectiva posterior.

Segundo momento[28]

En este segundo momento se propone un trabajo colectivo: analizar varios gráficos distintos, que serán presentados por el o la docente. Luego, a partir de la discusión colectiva, este análisis permitirá establecer ciertas convenciones a la hora de producir gráficos.

A continuación les presentamos varios gráficos posibles para la actividad anterior, que representan la temperatura de la ciudad de Bariloche en función de las horas del día. Analicen cada uno de los gráficos considerando:

- *¿el gráfico representa los datos de la tabla?*
- *¿cómo se podrían contestar con dicho gráfico las preguntas del enunciado, en particular las preguntas d) y e)?*

28. El análisis realizado se nutre de las discusiones sostenidas en el equipo docente de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la UNIPE, integrado por Valeria Borsani, Mara Cedrón, Betina Duarte, Juan Pablo Luna y Carmen Sessa.

Comentarios

Es importante notar con la clase, al momento de compartir la consigna, que la idea no es decir si cada uno de los gráficos "está bien hecho" o no, sino que la propuesta de "analizarlos" se orienta a entenderlos, a encontrarles la lógica. Por ejemplo, podría suceder que un gráfico representara los valores de la tabla, pero sin embargo no permitiera leer cierta información de la situación estudiada. Allí entra en juego la segunda pregunta, que propone tratar de responder, a partir de cada uno de los gráficos, cuándo sube y cuándo baja la temperatura y cuál es la máxima, y que pretende que puedan identificar cómo buscarían esas respuestas en cada caso.

La organización de la clase para este momento va a estar sujeta a la decisión del profesor o de la profesora, considerando lo que es posible para su clase y su escuela. Por ejemplo, la presentación de los gráficos puede realizarse a través de fotocopias entregadas a los y las estudiantes o mediante proyecciones en el pizarrón –o eventualmente en una televisión o un monitor–, o ambas. Una propuesta interesante es que el o la docente presente para la discusión algunos de los gráficos (fotografiados o escaneados) que se llevó de la clase anterior, efectivamente elaborados por estudiantes de este curso, omitiendo quizás quién fue el autor o la autora. Sin embargo, en algunos grupos esta idea puede no ser beneficiosa y se podrían presentar gráficos "que hicieron estudiantes de otra escuela".

Se puede proponer una primera instancia, en pequeños grupos, antes de continuar la discusión entre toda la clase. Luego de que cada grupo haya tenido un tiempo para pensar en la actividad, se propone el desarrollo de un trabajo colectivo de intercambio sobre lo observado en cada gráfico y sobre qué sucede al intentar contestar las preguntas a partir de aquel. También podría hacerse directamente con toda la clase el análisis entre todos de cada gráfico, sin pasar por la instancia de abordaje en pequeños grupos.

Algunos gráficos posibles que representan los valores de la tabla y que responden a las convenciones usuales sobre la producción de gráficos cartesianos pueden ser los de las Figuras 9 y 10.

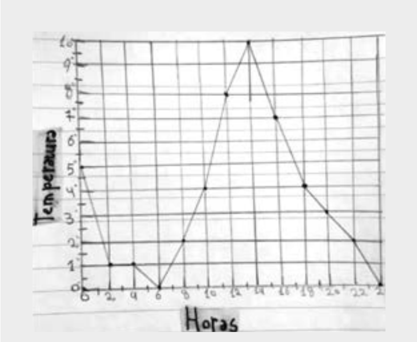


Figura 9

Figura 10

Sin embargo, quienes no trabajaron antes con la elaboración de gráficos pueden plantear propuestas bastante diferentes, muy interesantes de analizar. Justamente, es en este análisis en donde se comienza a delinear qué es necesario considerar y por qué al momento de realizar un gráfico.

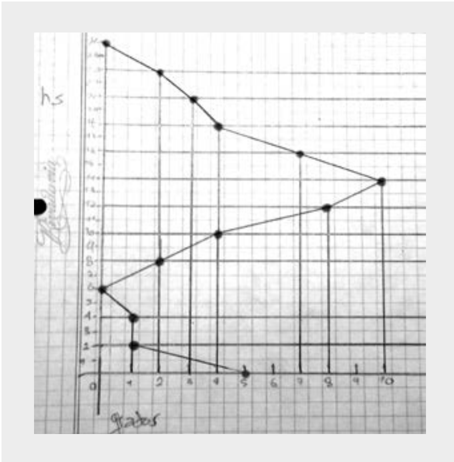
Los y las estudiantes, hasta aquí, han buscado información de la relación estudiada en los gráficos cartesianos. Sin embargo, producirlos comporta una dificultad diferente: ¿qué hay en ellos además de la relación entre las variables?, ¿cómo es que se elabora esa relación en un gráfico cartesiano? Discutir las producciones de los chicos y las chicas invita a poner en relieve qué más “ven” de los gráficos cartesianos. E impulsa el diálogo con otros y otras sobre las ideas que se van construyendo, algunas de las cuales serán cuestionadas.

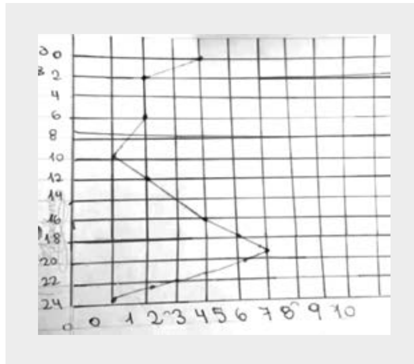
A continuación presentaremos varios gráficos realizados por estudiantes de distintas aulas en donde se llevó a cabo esta actividad y compartiremos fragmentos de su discusión colectiva.[29] Proponemos poner en debate algunas de estas opciones o variaciones de las mismas.

La variable temperatura se ubica en el eje horizontal y las horas en el eje vertical

En este tipo de producción (Figuras 11 y 12) se pone en evidencia una de las convenciones que se utilizan al momento de realizar los gráficos cartesianos: la variable independiente se representa en el eje horizontal. A su vez, es posible discutir en qué aspecto influye el cambiar las variables en los ejes.

29. Un audio de fragmentos de esa clase llevada a cabo en un 1° año de una escuela de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires en 2015 puede escucharse en: <https://youtu.be/SUMERy7s3r4>.





Figuras 11 y 12

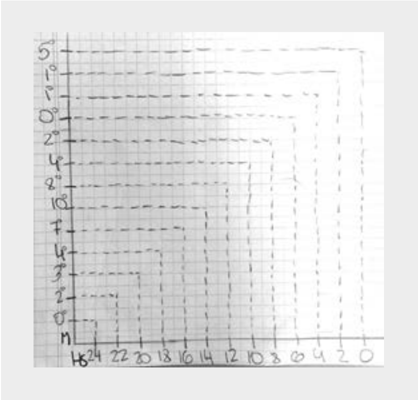
D. ¿Con este gráfico puedo responder a las preguntas que teníamos?
A1.[30] Está rarito.
A2. Sí, está bien hecho, pero no es fácil percibir si sube o si baja la temperatura al estar horizontal.
A3. Sí, es fácil...
A4. Está bien lo que hizo, solo que en vez de hacerlo así: que empieza para acá y va para allá, lo hizo de arriba para abajo, es lo mismo...

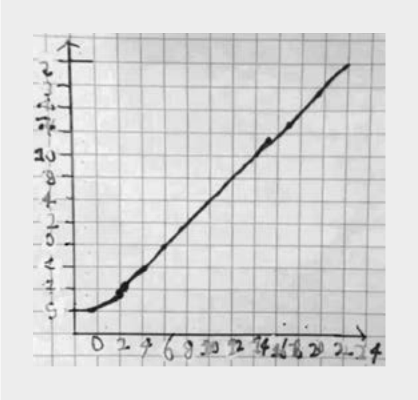
Este pequeño diálogo ilustra que mientras que para algunos chicos o algunas chicas “está raro” en comparación con otros gráficos con los que han trabajado, en los cuales “cuando la curva va hacia arriba, la temperatura crece”, para otros no resulta difícil ni ajeno. Abrir la discusión puede poner en evidencia que este tipo de gráficos permite “leer” si la variable temperatura crece o decrece, si alcanza un valor máximo, pero es necesario “mirarlo de otro modo”. Aparece así una primera cuestión atada a las convenciones.

Los valores de temperatura se ubican en el orden en que aparecen en la tabla, sin ordenarlos ni respetar una escala, resultando así un gráfico lineal

Una discusión interesante a partir de este tipo de gráficos (Figuras 13 y 14) es que en estos efectivamente están representados los valores de la tabla, por ejemplo, la hora 2 se relaciona con la temperatura 1 °C. Sin embargo, esto puede asombrar a los y las estudiantes.

30. D es docente; A, alumno u alumna.





Figuras 13 y 14

A. La temperatura también la puso así como estaba en la tabla.
D. Entonces puso 0 con 5, 2 con 1...
A. Siempre le va a quedar bien, pero no es... o sea, cumple con los valores de la tabla... no sé, nunca vimos un gráfico así.

Pareciera que este gráfico “incomoda”, pues tiene los valores de la tabla pero “no se parece” a los gráficos con los que vienen trabajando. ¿Qué es lo que asombra o incomoda? Si estos tipos de gráficos representan los valores de la tabla, ¿qué es lo que no permiten leer acerca de la situación estudiada?

A1. El gráfico estaría bien si toda la temperatura subiera, pero, por ejemplo, cuando baja de 4 a 6 no lo podés marcar porque la línea está para arriba. Entonces, ¿cómo hacés para marcarlo?
A2. Pero hay puntitos... (*Figura 14*)
A1. Pero tiene que volver a bajar y no se nota en qué número este...
D. A ver si entiendo (*en referencia a A1*): ¿vos lo que decís es “este gráfico estaría bien si fuera que la temperatura siempre va subiendo; entonces este gráfico me estaría diciendo que la temperatura siempre va subiendo. En cambio, acá nosotros sabemos que de 4 a 6 la temperatura baja, y ahí entre 4 y 6 parece que sube?”.
A1. ¿Viste cuando en el 2 y 4 está estable, hizo un puntito grande? Pero si no vieras la tabla, nunca te enterás de que ese puntito es 1 para el 2 y 1 para el 4.

Encontrar una explicación de por qué este tipo de gráficos los “incomoda” es parte de la discusión antes de dar por sentado que este gráfico tiene errores en su producción. Efectivamente, este es un gráfico en el cual pareciera que la temperatura “aumenta” todo el tiempo. La pregunta a instalar en la clase podría ser: ¿por qué en este gráfico parece que la temperatura siempre aumenta si ya sabemos que no es así?

A. La línea así la mandó derecha, y puso los grados... los puso como estaban acá (*haciendo referencia a la tabla*), no puso: 0, 1, 2, 3...
D. 5, 1, 1, 4, 2... (*La docente lee los valores de temperatura de la tabla que señaló el alumno.*)

Se apunta a poner atención en que los valores en los ejes aparecen dispuestos como figuran en la tabla. En el caso del eje que representa la hora del día, esos valores están ordenados, pues en la tabla se presentan así. Sin embargo, en el eje que representa la temperatura, al aparecer los valores en el eje vertical en el mismo orden que en la tabla, no quedan ordenados de menor a mayor. De este modo, se ve que "siempre aumenta la temperatura".

Discutir este tipo de gráficos permite poner condiciones sobre los ejes: los valores en ellos se deben ubicar de manera ordenada. Si se colocan siguiendo el orden que aparece en la tabla, se ve un gráfico que siempre crece.

Los valores numéricos de los ejes no están ubicados sobre "marquitas", sino en el medio de cada intervalo marcado

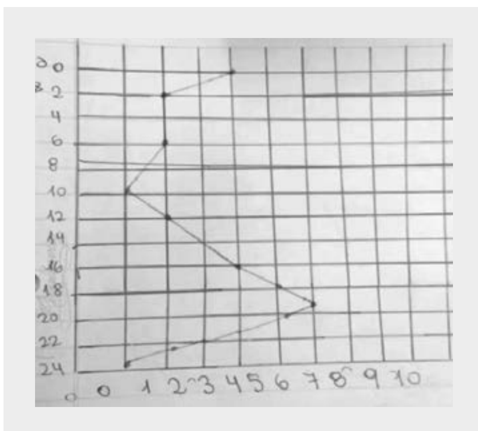


Figura 15

Este tipo de producciones, en donde la perspectiva del productor o productora no es clara, posibilita discutir lo que otros y otras leen en ese gráfico. A propósito del elaborado en la Figura 15, en una clase se dio la siguiente discusión:

A1. Que para mí está mal... porque si te das cuenta, donde tendría que estar el 5... está mal ubicado. Si vos bajás la línea, está como 4 y medio.
D. Ah, ¿el 0 acá qué es?
A1. No, no, no. Está mal ubicado, la línea...
D. ¿Este? (*Señalando en el gráfico otra marca que también podría corresponderse con 5.*)

A1. Sí, pero si vos vas arriba de todo, en el 5 no hay nada, andá arriba de todo
D. Pero ¿qué es el 5? ¿Es esto o es esto el 5? (*Señalando dos marcas posibles que podría corresponderse al 5.*)
A2. No se sabe, ahí está puesto como el relleno. (*Dando una tercera opción a las dos anteriores.*)
A3. Nosotros sabemos que es esa línea, pero es bastante confundible...
D. Yo me confundí, ¿vieron? Porque yo dije primero que el 0 estaba con 5, pero yo estaba pensando que el 5 era este (*señalando una parte de la cuadrícula*). Pero ahora lo que dice Manu[31] es que el 5 es este (*señala otra posibilidad para el 5 en este gráfico*). ¿Dónde está el 5?
A4. Está mal ubicado.

Discutir sobre esta producción evidencia lecturas ambiguas o poco claras del mismo gráfico. Y permite acordar que es necesario aclararla para “leer todos lo mismo”.

A su vez, en este gráfico aparece otra cuestión, los valores en el eje vertical están ordenados de menor a mayor, pero desde arriba hacia abajo. En la misma clase aparece este diálogo:

A1. Empezó las horas de arriba para abajo, en vez de abajo para arriba... está mal, bueh, no sé si mal, capaz se hace así, ¿no? Pero las horas están mal colocadas.
D. Las horas están: 0 arriba... 2, 4, 6, 8, 10 bajan hasta 24.
A2. No está mal.
A1. Y siempre empiezan desde abajo.
A3. Igual no tiene mucho que ver...
D. ¿Siempre dónde?
A1. Al revés.
D. Pero ¿en cuál es siempre? ¿Dónde vos decís “siempre”?
A1. Donde está el 24 empieza el 0.
D. Sí, pero ¿por qué decís que siempre empiezan así? ¿Qué es siempre?
A1. En los gráficos que vimos siempre empieza así.
A2. ¡En los gráficos que vimos!
D. Bien, ¿se entiende lo que está diciendo Agus?[32] En los gráficos que vimos, siempre se empieza desde abajo hacia arriba y acá está de arriba hacia abajo.

El trabajo previo con lectura de gráfico, según A1, es punto de apoyo para analizar esta producción. No es el caso de A3, a quien el orden no le parece relevante.

31. Manu es A1.

32. Agus es A1.

Para seguir debatiendo cuestiones del orden en los ejes cartesianos, sirve un gráfico como el de la Figura 16, el cual permite discutir que no solo es necesario que los valores estén ordenados de menor a mayor, sino que también es preciso que se ordenen de abajo hacia arriba.

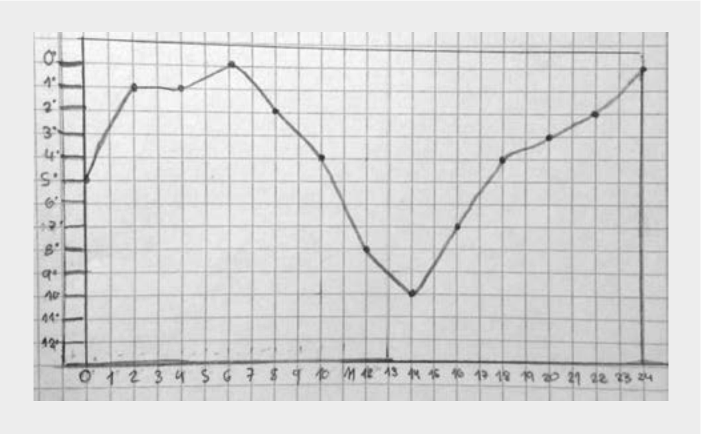
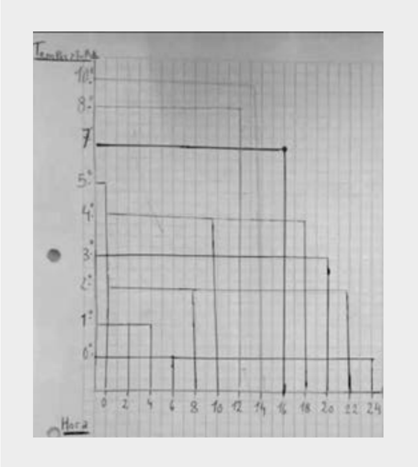
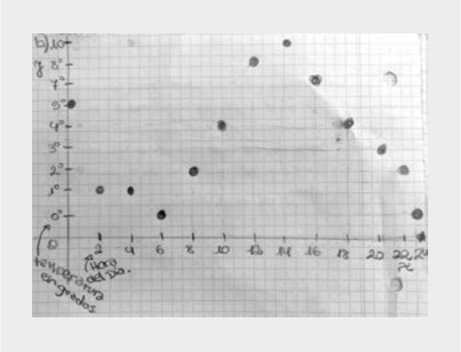


Figura 16

Los ejes no se encuentran ubicados sobre el valor 0

Decíamos anteriormente que producir un gráfico comporta una dificultad diferente que la del acto de lectura de su información. Se puede leer sin detenerse en, por ejemplo, dónde se ubica el valor del 0 en cada uno de los gráficos realizados (Figuras 17 y 18): que el 0 se ubique en los ejemplos vistos hasta el momento sobre los ejes no invita necesariamente a ver esta característica como una condición de los gráficos cartesianos.





Figuras 17 y 18

Muchas veces los y las estudiantes, ante el problema de cómo ubicar el 0, lo solucionan poniendo ese valor “en igual categoría” que el resto de los valores, es decir, otorgándole un lugar en los ejes. Desde esta lógica se podría sostener que el 0 “tiene un lugar” que no es sobre el eje. Es en la discusión colectiva cuando se puede poner en evidencia esta idea. ¿Podrían ser los ejes un valor numérico? Y en ese caso, ¿cuál conviene que sea?

En particular, en estos gráficos que se presentan, no aparece una necesidad, más allá de la convención, de que el 0 se ubique sobre los ejes. Pero si hubiera alguna temperatura bajo cero, tener el valor del 0 sobre el eje permitiría decidir, con solo mirar el gráfico, si en algún momento la temperatura fue bajo 0 (por debajo del eje) o no. Resulta interesante este gráfico producido en una clase (Figura 19):

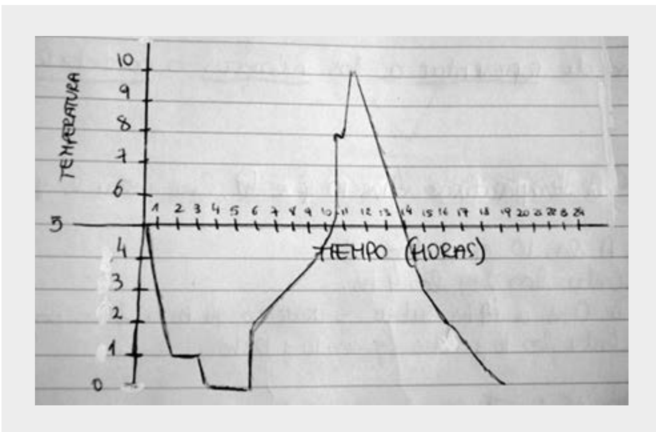


Figura 19

Como el primer valor de temperatura que aparece en la tabla es 5 °C, este gráfico tiene el eje ahí. Más allá de algunas otras cuestiones, si aparece una producción de este estilo, es posible analizar que el valor de 0 °C en el eje permite mirar y decidir si en ese día hubo o no temperaturas bajo 0.

Los trazos auxiliares usados para marcar los puntos resaltan más que los puntos en sí

El gráfico de la Figura 20 resalta el modo en que se relacionan las variables.

Este modelo podría complicar la lectura posterior de información; pues es difícil ubicar los puntos originales entre todos los segmentos.

A su vez, este tipo de producciones permite poner en evidencia qué se está entendiendo o qué se está interpretando como gráfico cartesiano. ¿La relación entre las variables se puede leer en los puntos que las unen o en la acción que se hace sobre el gráfico cartesiano para leer la relación?

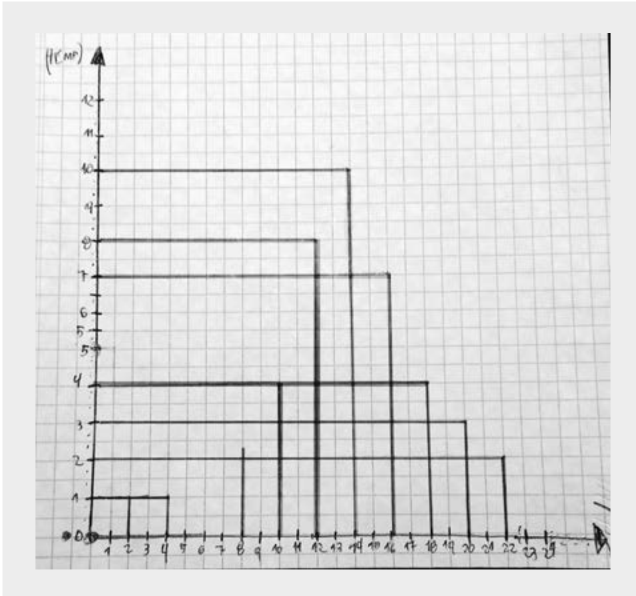


Figura 20

Los valores en los ejes se ubican sin tener en cuenta una escala

En el gráfico que se presenta en la Figura 21, en el eje vertical no se respeta una misma escala, dado que no se deja el espacio correspondiente a las temperaturas de 6 °C y 9 °C, las cuales no aparecen en la tabla.

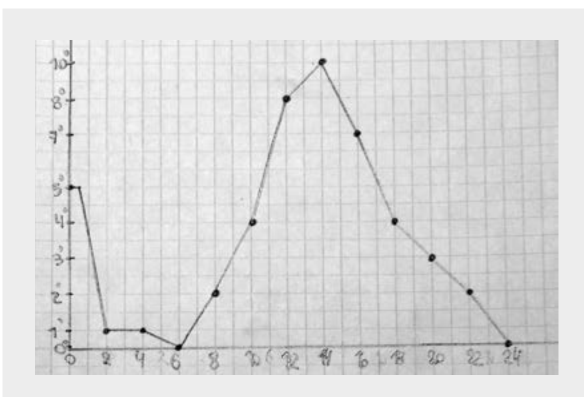


Figura 21

En este caso no es tan notorio el cambio que genera la modificación de la escala sobre la curva del gráfico, sin embargo, con otras producciones que tengan una mayor diferencia de valores, será posible poner en discusión esta cuestión.

Hemos presentado algunas opciones de gráficos que podrían discutirse con el total de la clase. En paralelo a ellas, hay una variante que se pone en juego en todos los tipos de producciones al considerar los puntos que representan los valores registrados: si estos puntos no están unidos, si lo están con una poligonal o con una curva. Es en especial interesante detenerse en la discusión sobre la posible unión de los puntos: ¿hay que unirlos o hay que dejarlos aislados?, ¿se unen con poligonales o con curvas?, ¿qué tipo de curva une los puntos? Desplegar estas preguntas en el aula abre el camino a un aprendizaje que continuará durante toda la escolaridad secundaria sobre las funciones y sus gráficas.

Es decir, para representar funciones con gráficos cartesianos en un entorno de lápiz y papel es usual el método que implica primero ubicar varios puntos para luego unirlos –idealmente teniendo en cuenta, en cada caso, lo que se sabe del tipo de variación del modelo funcional–. En este procedimiento ese trazo es solo un "esbozo" de todos los valores intermedios entre los puntos graficados originalmente;[33] pero esto no suele estar claro para los y las estudiantes, quienes muchas veces unen los puntos en forma automática y sin tener disponible lo que significa tal unión. Poder discutir sobre este tema desde un comienzo del trabajo con gráficos cartesianos de funciones sería muy beneficioso para la construcción de las ideas de alumnos y alumnas sobre los gráficos en tanto una forma de representar relaciones entre variables.

Considerando que esta secuencia está pensada como una introducción al trabajo con funciones, es importante que en el aula se le dé el tiempo a la discusión de todas las cuestiones desarrolladas anteriormente a partir del análisis de los gráficos presentados. El tipo de intercambios y conclusiones posteriores dependerá de cuáles fueron los gráficos elegidos por el o la docente.

A partir de esta discusión colectiva, se puede desplegar una síntesis teórica que reconozca, apoyada en la tarea anterior, algunas convenciones y otras cuestiones importantes para producir un gráfico. A modo de ejemplo, se podrían establecer conclusiones similares a las siguientes:

- En un gráfico, *los valores de los ejes deben estar ordenados* de izquierda a derecha en el eje horizontal y de abajo a arriba en el eje vertical, para facilitar la lectura y poder obtener información. La diferencia entre los valores marcados en el eje debe ser siempre la misma, *la escala se debe mantener.*
- Se pueden *trazar líneas auxiliares* para marcar los puntos más fácilmente, pero conviene que sean tenues para diferenciarlas de la curva del gráfico y que no resulten un obstáculo a la hora de leerlo (por ejemplo, pueden hacerse líneas punteadas). Además, es importante *marcar los puntos* y no solo dejar las líneas, porque si no, es difícil después recuperar dónde estaba el valor marcado.

33. Claramente, habría que considerar aparte el caso de la función lineal, ya que como su gráfica es una recta, al unir dos puntos que correspondan a la función se estarían representando todos los puntos intermedios, con la certeza de que efectivamente son puntos que pertenecen al gráfico de la función.

- Los puntos donde alguna de las *variables es 0* quedarán marcados *sobre los ejes*. El eje horizontal y el vertical se cruzan en un punto, llamado *origen de coordenadas*. Este determina el 0 en cada eje y, además, separa en ambos los valores positivos de los negativos.
- Al hacer un gráfico, los *puntos* representan *valores certeros y la unión* de ellos, con rectas o curvas, un *posible comportamiento de las variables*; sirve de "guía" para interpretar mejor la situación.
- Como ya hemos trabajado, hay una variable que depende de la otra. Cuando la variable dependiente se encuentra en el eje vertical y la variable independiente en el eje horizontal, puede resultar más fácil leer cuándo el proceso crece (va hacia arriba) o decrece (va hacia abajo). *Por convención la variable independiente se representa en el eje horizontal.* Es importante *escribir* en el gráfico *qué está representando cada uno de los ejes* en relación al problema, para poder interpretarlo.

ACTIVIDAD 3

Hemos analizado una propuesta para abordar con los y las estudiantes la producción de gráficos cartesianos, tarea que deberá seguir trabajándose a partir de distintas propuestas en nuevas instancias. Por ejemplo, no es lo mismo producir un gráfico a partir de valores representados en una tabla que hacerlo a partir de un relato de la situación o incluso a partir de la información que da otro gráfico. Es interesante desplegar estas actividades diversas, que permitirán profundizar y afianzar la elaboración de gráficos. A continuación presentamos dos problemas que fueron elaborados con esta intención.

En un tanque en donde se acumula agua, a la medianoche de un día, se registra que contiene 1.000 litros. Esa cantidad se mantiene hasta las 7:30 de la mañana, cuando comienza a disminuir, y llega a 600 litros a las 10:00. Sigue bajando hasta llegar a los 150 litros al mediodía, momento desde el que la cantidad de agua se mantiene constante por un tiempo. A las 15:00 se abre la llave de paso y el tanque se comienza a llenar de agua. Transcurridas dos horas el tanque no llega a los 400 litros, razón por la cual se decide aumentar el paso del agua. Tres horas más tarde, el tanque contiene 900 litros. Se cierra el paso de agua y se mantiene estable la cantidad de agua.

Realicen un gráfico cartesiano que represente la cantidad de agua en el tanque en función del tiempo entre las horas 0:00 y 24:00 de ese día.

Comentarios

En esta actividad se describe una situación y se propone realizar un gráfico de una función determinada: *la cantidad de agua en el tanque en función* *del tiempo entre las horas 0 y 24 de ese día*. Puede resultar confuso para los y las estudiantes cómo realizar el gráfico. Si bien algunos o algunas comenzarán a partir del relato de la situación, otros y/u otras tal vez necesiten organizar la información en una tabla de valores para después graficar. Como sea, al momento de realizar el gráfico deberán tomar varias decisiones, tales como: *¿cuán "largos" realizar los ejes?*, *¿qué escala considerar en cada uno?*; por ejemplo, *¿en el eje vertical la cantidad de agua se representa de 100 en 100 o de 50 en 50?* Hay otras decisiones que deberán considerar los alumnos y las alumnas y que pueden no ser iguales en los distintos gráficos, por ejemplo, cómo unir los puntos que determinan ciertos momentos del relato. Otra situación que puede diferir en los gráficos es la parte que se corresponde con el relato: "Transcurridas dos horas el tanque no llega a los 400 litros, razón por la cual se decide aumentar el paso del agua". Estas cuestiones harán aparecer en la clase gráficos distintos –no solo por la escala sino también por "la forma"–, y, sin embargo, posibles para representar la relación descripta. Todo esto se puede discutir en el espacio colectivo a propósito de las producciones.

Al cierre del apartado "Lectura de información en los gráficos cartesianos", dijimos que para una misma situación es posible recortar diversas variables y obtener distintas funciones. Allí tomamos como ejemplo la Actividad 2, donde se analiza el gráfico que se corresponde con la función *distancia a la casa de Bruno en función de la hora del día domingo* y en donde es posible determinar otras funciones como *la distancia de Bruno a la casa de sus abuelos en función de las horas del día* o bien *la distancia total recorrida por Bruno en función de las horas del día*.

Considerando esta cuestión de que no hay una sola función que se recorta de una situación dada o bien que no hay "un" gráfico cartesiano para "una situación" sin explicitar qué variables se seleccionan para analizar, se les puede proponer a los y las estudiantes que vuelvan a aquella y realicen el gráfico de estas o de otras funciones que se pueden recortar de la situación descripta.

Volvamos a la Actividad 2 del apartado "Lectura de información en los gráficos cartesianos":

"Los abuelos de Bruno lo invitaron a él y a sus primas a almorzar. La casa de Bruno, la de sus primas y la de sus abuelos quedan todas en la misma calle. Bruno sale caminando a las 11:30, pasa a buscar a sus primas por su casa y se van a lo de sus abuelos. Al regreso, vuelven juntos".

A partir de la información que se tiene en el gráfico que representa distancia de Bruno a su casa en cada momento del día domingo hasta que regresa nuevamente a su casa, *realicen los gráficos de las siguientes relaciones:*

- la distancia de Bruno a la casa de sus abuelos en función de las horas del día,
- la distancia total recorrida por Bruno en función de las horas del día.

Comentarios

En la producción de estos gráficos pueden discutirse algunas cuestiones.

En primer lugar, la *distancia a un punto* y la *distancia total recorrida* son variables diferentes: mientras la primera puede crecer o decrecer, la segunda siempre aumenta o se mantiene estable. En este caso se puede retomar lo discutido en la Actividad 5 del primer apartado, destinado a la lectura de información en los gráficos cartesianos.

En segundo lugar, se puede comparar el gráfico de *la distancia de Bruno a su casa en función de las horas del día* con el de *la distancia de Bruno a la casa de sus abuelos en función de las horas del día*: mientras que en uno la distancia aumenta en un momento determinado, en el otro, para ese mismo momento, la distancia disminuye; el valor máximo en uno de los gráficos se corresponde con el valor mínimo en el otro y viceversa.

Para seguir trabajando qué información es posible tomar de un gráfico, se puede proponer una actividad como la que sigue, en la que no se plantea producir otro gráfico a partir del dado, sino elaborar un relato, es decir, reconstruir una situación (y una función) a la que corresponda ese gráfico:

El siguiente gráfico (Figura 22) representa la distancia al punto de partida de un ciclista a medida que transcurre el tiempo. El ciclista se desplaza por una ruta en línea recta.

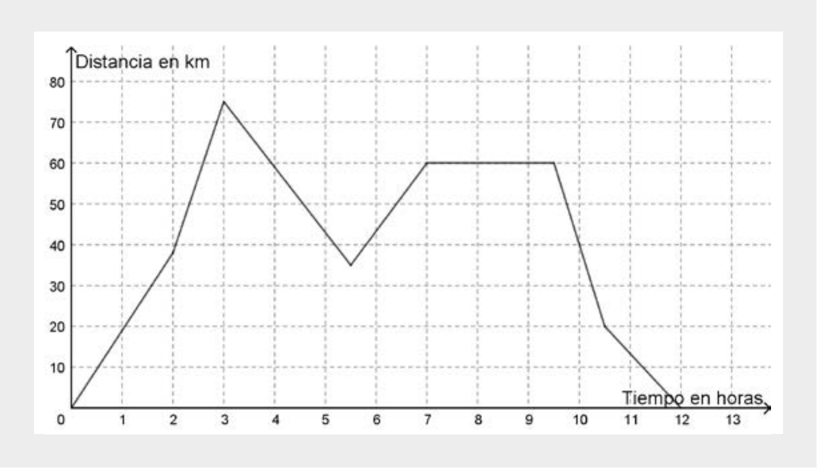


Figura 22

Realizá un relato que permita reconstruir el recorrido correspondiente a este gráfico. Incluí cuestiones como, por ejemplo: ¿siempre se desplazó a la misma velocidad?, ¿en qué momento se desplazó más rápido y en qué momento más lento?, ¿en algún momento se detuvo?, ¿cuántos kilómetros recorrió en total?, ¿cuál fue la mayor distancia al punto de salida que alcanzó?, etc.

ANÁLISIS DE GRÁFICOS CUALITATIVOS

Aquí proponemos trabajar con gráficos cualitativos donde no aparecen gradaciones en los ejes, sino que solamente se indica qué variable representa cada uno. Esta característica generará la necesidad de precisar la mirada cualitativa sobre cuestiones de los gráficos y de la situación, en particular, la velocidad de crecimiento.

Las dos actividades que desarrollamos a continuación se plantean en un contexto de llenado de recipientes con distintas formas y proponen estudiar *la cantidad de líquido (en litros) que contiene el receptáculo en función de la altura alcanzada por el líquido (en centímetros).*

ACTIVIDAD 1

En esta primera actividad se presenta un recipiente de una forma particular para estudiar cómo varía la cantidad de líquido que contiene, según la altura que este alcanza. Se ofrece una tabla que registra ciertos valores numéricos, con la intención de que resulte un apoyo para que los y las estudiantes comprendan y se apropien de la situación planteada. También, a partir de la tabla, tendrán disponibles valores concretos de las variables para estudiar y referirse a cuestiones sobre su variación y sobre la velocidad de crecimiento.

Figura 23

Se dispone de un recipiente de forma irregular como el que se muestra en la Figura 23; este tiene una altura de 60 cm y una capacidad total de 20 l, y se va llenando con líquido. Cuando el líquido llega a 10 cm de altura, el recipiente contiene 4 l de líquido. Cuando llega a los 20 cm, 7,4 l. Se tomaron más datos a medida que se iba llenando y se completó la siguiente tabla.

Cm de altura alcanzada por el líquido	0	10	20	30	40	50	60
L de líquido contenido en el recipiente	0	4	7,4	10	12,6	16	20

a) ¿Es posible saber cuántos litros contenía el recipiente cuando el líquido alcanzó una altura de 50 cm? ¿Y cuándo el líquido tenía una altura de 52 cm?

b) ¿Es posible saber cuántos cm de altura alcanza el líquido cuando el recipiente contiene 10 l? ¿Y cuando contiene 13 l?

c) Si se define la función cantidad de líquido en litros en función de la altura alcanzada en centímetros*, ¿cuál o cuáles de estos gráficos (Figura 24) podrían representar dicha función?*

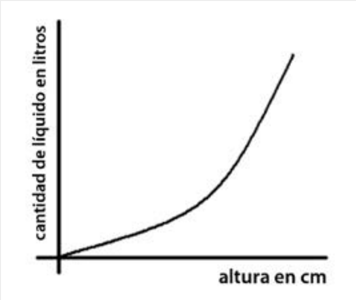


Gráfico 1

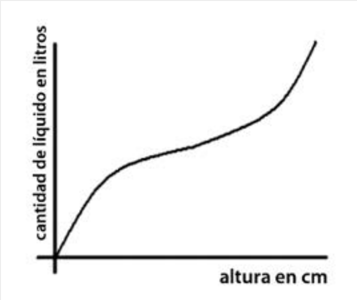


Gráfico 2

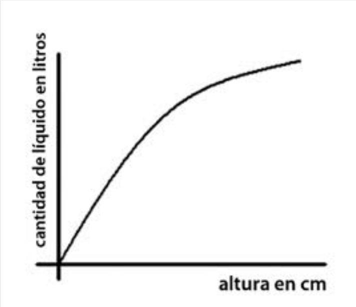


Gráfico 3

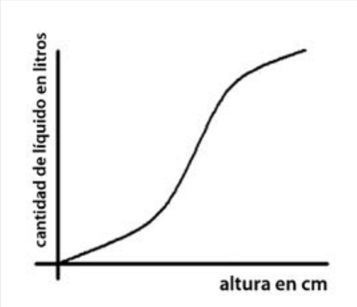


Gráfico 4

Figura 24

Comentarios

Los dos primeros ítems apuntan a discutir acerca de qué se puede responder a partir de la lectura directa de la tabla y qué se puede inferir de aquellos valores sobre los que se pregunta aunque no aparecen en ella. Se ponen en juego relaciones similares a las que surgieron en la Actividad 1 del apartado “Producción de gráficos cartesianos” –con la tabla de temperaturas a lo largo de un día–, aunque en este caso habrá una cuestión nueva: a pesar de que no se puede saber con exactitud, por ejemplo, cuántos litros había en el momento en que la altura alcanzada era de 52 cm, sí se puede asegurar que el valor será mayor que 16 y menor que 20 l, teniendo en cuenta lo que sucede en los 50 y 60 cm de altura. Esto mismo se repite en el ítem b), donde se podrá saber que los 13 l se conseguirán con una altura que no puede ser menor que 40 ni mayor que 50 cm. Es decir, considerando el contexto de la situación, no tienen sentido ideas como: "la cantidad de litros puede bajar un poquito y después volver a subir", como sí sucedía con la temperatura. En este caso, se puede asegurar que la cantidad de líquido siempre aumenta, lo que se ve reflejado en un gráfico siempre creciente (condición que cumplen las cuatro opciones ofrecidas en el ítem siguiente).

El o la docente podría dar el ítem c) de forma separada, luego de poner en común lo realizado con los ítems a) y b). En el momento de trabajo colectivo sobre esta última consigna, será interesante resaltar la importancia de la indicación explícita sobre qué función se quiere graficar, porque en realidad también se podría estudiar cuál es *la altura que alcanza el líquido en función de los litros que se vierten en el recipiente*. Este es un claro ejemplo de que la determinación de cuál es la variable independiente y cuál la dependiente –por ende, cuál variable se ubicará en cada eje– es una elección que puede cambiar según la función que se defina, de modo que no hay una única opción.

En la tarea de elegir un gráfico relacionado a esta situación –y que represente la función definida–, se hará presente un análisis sobre la variación de las variables y la velocidad con que aumenta la cantidad de líquido, en particular, mucho más preciso que en actividades anteriores. Es importante que el o la docente acompañe la aparición de estas cuestiones, y en especial consideramos potente que estas relaciones se desplieguen en los distintos registros de representación que se juegan. Por ejemplo:

- Desde el registro del lenguaje natural se podría decir algo como: "por la forma del recipiente al ir subiendo la altura, la cantidad de litros que se registra será cada vez menor, porque el recipiente se va haciendo más angosto, pero en la mitad se vuelve a agrandar, entonces desde ahí la cantidad de litros va a ir aumentando cada vez más". También se podría identificar que al llegar a la mitad de la altura del recipiente –a los 30 cm–, habrá 10 l, la mitad de los 20 totales. Estas ideas pueden estar apoyadas en marcas sobre el dibujo del recipiente que presenta la consigna, o en nuevos esquemas, por ejemplo, el que se muestra en la Figura 25.
- Desde el registro numérico, en la tabla se podría calcular la variación de las variables y marcar con flechas la cantidad de litros que se aumentan por cada 10 cm de altura. Así, se podría notar que esta variación no es siempre la misma, que disminuye y luego vuelve a aumentar, y se podrían reconocer ciertas regularidades (Figura 26).
- Desde el registro gráfico, se podrían marcar los "escalones" que se forman bajo la curva, tanto de forma genérica como dividiendo al eje x en seis partes, para identificar los cambios que se producen cada 10 cm. Así, se podría notar que: en uno, la cantidad de líquido va creciendo cada vez

más; en otro, cada vez menos, y que en otros dos esta variación cambia en la mitad (Figura 24), como en el caso del problema.

Por ejemplo, sería posible realizar marcas como las de la Figura 27.

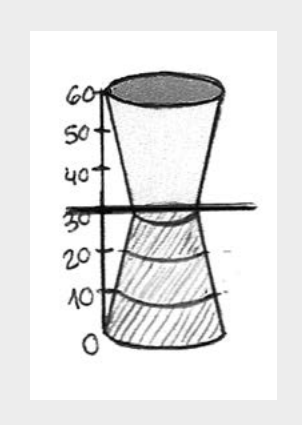


Figura 25

+10 +10 +10 +10 +10 +10

Cm de altura alcanzada por el líquido	0	10	20	30	40	50	60
Litros de líquido contenido en el recipiente	0	4	7,4	10	12,6	16	20

+4 +3,4 +2,6 +2,6 +3,4 +4

Figura 26

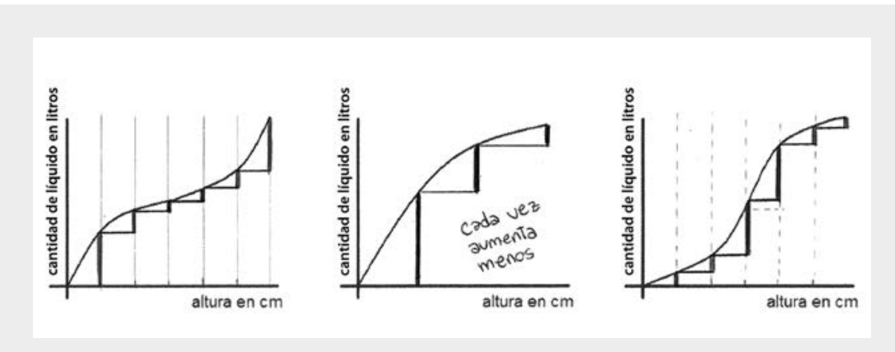


Figura 27

Con todo este trabajo, se podrán plantear argumentos, desde los diferentes registros, que permitan identificar que el Gráfico 4 es aquel que representa la función elegida.

Es importante que todos estos registros "convivan" en el pizarrón y en las carpetas de los y las estudiantes, a partir de la puesta en común de esta actividad. Además puede resultar enriquecedor, durante el abordaje colectivo del problema, centrarse en una misma observación para identificar cómo se ve ella en cada uno de los registros. Por ejemplo, se podría precisar cómo se aprecia, en la tabla, en el gráfico y desde la situación –mirando la figura del recipiente–, el hecho de que de los 20 a los 30 cm de altura el líquido aumenta menos en comparación con el tramo de los 0 a los 10 cm. Si la clase está muy centrada en uno solo de los registros, el o la docente puede plantear preguntas que permitan "conectar" las ideas de los y las estudiantes con otros registros, para garantizar el trabajo de relación que se quiere lograr.

ACTIVIDAD 2

Proponemos aquí una actividad que permitirá reutilizar y afianzar lo discutido en la anterior, en relación a la variación y la velocidad de crecimiento de las variables, y a cómo esto se puede analizar en distintos gráficos. La consigna presenta cuatro recipientes y cinco gráficos que representan la función definida: los y las estudiantes deben relacionar cada recipiente con su correspondiente gráfico. A diferencia de la tarea anterior, aquí no se brinda una tabla, por lo tanto no hay valores numéricos sobre los cuales apoyarse. Esto requerirá desplegar un análisis completamente cualitativo de la situación, que se base en los registros que hay disponibles.

Se tienen estos cuatro recipientes de formas diferentes que se llenan con un líquido (Figura 28). Debajo se tienen gráficos cartesianos que representan la relación entre la cantidad de litros que contiene el recipiente dependiendo de la altura alcanzada por el líquido *(Figura 29). Todos los recipientes tienen 60 cm de altura y una capacidad total de 20 l. Elegí un gráfico que corresponda a cada recipiente. Explicá por qué lo elegiste.*

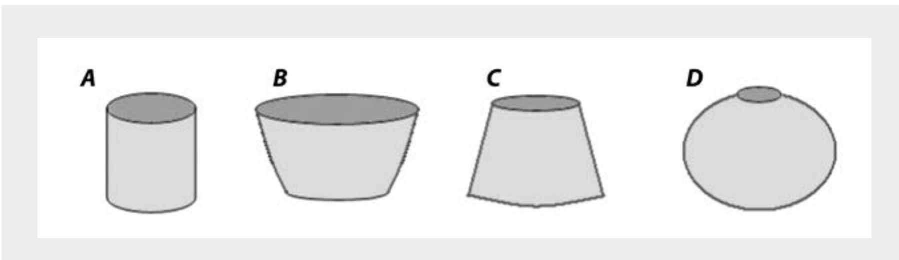


Figura 28

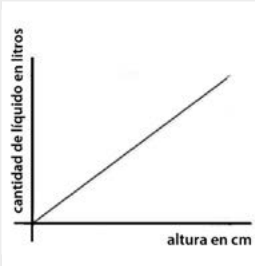


Gráfico 1

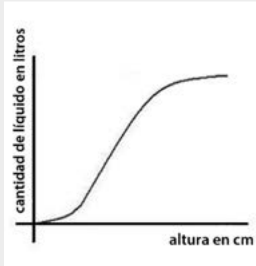


Gráfico 2

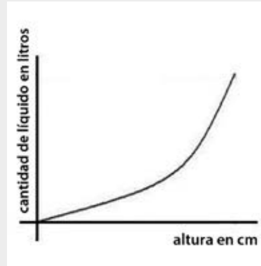


Gráfico 3

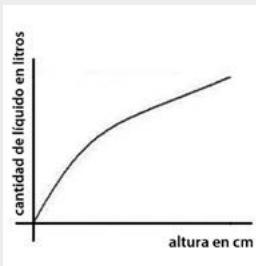


Gráfico 4

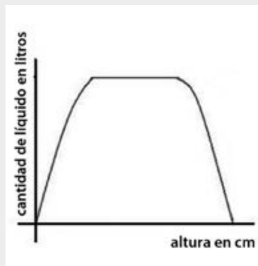


Gráfico 5

Figura 29

Comentarios

Esta actividad se plantea con el propósito de reinvertir lo trabajado anteriormente, de manera que los y las estudiantes puedan analizar y anticipar qué gráfico corresponde a qué recipiente, usando las ideas y herramientas que fueron construyendo. De nuevo, tendrán que analizar cómo crece la función en cada caso y se pondrán en juego ideas como “si en una parte la cantidad de líquido aumenta lento, el gráfico tiene que ser el de estilo más ‘aplastado’ o ‘apaisado’ y, si aumenta rápido, tiene que ser el de estilo más ‘vertical’ o que ‘suba abruptamente’”.

Al observar la Figura 28, el recipiente A plantea una característica especial: por su forma cilíndrica, si se toma por ejemplo cada 10 cm de altura, el volumen de líquido aumentará siempre una misma cantidad. Será interesante identificar, en el espacio colectivo, que esto se relaciona con que los “escalones” del Gráfico 1 son todos iguales (Figura 29). En los recipientes B y C, se observa que la cantidad de litros aumenta cada vez más en el B y aumenta cada vez menos en el C, a medida que sube la altura, por lo se corresponden con los Gráficos 3 y 4. Al observar la forma del recipiente D, se reconoce que, cuando se llega a la mitad de la altura, el receptáculo contiene la mitad de los litros de capacidad, al igual que el de la actividad anterior. También algún o alguna estudiante podría plantear la idea de que el tipo de crecimiento que tuvo la cantidad de líquido hasta la mitad se repetirá, pero "de forma invertida" en la segunda mitad. Finalmente, identificando todas estas cuestiones, se podrá relacionar a cada recipiente con su gráfico.

Por otro lado, Gráfico 5 está puesto con la intención que se "parezca" un poco a uno de los recipientes, para insistir en la separación entre la forma del receptáculo y la forma que tiene que tener el gráfico. Además, este gráfico en particular presenta un tramo constante, que no tendría sentido dentro de la situación estudiada; pues significaría que en ese tramo aumenta la altura, pero no así el volumen.

Estas dos actividades son ejemplos de un tipo de problema que privilegia el estudio cualitativo de la situación por sobre un análisis de los valores puntuales. A los y las estudiantes puede sorprenderles, en un comienzo, tener gráficos "que no tengan números", pero justamente esta característica es la que los invita a encontrar otras "formas de mirar" la situación, según distintos registros con los que sí cuentan. En particular, se busca que en el trabajo con estos problemas se pueda analizar cómo cambian las variables en juego y la velocidad de crecimiento de la curva. Esto se seguirá trabajando en los años siguientes de la escolaridad y cobrará importancia en el estudio de modelos funcionales específicos, por lo que consideramos importante que los y las estudiantes se vayan familiarizando con esta clase de análisis.

A su vez, con estas dos actividades, nuevamente se pone en juego la relación entre la situación de la realidad y los recortes que se hacen sobre ella en el problema presentado. Por ejemplo, en ambos casos se podría haber elegido tomar otra variable –el tiempo de llenado, entre otras– o invertir la elección de las variables dependiente e independiente. Consideramos que es muy potente que estas cuestiones se identifiquen en el aula luego de haber abordado los problemas, para explicitar aquellas decisiones que se tomaron al modelizarlos.

COMENTARIOS FINALES

En esta propuesta hemos presentado distintos asuntos en torno al inicio del trabajo con funciones.

En el primer apartado, hemos presentado propuestas para que lo alumnos y alumnas analicen distintos tipos de gráficos cartesianos que representan una relación entre dos variables –continuas y discretas–, que se recortan de una situación contextualizada. La lectura punto a punto de los gráficos permite identificar las variables que se relacionan y comprender que esa relación se encuentra representada en los puntos que forman la curva. Sin embargo, una lectura global del gráfico –cuando crece o decrece, si hay un máximo o un mínimo– hace posible un análisis cualitativo del fenómeno que este representa y de las variaciones que van ocurriendo en el proceso. Luego, propusimos la realización de un momento de síntesis teórica, donde se reflexione sobre las actividades trabajadas y se elaboren conclusiones.

En el segundo apartado, hemos puesto el interés en la producción de gráficos de funciones por parte de los y las estudiantes. Propusimos que esta elaboración sea partir de una tabla de valores, de un texto descriptivo de una situación y de información proporcionada por otro gráfico cartesiano. Desde la discusión colectiva sobre las producciones, planteamos el despliegue de ciertas convenciones y normas en torno a la construcción de gráficos.

Finalmente, en el tercer apartado, hemos promovido avanzar en la relación entre una situación y diversos gráficos que podrían representar una función que se recorta de aquel contexto, lo que permite desplegar una mirada más cualitativa, que no requiere apoyarse en valores puntuales.

En todas estas actividades hemos querido distinguir el trabajo a realizar con las funciones según su presentación en una tabla de valores, en un gráfico cartesiano o en un texto que las describe. Justamente, es a través de las distintas representaciones de las funciones que los y las estudiantes podrán construir sus sentidos. Compartimos con Raymond Duval (1993) que los objetos matemáticos son objetos conceptuales a los que no se puede acceder de manera directa, sino a través de una representación semiótica, que no es ni puede ser el objeto en sí. Pero las representaciones semióticas no son un medio de exteriorización de las representaciones mentales, sino que el desarrollo de estas depende de las representaciones semióticas.

Tal como comenzamos a trabajar en el apartado dedicado al análisis de gráficos cualitativos, es posible identificar los siguientes registros de representación para las funciones: el lenguaje natural, el numérico –en particular el formato tabla–, el de gráficos cartesianos y el algebraico. En la secuencia presentada aquí, se pusieron en juego los primeros tres, haciendo hincapié en el trabajo con los gráficos cartesianos, registro propio de las funciones. El algebraico se abordará posteriormente, cuando se estudien las fórmulas de las funciones.

Además, hemos invitado a trabajar con diversas actividades que proponen conversiones entre distintos registros; por ejemplo, a partir de un texto de un proceso se pide armar un gráfico que lo represente o, dada una descripción de una situación y una tabla de valores, se solicita producir un gráfico. Transformar un registro en otro y coordinar los registros son dos aspectos centrales de la actividad matemática, que no pueden considerarse separadamente y son fundamentales para la aprehensión del objeto matemático sin que sea confundido con su representación (Duval, 1993 y 2006). En el caso de las funciones, no se atrapa al objeto matemático solo sabiendo representar esta relación en uno o varios registros, sino que también es en la interacción entre registros donde se va conceptualizando la noción de función. Lo que no cambia del objeto en los diversos registros es lo que "hace" al objeto matemático, y es la posibilidad de identificar sus características particulares en distintos registros de representación lo que les permite a los y las estudiantes construir y afianzar sus concepciones sobre él.

Hasta aquí hemos esbozado algunas ideas acerca del abordaje inicial de las funciones, con eje en las nociones de dependencia y variabilidad, y en el despliegue de diversos registros de representación semiótica, en particular, el trabajo con los gráficos cartesianos.

Sobre estas ideas se apoyará más adelante el estudio de funciones particulares (lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, racionales, trigonométricas, etc.). A modo de ejemplo, en los siguientes capítulos se estudiarán cuáles son los fenómenos que permiten modelizar las funciones lineales y cuáles son los límites y las potencias de los diversos registros de representación en el trabajo con funciones cuadráticas, entre otras cuestiones.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, Guy

2007 *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

2002 *Actualización de Programas de Nivel Medio. Programa de Matemática. Primer Año. 2002,* Buenos Aires, Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: <https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf1/m1.pdf.> [consulta: 16 de octubre de 2019].

Duval, Raymond

1993 "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", en *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*s, vol. 5, pp. 37-65.

2006 "Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación", en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*,vol.9, nº 1, pp. 143-168. Disponible en: <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546> [consulta: 22 de octubre de 2019].

Hanfling, Mirta

2000 "Estudio didáctico de la noción de función", en Chemello, Graciela (coord.), *Estrategias de enseñanza de la Matemática,* Bernal, Universidad Nacional de Quilmes.

Lacasta Zabalza, Eduardo y Pascual Bonis, José Ramón

1998 *Las funciones en los gráficos cartesianos*, Madrid, Editorial Síntesis.

Ministerio de Cultura y Educación del Gobierno de La Pampa

2009 *Materiales Curriculares. Matemática. Educación Secundaria –Ciclo Básico–. 2009. Versión preliminar,* La Pampa, Subsecretaría de Educación, Subsecretaría de Coordinación del Ministerio de Cultura y Educación del Gobierno de La Pampa. Disponible en: <https://repositorio.lapampa.edu.ar/index.php/

materiales/secundaria/basico/item/matematica> [consulta: 15 de octubre de 2019].

Ruiz Higueras, Luisa
1998 *La noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*, Jaén, Universidad de Jaén.

Sadovsky, Patricia
2005 *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

CAPÍTULO 3

Las funciones lineales: una oportunidad para potenciar el vínculo entre lo funcional y lo algebraico

Valeria Borsani y Mara Cedrón

INTRODUCCIÓN

La función lineal es la primera familia de funciones de la que se ocupa la enseñanza en la escuela secundaria; es decir, se delimita una familia que permite particularizar y profundizar aspectos abordados al tratar con funciones en general: ¿qué fenómenos permite modelizar?, ¿qué características tienen las diversas formas de representarlas?, ¿qué informaciones dan las distintas representaciones y qué límites plantean? También, inaugura una serie de aspectos que se irán trabajando y sobre los que se ahondará a lo largo del trabajo con esta y otras familias de funciones, como por ejemplo el uso de la fórmula para buscar informaciones sobre ellas.

La siguiente propuesta sobre función lineal supone un trabajo previo con funciones en general, similar al desarrollado en el Capítulo 2. De esta manera, se asume que ya hubo un abordaje sobre: las funciones como herramientas que permiten modelizar situaciones, las ideas de variables y variaciones en esa modelización, y los distintos registros de representación, entre ellos y fundamentalmente, el de gráficos cartesianos. Cabe destacar, que en el desarrollo del Capítulo 2 no hay muchos elementos para un trabajo significativo con la fórmula.

En estas páginas desplegamos una mirada didáctica de este tema, construida de manera colectiva,[34] enriquecida también por las discusiones sobre

34. Destacamos particularmente las interacciones en el equipo de Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), al cual pertenecemos las autoras, conformado por Carmen Sessa, Betina Duarte, Cecilia Lamela y Juan Pablo Luna.

propuestas de este tipo en formación continua de profesores y por puestas en aula de docentes de escuela secundaria.

En este capítulo proponemos una serie de actividades que, por momentos, se explicitan secuenciadas, ya que esto nos da la posibilidad de profundizar sobre ideas que creemos posibles y potentes para desplegar en la clase. En esos casos, es una secuenciación posible que podría precisar ajustes en función de lo que cada docente considere necesario para sus estudiantes; son ejemplos de ajustes proponer más preguntas en un problema o intercalar nuevos problemas similares.

Sobre las actividades, estas despliegan intenciones y posibles estrategias que habilitan los datos y preguntas. También, proponemos trabajos para el espacio colectivo. Allí señalamos asuntos que consideramos potentes para la discusión entre estudiantes y algunas preguntas para sostener dicha discusión. No necesariamente se espera que sucedan las cosas de esta manera, pero abrimos el abanico de posibilidades que ofrece la actividad e intentamos colaborar con la toma de decisiones (siempre complejas) que el docente debe afrontar en el desarrollo de su clase.

Este capítulo contiene dos apartados, que no son independientes, sino que el trabajo sobre uno genera un avance sobre el otro; aunque no está pensado para hacerse, de modo necesario, de manera consecutiva.

El primero, titulado "La modelización de situaciones que varían uniformemente", se centra al inicio en la modelización de situaciones que pongan en escena la variación uniforme, es decir, *a variaciones iguales en una variable corresponden variaciones iguales en la otra variable.*

No proponemos como punto de partida la presentación de la fórmula y de los gráficos de esta familia de funciones. Sino que, en su lugar, presentamos actividades en las que los contextos, los datos y las tareas solicitadas son un soporte que permite la puesta en juego de relaciones, estrategias e hipótesis sobre las variaciones. Revisitar las ideas en diferentes problemas y contextos, y a partir de diferentes registros de representación, permitirá generalizar conocimientos sobre los modelos lineales para arribar a la definición de *función lineal* y a la caracterización de sus diversas representaciones.

En diálogo con las producciones didácticas,[35] asumimos que ninguna representación "atrapa", en sí misma, la noción de función lineal; en este sentido, la fórmula de la función lineal no puede ser el único soporte para su definición. Es por ello, que proponemos actividades que inviten a los y las estudiantes a explorar cómo los datos y relaciones que se tienen de una situación, con una determinada representación inicial, pueden interpretarse con otra representación. También, cómo se pueden responder ciertas preguntas a partir del trabajo con una u otra representación. Este trabajo de coordinación de diferentes representaciones y de conversión de una a otra, enriquece la comprensión, por un lado, de cada forma de representación en sí misma y, por otro, del objeto *función lineal.*

35. Como por ejemplo, SADOVSKY (2005).

El objetivo del segundo apartado, “Encuentro y ecuaciones”, es abordar situaciones que den sentido al estudio de $f(t) = g(t)$, donde f y g son funciones lineales.[36] Proponemos el trabajo sobre distintos registros de representación (gráfico, fórmula, numérico), ya que, como hemos destacado, este enriquece las conceptualizaciones tanto de cada representación como de la idea matemática a abordar. De esta manera, en los problemas se plantea –y se necesita– la puesta en juego de las distintas representaciones de forma sostenida para producir o aproximar una respuesta y/o para controlar su validez.

A propósito del estudio de situaciones de encuentro, las actividades abordan cómo promover el planteo y la resolución de ecuaciones provenientes de este tipo de problemas (igualdad de dos funciones lineales). Se desarrollan argumentos apoyados en el contexto del problema y se explicita la necesidad de entramar con otros discursos que justifican las técnicas alrededor de la resolución de ecuaciones, que focalizan en la conservación del conjunto solución. Estas actividades pueden ser abordadas por los y las estudiantes que aún no han comenzado a estudiar ecuaciones o por aquellos o aquellas que lo hicieron de manera incipiente.

En suma, este capítulo presenta diferentes instancias de trabajo algebraico, que comienzan con el inicio de funciones lineales –en el primer apartado– antes de abordar el *objeto ecuación*. Son ejemplos de tareas propuestas con este fin: producir una fórmula, evaluar si modeliza o no aspectos de una situación, emplearla para hallar diversas informaciones y decidir si algunas expresiones son o no equivalentes, entre otras. Finalmente, destacamos la necesidad de robustecer el trabajo algebraico[37] para alojar el inicio de ecuaciones en vínculo con muchos otros objetos, tareas y significados.

LA MODELIZACIÓN DE SITUACIONES QUE VARÍAN UNIFORMEMENTE

En este apartado presentamos actividades que proponen tareas cuyas resoluciones ponen en juego la variación uniforme. Priorizamos, en un comienzo, problemas de contexto con datos numéricos, que permiten la puesta en acto de relaciones vinculadas a la variación uniforme. Luego, desplegamos problemas que sostienen el trabajo anterior a la vez que avanzan en dar sentido a cómo la tabla, la fórmula y el gráfico reflejan esta variación.

36. Llamaremos generalmente a este estudio: *estudio de situaciones de encuentro*.

37. Proponemos no solo el tratamiento algebraico a propósito de funciones lineales, sino también de otras zonas como: la producción de fórmulas para contar la cantidad de elementos de la iteración *n* de un proceso que responde a cierta regularidad y el estudio de expresiones algebraicas como generalización de los cálculos aritméticos. Sobre el primer tema, ver DIRECCIÓN DE CURRÍCULA DE LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DEL GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES (2002) y, sobre el segundo, BRUNAND, BORSANI Y CABALCABUÉ (en prensa).

ACTIVIDAD 1

Las Actividades 1 y 2[38] se apoyan en un mismo contexto: *el costo de un viaje en función de la distancia a Santa Rosa*, para distintas compañías que cobran un cargo fijo y un precio por kilómetro. El cálculo de diferentes valores promueve la aparición de estrategias correctas vinculadas a la variación uniforme y da lugar al análisis de que las estrategias asociadas a la proporcionalidad directa no permiten resolver lo buscado. En la última parte de la Actividad 2, se propone la búsqueda de un procedimiento general de cálculo para el costo del viaje.

El servicio de combis Buen Viaje realiza viajes que parten desde Santa Rosa hacia diferentes destinos de La Pampa. Julieta viaja por su trabajo y usa esta compañía. Ella anotó en una tabla los distintos viajes que hizo este mes con el costo de cada uno. El precio que cobra Buen Viaje incluye un costo fijo por viaje y un precio por cada km recorrido, que es el mismo para cualquier destino.

Localidades	Distancia en km a Santa Rosa	Costo en pesos
Winifreda	45	179
Lonquimay	67	245
Quehué	77	275
Eduardo Castex	82	290
Monte Nievas	92	320
Metileo	120	404
Embajador Martini	140	464

a) *El próximo viaje de Julieta es a Miguel Cané, que queda a 112 km de Santa Rosa. ¿Cuánto saldría un viaje en la misma compañía, sabiendo que no hubo aumentos ni cambios en lo que salen los viajes?*

En esta actividad la forma de cobro del servicio de combis se explicita al principio, pero no se presentan los valores del costo fijo y el precio por kilómetro. Esta idea de cómo cobra la empresa será soporte para que los y las estudiantes hagan hipótesis acerca de cómo son las variaciones y para la búsqueda de relaciones entre los datos dados, orientados por el cálculo de los valores pedidos. No se espera que sea necesario calcular inicialmente el costo fijo y el

38. Las primeras actividades recuperan ideas didácticas de SADOVSKY y ESPINOSA (en prensa).

precio por kilómetro, para resolver las primeras preguntas. Es en el transcurso del trabajo con el problema que se irá atrapando de manera más profunda lo que implica –y lo que no– esa forma de cobro.

En los problemas introductorios no se presentan la mínima cantidad de datos que son necesarios para determinar el modelo en cuestión. Esto, como veremos, tiene una doble intencionalidad: por un lado, permite variadas elecciones y resoluciones, lo que da mejores condiciones para que aparezcan relaciones diferentes que serán constitutivas del modelo lineal; por otro lado, hace posible movilizar ciertos elementos de control sobre lo realizado.

Para calcular el costo del viaje a Miguel Cané, que se encuentra a 112 km de Santa Rosa, las y los estudiantes pueden desplegar variadas estrategias, tanto correctas como incompletas o incorrectas.

Es posible que las primeras ideas que desplieguen algunos alumnos y algunas alumnas estén relacionadas con el uso de propiedades de la proporcionalidad directa. Si bien en este caso no representa una forma correcta de abordaje, la trayectoria que ellos y ellas ya tienen tratando con problemas que se modelizan de este modo más el hecho de que en este planteo la variación sí es proporcional permiten anticipar que intentarán usar conocimientos vinculados a la proporcionalidad. Es importante destacar que el conjunto de datos dados y pedidos da lugar a que estas ideas puedan surgir en la clase para que sean objeto de discusión, y que de esta pueda concluirse que esas relaciones no se ajustan a la situación propuesta.

Son ejemplos de estrategias vinculadas a la proporcionalidad directa:

- realizar el cociente entre el costo de un viaje y la distancia de ese viaje como forma de hallar el precio por kilómetro. Por ejemplo, usando el primer renglón de la tabla, 179/45 da, aproximadamente, 3,97. Notar que el uso de diferentes pares de valores arroja diferentes precios por kilómetros. Por otro lado, si para calcular el costo del viaje hacen (179/45) · 112, se obtiene 444,64, que es un precio mayor que otros viajes de menos kilómetros. Ambas contradicciones podrían colaborar para desestimar o poner en cuestión esta estrategia. Un análisis similar puede hacerse si se emplea regla de tres simple como forma de resolución.
- otra posibilidad es usar que *a un viaje que es suma de dos distancias, corresponde un costo que es la suma de ambos costos.* 112 km es la adición 45 km + 67 km, sin embargo, la suma de los costos resulta mayor que la de otros viajes de mayor distancia, lo que permite descartar esta resolución. Es decir, hay valores en el problema que posibilitan controlar la pertinencia de los valores hallados.
- una forma de orientar esta estrategia hacia una resolución correcta es interpretar que en cada uno de los costos de los viajes, de 47 km y de 67 km, está incluido el costo fijo. De manera que, si se suman, se lo considera dos veces. Entonces, para conseguir el resultado buscado se podría restar una vez el costo fijo. El o la docente podrá evaluar la pertinencia y/o el momento para involucrar a sus alumnos y alumnas en la discusión

de ajustar esta estrategia, considerando las relaciones que se hayan establecido. No es esperable que para esta primera pregunta se haya calculado el costo fijo, pero puede abordarse luego de que se haya establecido.

Pueden surgir estrategias que se apoyan en otras regularidades halladas entre los datos, y que ponen en escena las variaciones en las variables. Por ejemplo: entre las distancias de Santa Rosa a Lonquimay (67 km) y Quehué (77 km), hay un aumento de 10 km y el costo asciende $30. Esa relación se repite para los viajes a Eduardo Castex y Monte Nievas. La repetición de esa regularidad en la tabla, junto con un contexto conocido por las y los estudiantes, puede dar lugar al establecimiento de relaciones correctas sobre las variaciones: *cada 10 km que aumenta la distancia a Santa Rosa, el costo aumenta $30* y/o *por cada kilómetro cobra 30/10 = $3*.[39]

A partir de estas relaciones los y las estudiantes podrán apoyarse en cualquier dato dado y pensar en cuánto tiene que aumentar la cantidad de kilómetros para llegar a los 112 km de distancia, ya sea pensando en incrementos de a 10 km en la distancia y de $30 en el costo, o de a 1 km en la distancia y de $3 en el costo. Por ejemplo, podrían usar el dato de Monte Nievas, que tiene un sentido en el contexto del problema –pues es el más cercano a la distancia de 112 km–, y establecer que hay que aumentar 20 km, que implica aumentar $60 el costo. Destacamos el hecho de que no es necesario tener el costo fijo para calcular un costo como el pedido.

Las y los estudiantes podrían usar relaciones similares para encontrar el costo fijo y usar lo hallado para responder la pregunta. Por ejemplo, podrían ir disminuyendo las distancias desde el primer valor de la tabla (45 km; $179), con variaciones de 10 km acompañadas con saltos en el costo de $30 hasta llegar a 5 km y $59. En este caso, tendrían que pensar cuánto disminuye el costo en un viaje de 5 km menos ($15), para arribar a $44 de costo fijo.

En el *espacio colectivo* pueden discutirse diferentes cuestiones. Para esto, es necesario que diferentes grupos expongan sus resoluciones para analizarlas, aunque sean incompletas o erróneas. Son ejemplos de asuntos a discutir:

- la no pertinencia de las estrategias que se apoyan en relaciones vinculadas a la proporcionalidad directa. Ya se analizaron posibilidades para estas discusiones más arriba. Será un apoyo explicitar que se sabe por el contexto que hay un único resultado posible para ese viaje.
- las distintas variaciones usadas; cómo se establecieron y el vínculo entre ellas, por ejemplo, relacionando que el aumento de 20 km en la distancia equivale a 2 aumentos de 10 km o a 20 de 1 km, y que esas relaciones se mantienen en los costos.

39. Hay otras variaciones en la tabla que colaboran en confirmar las hipótesis que podrían establecer los y las estudiantes, por ejemplo, entre Quehué y Eduardo Castex hay un aumento de 5 km de distancia y un incremento en el costo de $15 y, entre Metileo y Embajador Martini, hay un aumento de 20 km y el costo asciende $60.

También es potente proponer el armado de una tabla de valores en la que pueda explicitarse qué valores y qué variaciones se usaron de apoyo para obtener lo pedido. Por ejemplo:

+10 km   +10 km   +20 km   -8 km

Distancias en km a Santa Rosa	45	67	77	82	92	112	120
Costo en pesos	179	245	275	290	320		404

+ \$30   + \$30   + \$60   -3 . 8= \$24

Esta tabla puede ir nutriéndose de nuevas relaciones y valores con el avance en la actividad:

> *b) ¿Cuánto sale un viaje a una localidad que está a 97 km de Santa Rosa? ¿Y un viaje a Doblas, que está a 83 km de distancia de Santa Rosa?*

La resolución de estas preguntas vuelve a requerir poner en juego las variaciones, aunque, según el viaje en cuestión, los y las estudiantes pueden apoyarse en distintos datos de la tabla y emplear diferentes estrategias.

Por ejemplo, para un viaje que recorre 97 km desde Santa Rosa, los alumnos y las alumnas podrían identificar que se trata de un aumento de 5 km respecto de la distancia entre la capital provincial y Monte Nievas (92 km). A continuación, podrían establecer que el costo aumentará, respecto al de Monte Nievas, *la mitad de lo que aumenta para 10 km más, es decir la mitad de \$30* o *3 · 5, ya que aumenta \$3 por cada km más.*

En el caso del viaje a Doblas (83 km desde Santa Rosa), como uno de los datos de la tabla muestra una distancia de 82 km, se esperaría que se apoyaran en esta información, lo que llevaría a calcular y usar el valor del precio por kilómetro para sumárselo a \$290. Es decir, se elige pedir este viaje para promover la aparición del precio por kilómetro.

Otra estrategia posible es calcular y usar el costo fijo y el precio por kilómetro para los distintos valores.

El *espacio colectivo*, luego de estas preguntas, permitiría compartir los distintos procedimientos y las nuevas relaciones obtenidas acerca de las variaciones.

> *c) ¿Cuánto sale un viaje a Quemú Quemú, que está a 129 km de distancia de Santa Rosa?*

La discusión sobre las estrategias a desplegar para el ítem c) servirá para que los y las estudiantes puedan avanzar en la resolución de la pregunta d). En particular, permitirá la socialización de la estrategia de cálculo del precio por kilómetro –si es que no hubiese aparecido antes– al hacerla necesaria: pues es imposible llegar hasta la distancia de 129 km aplicando aumentos de 10 o 5 km a los datos de la tabla.

Si no hubiese surgido en la clase hasta el momento este cálculo, se puede cerrar el estudio de esta situación proponiendo:

d) ¿Cuánto sale el costo fijo y cuánto el precio por kilómetro en Buen Viaje?

ACTIVIDAD 2

Hay nuevo servicio de combis en la ciudad: La Pampeana, que también cobra un costo fijo y un precio por cada km recorrido, que es el mismo para cualquier destino. Julieta consiguió los costos de algunos viajes en esa compañía.

Localidades	Distancias en km a Santa Rosa	Costo en pesos
Ataliva Roca	47	170
Quehué	77	245
Metileo	120	352,50
Gral. Pico	135	390
Realicó	180	502,50

a) ¿Cuánto sale en La Pampeana un viaje a Lonquimay, que está a una distancia de 67 km de Santa Rosa? ¿Y un viaje de 60 km de distancia de Santa Rosa?

La búsqueda del costo del viaje a Lonquimay (67 km de Santa Rosa) puede invitar nuevamente a pensar en las variaciones, considerando la información que otorgan los dos primeros valores de la tabla: la distancia es 20 km más que 47 km o 10 km menos que 77 km.

Además, las variaciones en esos dos primeros valores de la tabla permiten establecer que cuando la distancia a Santa Rosa aumenta 30 km, el costo aumenta $75.

Para calcular el costo del viaje a Lonquimay, pueden usarse y explicitarse relaciones de proporcionalidad en las variaciones, por ejemplo: *si aumento/disminuyo 10 km de distancia, el costo aumenta/disminuye $25* y/o *si aumento/disminuyo 20 km de distancia, el costo aumenta/disminuye $50.*

Algunos y algunas estudiantes quizás busquen el valor del kilómetro que cobra la empresa haciendo 75/30 = 2,5; o alguna cuenta análoga. Posiblemente, la pregunta por Lonquimay no traccione hacia ese cálculo, sino que este surja para las siguientes preguntas como, por ejemplo, para el cálculo de la distancia de 60 km. Así, pueden apoyarse en la distancia de 47 km explicitando que el costo aumenta 2,5 · 13, donde 13 es el aumento de la distancia de 47 a 60 km. Cabe destacar que, para 60 km, también pueden intentar buscar variaciones equivalentes para aumentos de 5 y/o 3 y/o 2 km, usando la proporcionalidad de las variaciones.

El costo de un viaje para una distancia de 60 km también puede dar lugar a que surja la idea errónea de calcularlo considerando la mitad del costo de un viaje de 120 km, es decir, poniendo en escena el uso de una propiedad de la proporcionalidad directa. Una variedad de ideas surgidas en la clase podrían ser soporte para discutir esta estrategia. También, el dato sobre el viaje de 180 km de distancia permite que, a partir de en una relación similar –en este caso dividir por 3 la distancia y el costo– se llegue a otro resultado.

En la *discusión colectiva* será interesante que surjan diferentes variaciones y que los alumnos y las alumnas puedan explicarlas desde el contexto y desde los valores de la tabla. Cabe destacar que los y las estudiantes podrían establecer estas relaciones tomando como punto de partida un valor concreto, por ejemplo, Ataliva Roca, y no considerar la generalidad de esta relación: siempre que aumente 10 km de distancia, no importa desde cuál localidad, el aumento en el costo será de $25. El o la docente, al estar atento o atenta a escuchar las posiciones de sus alumnos y alumnas, podría plantear nuevas preguntas para avanzar en esa generalidad, por ejemplo: ¿para una distancia de 10 km más que la de General Pico sabemos cuánto aumenta el costo?

También, si surgieran diversas estrategias, se podrían analizar los vínculos entre las distintas cuentas realizadas, identificando en qué valores de la tabla y variaciones se apoyan. Los valores podrían volcarse en una tabla, similar a la que se mostró en la Actividad 1.

b) ¿Cuánto sale en esta compañía un viaje a Relmo, que está a 100,5 km de Santa Rosa? ¿Qué distancia a Santa Rosa habrá hecho en su viaje si pagó $275?

Con el viaje de distancia 100,5 km, se pide por primera vez el cálculo para un valor no entero. Pueden usarse estrategias similares a las anteriores, calculando primero el costo para una distancia de 100 km de Santa Rosa, con apoyo en algún dato dado, y luego aumentar medio kilómetro, poniendo en juego que si al incrementar 1 km el costo aumenta $2,5, entonces al incrementar medio kilómetro, el costo aumenta la mitad: $2,5/$2 = $1,25.

El pedido de la distancia dado el costo del viaje pondrá en evidencia que pueden usarse como punto de partida las mismas relaciones halladas, controlando ahora cómo llegar al costo pedido desde un valor conocido y, eventualmente, encontrar nuevas relaciones comandadas por la variación del costo.

c) ¿Cuánto sale el cargo fijo y cuánto el precio por kilómetro en La Pampeana?

Las estrategias para esta pregunta son similares a las desarrolladas en el problema anterior.

El pedido del costo fijo y del costo por kilómetro permite que todos y todas hayan tenido acceso a estas relaciones, considerando la intención de producción de un procedimiento general.

d) En grupos de a cuatro, escriban un método que les permita calcular cuánto sale el viaje en La Pampeana si conocen la distancia en kilómetros a Santa Rosa.

En d) el pedido de escritura de un método de cálculo puede suscitar muy variadas formas: por ejemplo, instructivo con pasos, "forma" de la cuenta con números y palabras, o fórmulas. La intención en este momento no es arribar a la escritura de estas últimas, sino más bien discutir que se puede generalizar una estructura que permita calcular el costo de cualquier viaje. El modo de analizar y validar los procedimientos se basará en la situación de referencia, vinculando los pasos con un sentido en términos del problema.

Para plantear la tarea de este ítem y que los y las estudiantes comiencen a trabajarla, podría ser necesario hablar de la consigna y plantear que el objetivo es un método que sirva para distintos valores, por ejemplo, que dé pasos o formas de calcular para 50, 142 y para 30.

Algunos alumnos y algunas alumnas quizá, hasta aquí, se hayan apoyado en distintos valores para calcular el costo del viaje, y es posible que mantengan esa elección en esta tarea. Otros y otras pueden, por ejemplo, privilegiar el apoyo en uno de los valores de la tabla o en el costo fijo:

PROCEDIMIENTO A	PROCEDIMIENTO B	PROCEDIMIENTO C
1) Elegir el viaje más cercano al que se quiere calcular de la tabla.	1) Calcular la resta entre los km pedidos y 47 km.	1) Multiplicar 2,5 por la distancia en km.
2) Calcular la distancia entre la localidad más cercana y el lugar al que se quiere llegar.	2) Multiplicar esa diferencia por 2,5.	2) Sumar lo anterior a 52,50.
3) Multiplicar esa diferencia por 2,5; porque da lo que salen esos kilómetros.	3) Sumar o restar lo calculado en 2) a $170.	O escrito como: cant. de km · 2,5 + 52,50
4) Sumar o restar ese número al costo del viaje elegido de la tabla en 1).	O escrito como: (cant. de km. – 47) · 2,5 + 170*	

* En este caso, puede ser que consideren el orden de la resta según si la cantidad de kilómetros es o no mayor que 47, y que controlen si tienen que sumar o restar a 170, aunque no lo expresen.

Seguramente las formulaciones no sean tan claras y sea necesario un trabajo que colabore con esclarecerlas. Además, al querer describir una situación general, podría pasar que los y las estudiantes se apoyaran en lo realizado en una situación particular y sus métodos heredaran aspectos particulares. Por ejemplo, podrían hablar siempre del aumento respecto del valor de 47 km, lo que dejaría afuera el cálculo para distancias menores a ese valor. También, podrían separar las cuentas para los casos menor y mayor que 47, lo que daría lugar a escrituras como:

- si la cantidad de kilómetros es mayor que 47: (cant. de km – 47) · 2,5 + 170.
- si la cantidad de kilómetros es menor que 47: 170 – (47 – cant. de km) · 2,5.

Si estas ideas aparecieran en la clase, sería potente analizar en el espacio colectivo qué cuentas hace el primer cálculo cuando se pone un número menor que 47,[40] de manera de discutir que esa misma cuenta funciona en ambos casos (de manera análoga, podría tratarse la segunda cuenta). El apoyo en distintos casos particulares podría colaborar; por ejemplo, para 30, la primera cuenta arroja: (30 – 47) · 2,5 + 170 = –17 + 170, que muestra que a 170 se le resta 17 · 2,5, que es "la misma cuenta" que arrojaría el segundo cálculo. Pero puede habilitarse, de todos modos, mantener ambas expresiones, dado que se volverá a estas ideas en el trabajo con las fórmulas.

En el espacio colectivo, a propósito de los procedimientos, si hay varios grupos que elaboraron distintos, el o la docente podrá elegir algunos para compartir con la clase, considerando aquellos que aporten ideas diferentes a trabajar. Con la intención de que todos y todas se involucren con los diversos procedimientos y se avance en la explicitación de las ideas en que se apoyan, pueden proponerse algunas tareas, tales como:

- *pedir argumentos sobre los procedimientos*. El o la docente podrá sostener en el espacio colectivo las preguntas sobre las razones por las que eligen esos pasos, por ejemplo: "¿Por qué en el procedimiento B multiplican por 2,5 la diferencia de los kilómetros y no directamente la distancia pedida?" o "¿Por qué, en el A, sí multiplican por los kilómetros pedidos? Interrogantes de este tipo pueden dar lugar a pensar con los y las estudiantes *qué tienen de parecido y qué de diferente* estos procedimientos.
- *proponer que usen cada procedimiento con un valor de los ya calculados* (por ejemplo, 60 km) *y un nuevo valor* (por ejemplo, 138 km).

Debe notarse que, en el procedimiento A, se va cambiando el punto de apoyo (para 60, se apoyaría en 47; para 138, en 135). Para avanzar en la tarea de unificar el valor de apoyo y establecer una estructura general, puede preguntarse:

40. Si es que los alumnos y las alumnas ya hubiesen visto algunas operaciones con números enteros.

"Para el cálculo de 138 km, ¿se podría modificar el procedimiento A eligiendo en el paso 1) el valor de 47 km (que usaron para el cálculo de 60)? ¿Cómo seguirían el procedimiento?".

Sobre las escrituras, podría ser un insumo para el futuro trabajo sobre fórmulas traccionar hacia expresar la forma que tiene la cuenta, como: (cant. de km – 47) · 2,5 + 170 y/o cant. de km · 2,5 + 52,50.

ACTIVIDAD 3

Aquí se propone el análisis de fórmulas para la empresa de la Actividad 1, poniendo en escena y en acción las fórmulas para esta función. Además esta tarea permitirá estudiar cómo algunas de las ideas pensadas con apoyo en el contexto se "atrapan" en una única escritura y, a la vez, que hay distintas escrituras que permiten ese cálculo.

Vuelvan a considerar la compañía que trabajaron en la Actividad 1 y decidan cuáles de estas fórmulas permiten calcular el costo del viaje en Buen Viaje para x kilómetros desde Santa Rosa:

$47 \cdot x$, $\quad 44 + 3 \cdot x$, $\quad (x - 45) \cdot 3 + 44$,
$44 \cdot x \cdot 3$, $\quad (x - 45) \cdot 3 + 179$.

Expliquen cada una de sus respuestas.

Para este problema la o el docente tendrá que comunicar que se va a considerar disponible todo lo que sabían sobre el primer problema, las tablas armadas y los valores calculados.

Como podría ser la primera vez que aparecieran fórmulas en estos problemas, la tarea propuesta podría traer dudas. Jugará un papel importante la experiencia de los y las estudiantes con las fórmulas.[41] El profesor o la profesora evaluará la conveniencia de, primero, conversar sobre la tarea pedida; para esto será un apoyo lo trabajado sobre elaboración de procedimientos, tanto para evocarlo como para utilizar aquellas formas de decir compartidas en el aula. Sería un soporte que se explicitara entre todos y todas que la fórmula es una manera de acceder a todos los costos por viajes conociendo la distancia a Santa Rosa: reemplazando la *x* por los kilómetros que tiene un viaje, el resultado hallado da el costo de ese viaje. De esta manera, las y los estudiantes pueden usar como estrategias evaluar las fórmulas en valores o interpretar la forma de cálculo en algunas fórmulas, con apoyo en lo trabajado en la Actividad 1.

41. Puede haberse destinado una zona de estudio en los primeros años de la secundaria a la producción de fórmulas para contar colecciones y el análisis de la equivalencia entre ellas.

En el *espacio colectivo* un asunto central será el análisis de las razones para descartar o aceptar una fórmula.

Evaluar los datos de la tabla puede ser una estrategia suficiente para desechar una fórmula incorrecta (tal es caso de la primera, la tercera y la cuarta enunciadas). En cambio, para fórmulas correctas, el solo hecho de evaluar en valores y que estos den lo esperado no alcanza como justificación suficiente a esta altura del estudio de las funciones lineales.[42] Cabe entonces la pregunta: ¿no habrá otro par de valores, para kilómetros y costo en esta empresa, que al evaluarlo *en esa fórmula no dé bien?* Esta pregunta busca que en estos casos se instalen explicaciones en términos del contexto, similares a las analizadas en la actividad anterior. Por ejemplo, en el caso de la fórmula $(x - 45) \cdot 3 + 179$, puede analizarse que: *179 es lo que se paga por 45 km, y el primer término suma (o resta) lo que se paga por los kilómetros de más (o de menos) respecto a 45 km.*

Luego de este análisis podría concluirse que hay, por lo menos, dos fórmulas correctas, y sería un buen momento para introducir algunas notaciones que se usan en matemáticas:

"En las Actividades 1 y 3, estuvimos estudiando una función: *el costo del viaje en la empresa Buen Viaje según la distancia a Santa Rosa de ese viaje*. Esta es una función que podríamos llamar $B(x)$, donde x es la distancia a Santa Rosa medida en kilómetros.

Entonces, podemos escribir: $B(x) = 44 + 3 \cdot x$ y, también, $B(x) = (x - 45) \cdot 3 + 179$".

Luego de hablar sobre las fórmulas para esta empresa, se puede regresar a la Actividad 2 y escribir las fórmulas, si no lo hubieran hecho.

ACTIVIDAD 4

Aquí se regresa al mismo contexto: el cobro del servicio de combis para viajes, pero se plantea la novedad de que el dato es una fórmula, y se indaga sobre preguntas ya abordadas.

Otra empresa de combis, Caldén, para cobrar un viaje utiliza la siguiente fórmula: $C(x) = 3x + 38$, donde x es la distancia en kilómetros desde Santa Rosa del viaje.

- *a) ¿Cuánto sale en esta empresa un viaje a Winifreda, que está a 45 km de Santa Rosa? ¿Y a General Pico, que está a 135 km de Santa Rosa?*
- *b) ¿Es verdad que si se aumentan 5 km en la distancia de un viaje, el costo aumenta $38 en esta compañía? Explicá por qué.*

42. Ya que a esta altura no se dispone del conocimiento de que dos puntos determinan la función lineal ni del conocimiento de que la representación gráfica es una recta.

El ítem a) apunta a comprender la situación propuesta y poner en funcionamiento la fórmula.

En el ítem b), algunos o algunas estudiantes podrían pensar que la formulación es verdadera, porque aparece el 38 sumando, es decir, podrían interpretar que eso significa que se agregan 38. Otra estrategia muy posible es realizar una exploración numérica; elegir posibles viajes y luego sumarles 5 km a las distancias para saber qué ocurre con el costo de esos itinerarios. También podría surgir la conjetura de que el aumento por cada kilómetro es de $3, a partir de interactuar con la fórmula o por similitud a las fórmulas ya halladas en problemas anteriores. En las dos últimas posibilidades afirmarían que es falso.

Ante esta diferencia de estrategias, sería interesante focalizar en las explicaciones. Si surgieran justificaciones apoyadas en la exploración numérica, el o la docente podría escribir las cuentas dejando su traza; por ejemplo:

- para una distancia de 45 km y de 50 km, podría escribirse: $3 \cdot 45 + 38 = 173$ y $3 \cdot 50 + 38 = 188$, respectivamente.
- para una distancia de 135 km y de 140 km podría escribirse: $3 \cdot 135 + 38 = 443$ y $3 \cdot 140 + 38 = 458$.

Esto permitiría analizar los aumentos para esos valores y arribar a que el incremento del costo es siempre el mismo: 15 (no 38). Según la experiencia numérica de los alumnos y las alumnas, podría proponerse una explicación apoyada en una de las cuentas propuestas: ¿qué cambia y qué permanece en la cuenta para 45 y para 50? De manera que se explicite que en ambas se suma 38 y que lo que cambia es qué número está multiplicado por 3. Así, puede explicarse que $3 \cdot 50$ es $3 \cdot 45 + 3 \cdot 5$ y que, por eso, el aumento es $15 cada vez que aumenta 5 km la distancia. Pueden vincularse estos argumentos con la conjetura de que el 3 que aparece en la fórmula es lo que se cobra por kilómetro.

Luego de discutir las ideas sobre estas preguntas, el docente podría interrogar acerca de si se sabe (o no) si esta compañía cobra un monto fijo. De modo de recuperar de las cuentas anteriores que el 38 se cobra siempre y que desde ahí aumenta el costo, lo que puede vincularse con el valor que da C(0).

Momento de síntesis

Se propone generar un momento en la clase durante el que se focalice en el vínculo entre las actividades que compartieron el mismo contexto. El interés didáctico de estas instancias reside en que van estableciendo marcas compartidas sobre lo importante que se realizó al trabajar las actividades y así se van robusteciendo relaciones que darán lugar a la caracterización de las funciones lineales. A su vez, colaboran con el proyecto de aprendizaje de los y de las estudiantes, en tanto permiten descontextualizar ideas que inicialmente estaban al servicio de las preguntas concretas de determinado problema a resolver.[43]

De esta manera, el profesor o la profesora podría plantear en el espacio colectivo: "¿Qué tienen de parecido los problemas de combis tratados hasta acá". Algunas ideas a las que sería importante arribar son:

- en cada una de las tres empresas, por cada kilómetro que se agrega, el costo aumenta lo mismo: \$3 en Buen Viaje y Caldén, \$2,50 en La Pampeana.
- en cada una de las tres empresas, a aumentos iguales de distancia, iguales aumentos de los costos.
- para cada empresa, hay distintas formas de calcular el precio de un viaje. Y las formas de calcular para distintas compañías se parecen. Por ejemplo, vimos:
  - Buen viaje: $44 + 3 \cdot x$ y $(x - 45) \cdot 3 + 179$
  - La Pampeana: $(x - 47) \cdot 2{,}5 + 170$ y $(x \cdot 2{,}5) + 52{,}50$
  - Caldén: $C(x) = 3 \cdot x + 45$

Estas primeras ideas se revisitarán y generalizarán a la luz del trabajo sobre nuevos contextos y nuevas funciones. Quizás surjan otras comparaciones interesantes, por ejemplo, sobre qué datos se dan en el problema y qué pudieron calcular o sobre cómo hallaron el precio por kilómetro.

ACTIVIDAD 5

Esta actividad despliega tres novedades respecto de las anteriores: se presenta en un contexto diferente –lo que permitirá ir precisando y generalizando una caracterización de la idea de variación uniforme–; la situación a modelizar es un fenómeno decreciente y se inicia el trabajo con la representación gráfica de la función que se define.

En los primeros ítems proponemos, a partir de una tabla, un trabajo en torno al cálculo de las variaciones, a imágenes y a la producción de una fórmula. La particularidad de caracterizar un fenómeno decreciente genera que los y las estudiantes tengan que reacomodar y ajustar las formas de establecer y de formular relaciones trabajadas hasta ahora.

Para vaciar el tanque de agua de un edificio se compró una bomba que permite hacerlo de manera uniforme en el tiempo. Para estudiar su funcionamiento, se tomaron las siguientes mediciones:

43. Se trata de nuevas descontextualizaciones, porque también las distintas preguntas y discusiones surgidas al resolver los problemas tuvieron, en parte, la misma intención.

Cantidad de agua que hay en el tanque medida en litros		3.300		2.400	2.025	1.275	
Cantidad de minutos que funciona la bomba	0		11,5	12	14,5	19,5	20,8

Primera parte

a. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen su respuesta:
1. La bomba vacía 200 litros por minuto.
2. La bomba vacía 150 litros por minuto.
3. La bomba vacía 1.125 litros cada 7,5 minutos
b. Completen la tabla con los valores faltantes.

Con el primer ítem se pretende que los y las estudiantes comiencen a caracterizar la manera en que la bomba vacía la pileta, identificando la equivalencia entre diferentes variaciones. La primera opción es falsa; sin embargo, es posible que ciertos o ciertas estudiantes la establezcan como verdadera, apelando a la división entre 2.400 y 12. La segunda puede ser puesta a prueba si consideran la cantidad de litros que vació la bomba en algún intervalo de tiempo y, luego, dividen por la cantidad de minutos del intervalo. Del mismo modo, pueden validar la tercera opción al considerar que el volumen de agua se desagota en el intervalo de 12 a 19,5 minutos o apoyándose en la afirmación 2.

En el trabajo con el ítem b) es interesante destacar que el orden que los y las estudiantes elijan para comenzar a completar podría influir en el tipo de estrategia desplegada. Si hubiera estudiantes que optaran por completar la tabla comenzando desde izquierda y se les dificultara la tarea, la o el docente podría sugerirles comenzar, por ejemplo, por el tercer casillero, que es un dato sencillo de inferir. Para completarlo, se pueden apoyar en la primera columna completa de la tabla (2.400 l; 12 min) y en las afirmaciones verdaderas del ítem a). Pueden calcular primero la cantidad de agua que extrae la bomba cada media hora, dividiendo en 2 a 150 (o, menos probable, dividiendo en 15 a 1.125), y luego sumarle ese valor a 2.400. Puede ser que haya quienes resten el valor obtenido a 2.400 –probablemente, asociando la acción desagotar con la operación resta–. En ese caso, sería importante ayudar a que identifiquen que el volumen a hallar debe ser mayor que 2.400. También pueden apoyarse en la primera columna completa (2.400/12) para encontrar que, a los 6 minutos, el tanque tiene 3.300 litros. Lo mismo podría ocurrir si identificaran el 0, que les propone la primera columna, con el momento en que se enciende la bomba. Si bien esta relación puede parecer sencilla de establecer, algunos y algunas estudiantes pueden confundirse. Tal vez, una vez que todo el grupo de la clase haya terminado de completar los otros casilleros, se pueda analizar colectivamente el significado de ese 0 y la forma de calcularlo. Si este fuera el caso, el o la docente también podría proponer que, a partir de saber que el tanque tiene 4.200 al comenzar el vaciado, vuelvan a calcular los valores de los casilleros ya completos.

La forma de completar el último valor de la tabla depende mucho de los conocimientos sobre números racionales que manejen los y las estudiantes. El valor 20,8 apunta a que se explicite el producto 150 · 20,8 o bien 150 · 0,8 como una manera de calcular la cantidad de agua que vació la bomba en 0,8 minutos, para luego sumarle 3.000 (150 · 20).

c. *Definimos la función V(t) = cantidad de agua que hay en el tanque (en litros) luego de t minutos de funcionamiento de la bomba. Armen una fórmula para V(t).*

Como ya hemos visto, es probable que la producción de una fórmula esté ligada al procedimiento que los y las estudiantes hayan desplegado al completar la tabla. Esto hace que en la clase aparezcan diferentes fórmulas. Por ejemplo, podrían surgir las estrategias:

- Apoyados en la primera columna de la tabla, es probable que la fórmula sea: 4.200 – 150 · *t*; es decir que el término independiente aparezca como un volumen inicial al que se le van restando los litros que la bomba saca en función del tiempo.
- Si consideran otro dato de la tabla es probable que, apoyados en los cálculos que realizaron en los ítems anteriores, aparezcan dos fórmulas (que tomen como condición que las longitudes de los intervalos de tiempo sean positivas). Por ejemplo, al considerar que a los 12 minutos hay 2.400 litros de agua en el tanque, podría surgir:
  - *Si el tiempo es mayor que 12, la fórmula sería: V(t) = 2.400 – (t – 12) · 150.*
  - *Si el tiempo es menor que 12, sería: V(t) = 2.400 + 150 · (12 – t).*

Al igual que en las actividades anteriores, será importante que, en el momento de discusión colectiva, la o el docente proponga estudiar la equivalencia de todas las expresiones que surjan. Esto puede generarse a partir de utilizar la propiedad distributiva atendiendo a la novedad, y complejidad, de operar con ella en un término que aparece restando.

En particular, en el caso de aquellas fórmulas “partidas” para valores mayores y menores que un tiempo, se propone analizar que las cuentas que se hacen para, por ejemplo, números mayores que 12 min es análoga en una u otra fórmula (y lo mismo si se toman valores menores que 12). El análisis con casos particulares puede ayudar a visualizar y comprender el “juego de signos” que hay detrás de estos cálculos.

A continuación, presentamos la segunda parte de esta actividad, donde se propone que los y las estudiantes comiencen a establecer una relación precisa entre la información numérica que se tiene –o se podría tener – de la situación y las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. A partir de esto, propiciamos estudiar las características del gráfico en relación con la variación uniforme que identifica a la función.

Segunda parte

d. *En el siguiente sistema de ejes (Figura 1),[44] ubiquen los siguientes puntos en (12, 2.400) (13, 2.100) (10, 2.700)*

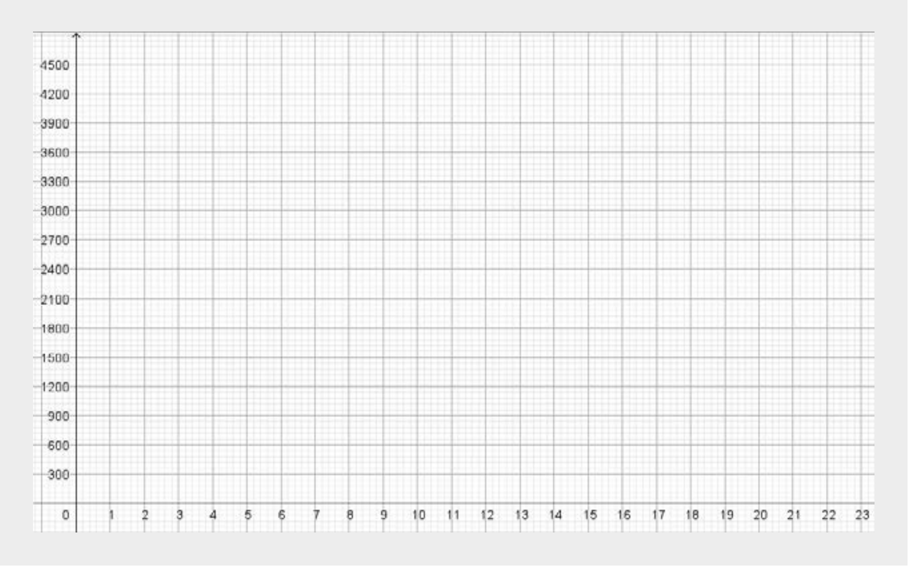


Figura 1

e. *Consideren el problema del vaciado del tanque y analicen cada uno de los puntos que ubicaron en el ítem d). ¿Representan la cantidad de volumen de agua para el tiempo indicado? Si creen que sí, expliquen por qué. Si creen que no, cambien solo una de las coordenadas para que el punto tenga tanto la información del tiempo como la del volumen de agua del tanque en ese tiempo.*

Los tres puntos que se dan en el ítem d) son sencillos de ubicar ya que se encuentran en intersecciones de la cuadrícula. En este sentido, se propone que, junto con los y las estudiantes, se recuerde la relación entre cada una de las coordenadas del punto y su representación como punto en el plano cartesiano.

En el ítem e) se invita a vincular los puntos del sistema cartesiano con la función que se está estudiando. Será importante que el profesor o la profesora

44. El gráfico de esta actividad está disponible en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo3/Primera_parte_Grafico_Actividad5-item-d.pdf>.

ayude a recuperar que se trata de analizar los puntos en relación con la situación y que explicite las magnitudes y unidades para cada uno de los ejes del plano.

El primer punto propuesto es un dato que ofrece la tabla, por lo que será fácil de reconocer que se trata de un punto que tiene que estar en el gráfico de la función. Algunas y algunos estudiantes pueden sostener que (13, 2.100) es también un punto del gráfico de la función, dado que “está como una intersección de la cuadrícula”. Es muy frecuente este tipo de respuesta en la que, para decidir, pareciera predominar lo que se “ve” (los puntos intersección de la cuadrícula) por sobre la idea de que el punto tiene que contener cierta información de la función. Si esta estrategia surgiera durante el trabajo en pequeños grupos, se proponemos que se la analice y discuta con toda la clase. Otra posibilidad es que encuentren una contradicción entre la información que ofrece el punto y el hecho de que cada una hora la bomba vacía 150 litros, y no 300 como se concluiría al analizar la variación entre los primeros dos puntos dados en d). También podrían descartar el punto, usando la fórmula para calcular la imagen de 13.

El punto (10, 2.700) podría identificarse como uno de la función apelando a las mismas estrategias mencionadas anteriormente: por estar cerca de (12, 2.400) y en una intersección; utilizando la fórmula que produjeron en el ítem c) o por presentar, en relación con el (12, 2.400), una variación de 2 horas y un vaciado de 300 litros. Esta última estrategia podría estar apoyada en un trabajo que analice la variación a partir del registro en una tabla o gráfico (Figura 2):

Tiempo de funcionamiento de la bomba	Cantidad de agua en la pileta
12 minutos	2.400 litros
10 minutos	2.700 litros

2 min. antes

300 litros más

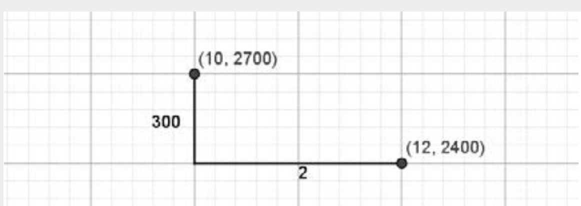


Figura 2

Alentamos a que, si en el aula no surgiera esta forma de abordaje, el o la docente realice un trabajo que vincule las formas de pensar en estos dos registros. Por ejemplo, otra posibilidad es que los y las estudiantes tomen dos de los puntos que propone la actividad y tracen la recta que pasa por ellos y que luego, a partir del dibujo, decidan si el tercer punto está o no está. Si uno de los dos puntos con el que trazaran la recta fuera (13, 2.100), podrían sostener que el tercer punto no pertenece al gráfico de la función. Sugerimos reflexionar colectivamente sobre esta forma de analizar el problema, ya que les aportaría, a quienes no lo hubieran hecho, un abordaje desde el registro gráfico. Se espera que otras estrategias basadas en el contexto y en los datos numéricos de otros y otras estudiantes ofrezcan elementos para discutir y cuestionar esta.

En el *momento del análisis colectivo* de las respuestas a estos ítems será interesante que el profesor o la profesora proponga que se expliciten estrategias cercanas a las descriptas anteriormente, con el objetivo de discutir los argumentos en los que se apoya cada una y ayudar a hacerlos avanzar. Recomendamos que el eje de esta discusión para descartar o aceptar un punto de los dados sea a partir de los argumentos que relacionan dos puntos del gráfico de la función, identificando gráficamente la variación del tiempo y la del volumen de agua del tanque. Esto se puede visualizar en la Figura 2, como el "escalón" que queda determinado por dos puntos del gráfico y donde se explicitan ambas variaciones. Este análisis recupera las ideas que se vienen movilizando en las actividades anteriores, pero esta vez, estudiando la particularidad de "cómo se ve" en el sistema de eje cartesianos.

Una vez finalizada la discusión colectiva sobre el ítem e), se puede plantear una nueva tarea: proponer nuevos puntos que correspondan al gráfico de V(t) y ubicarlos. Es probable que sitúen otros puntos a partir de las columnas de la tabla que completaron, que usen la fórmula para generar nuevos y también que, apoyados en la discusión colectiva del ítem e), produzcan puntos trabajando sobre el registro gráfico y haciendo uso de "escalones" en los que identifiquen diferentes variaciones (Figura 3). Por ejemplo, sugerimos en el análisis colectivo priorizar esta forma de producir, ya que pone en juego la forma de analizar variaciones en el registro gráfico.

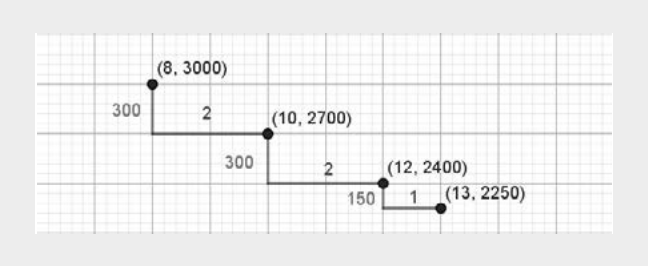


Figura 3. Producción de puntos con la estrategia de "escalones"

Si en el aula, ningún grupo desplegara ideas cercanas a estas, pueden plantearse preguntas con la intención de trabajar esta forma de generar puntos del gráfico de la función: ¿cuánto hay subir o bajar verticalmente para ubicar el punto que corresponde a 2 minutos antes de las 10?, ¿y al que corresponde a 1 minuto antes?, ¿cuánto hay que moverse horizontalmente si se sabe que el agua de la pileta descendió 600 litros?

Antes de pasar a la próxima actividad, queremos destacar que cuando se hayan revisitado las ideas de *variación uniforme* a partir de distintos contextos (los aquí propuestos y, eventualmente, otros nuevos), será un buen *momento para identificar esta propiedad*, mediante la puesta en relación con los problemas trabajados. Por ejemplo, podría mencionarse: "Las funciones de las actividades anteriores verifican que si se aumenta la variable independiente una cantidad fija, la variable dependiente también varía (aumentando o disminuyendo) una cantidad fija. Por ejemplo, en la Actividad 1, por cada 10 kilómetros que aumenta la distancia a Santa Rosa, el costo del viaje aumenta $30. Y, en la Actividad 5, por cada minuto de funcionamiento de la bomba, la cantidad de agua del tanque disminuye 150 litros".

ACTIVIDAD 6

En esta actividad se pretende que los y las estudiantes establezcan relaciones entre el contexto que ofrece la situación, las fórmulas y el gráfico de la función V(t). Se trata de identificar qué características de la situación se pueden obtener a partir del gráfico y de las fórmulas. Este trabajo no solo permite la comprensión de cada registro de representación en sí mismo, sino también fortalecer las ideas que se van construyendo sobre las funciones que modelizan fenómenos de variación uniforme, es decir, las funciones lineales.

A partir de la representación gráfica de la función V(t) y de la fórmula que armaste en la actividad anterior:

- *a) ¿En qué lugar del gráfico se puede leer el momento en que se encendió la bomba? ¿Cuánta agua hay en el tanque en ese momento? Explicá tu respuesta.*
- *b) ¿Cómo se puede obtener, usando la fórmula, el volumen de agua que hay en el tanque al encender la bomba?*

El primer ítem es probable que haya sido analizado en la actividad anterior; en este caso se trata de que los y las estudiantes puedan "poner palabras" a la forma de leer esta información en el gráfico, que las precisen, las escriban. Las frases que se armen como respuestas serán un apoyo importante para enfrentar el ítem b). En este, se propone que establezcan que, sea cual sea la fórmula elegida de la actividad anterior, se debe reemplazar a la variable independiente por el valor 0. La discusión colectiva podría girar en torno a que en la fórmula $V(t) = 4200 - 150 \cdot t$ puede leerse el dato directamente y que esto se debe a que el segundo término da 0, cosa que no pasa en las otras fórmulas.

- *c) ¿Cuánto tarda en vaciarse el tanque? ¿En qué lugar del gráfico se puede ver esta información? ¿Cómo se puede obtener, usando la fórmula, el tiempo que tardó en vaciarse el tanque?*

d) ¿Cuánto tarda la bomba en vaciar la mitad de la pileta? ¿Cómo lo podés ver en el gráfico?

Los ítems c) y d) también tienen como intención poner en palabras la forma de leer en el gráfico alguna característica de la situación y, a la vez, el modo de trabajar con la fórmula para obtenerlo. Es importante decir que no se trata aquí de abordar o retomar las formas de resolución de la ecuación $4.200 - 150 \cdot t = 0$, sino más bien de explicitar la condición que se debe plantear sobre la fórmula (se necesita que el volumen del agua sea cero) y de establecer que el tiempo en que eso ocurre se encuentra cuando se logra que el segundo término sea 4.200. Será importante destacar con los y las estudiantes que si se considera, por ejemplo, la igualdad $0 = 2.400 - (t - 12) \cdot 150$, el segundo término tendrá que ser igual a 2.400.

ACTIVIDAD 7

a) Dibujá un rectángulo ABCD que tenga su lado AB de 3 cm y su lado AD de 2 cm. ¿Cuál es su perímetro y área?
b) Si se agranda 4 cm cada uno de los lados del rectángulo ABCD, queda un nuevo rectángulo AEFG. Dibujalo sobre el rectángulo anterior y calculá su perímetro y área.
c) Se quieren construir nuevos rectángulos AEFG cambiando –de la misma manera– la longitud de BE y DG, para estudiar el perímetro y el área de los rectángulos a medida que se cambia la medida de BE. Completá la siguiente tabla:

Longitud del segmento BE (cm)	2	4	5	6	10	15		30	
P = perímetro del rectángulo AEFG (cm)									134
A = área del cuadrilátero AEFG (cm^2)							506		

d) En grupos analicen si A o P son funciones de variación uniforme.

Los tres primeros ítems tienen la intención de que los y las estudiantes se involucren con la situación. Además de los rectángulos que se les pide que construyan, se les puede sugerir que armen otros para que queden bien identificadas las variables y algunas relaciones que definen a las funciones que se van a estudiar. En el ítem c) se presenta una tabla que, a diferencia de las anteriores, tiene todas las columnas incompletas, por lo que, en principio, no ofrece información sobre la situación que pueda ser utilizada para completar otros casilleros. El cálculo del perímetro y del área de un rectángulo, cuando se da la medida de sus lados, se supone conocido (o fácilmente recordado) por los y las estudiantes, por lo que podrán llenar todos los casilleros de la tabla. Sin embargo, una vez completados algunos valores y apoyados en el trabajo que se viene realizando, es posible que haya quienes intenten completar algún casillero asumiendo que las funciones varían uniformemente. Este asunto se analiza en el ítem siguiente.

Para analizar el tipo de variación –ítem d)–, alumnos y alumnas pueden analizar las variaciones de la imagen al considerar intervalos de igual longitud de la variable independiente (a partir de la tabla se pueden identificar varios intervalos de longitud 2 cm, 5 cm o 10 cm). A su vez, el estudio de las variaciones de la función que calcula el área permite que se vinculen con las formas de reconocer una función que no varía uniformemente. Este reconocimiento ofrece nuevos puntos de apoyo para caracterizar funciones que sí tienen ese tipo de variación.

Es importante que en el *momento análisis colectivo* de este ítem, se identifique que el estudio de algunos intervalos a partir de la tabla alcanza para afirmar que no se trata de una función de variación uniforme, pero resulta insuficiente cuando se trata de identificar que sí lo es. Es decir, el análisis de algunos casos particulares (como los que se pueden obtener a partir de una tabla), pone en escena una regularidad que no es suficiente para determinar si la función es lineal. El o la docente puede decidir incorporar alguna justificación desde el contexto que permita generalizar aquello que, a partir de la tabla, se puede conjeturar. En este caso, se puede analizar a partir de una figura de análisis en la que, cada vez que se aumenta 1 cm a un lado, el perímetro aumenta 4 cm.

e) Llamemos x a la longitud de BE en cm, P(x) a la función perímetro y A(x) a la función área. Para cada uno de los siguientes gráficos (Figura 4),[45] decidan si pueden corresponder o no al gráfico de P(x). Para cada uno de los gráficos den argumentos que justifiquen sus respuestas.

La intención del ítem e) es que se analice cada uno de los gráficos buscando razones para aceptarlo o descartarlo como representación de cada una de las funciones. La tarea de elegir un gráfico posible para cada una de las funciones estudiadas es una tarea que comporta una complejidad diferente a la confección del gráfico propuesto en la actividad anterior, ya que se ponen en juego ideas y conocimientos de características distintas. Por ejemplo, los y las estudiantes tienen que identificar qué leer en cada uno de los gráficos que se ofrecen y cómo relacionarlo con los datos que se posee de las funciones; también tienen que proponer una escala para cada eje.

Se sugiere que el o la docente ayude a organizar la exploración pidiéndoles que tomen uno de los gráficos, analicen si puede corresponder o no a P(x) y

45. Los Gráficos 1 y 2 se pueden visualizar en <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo3/Primera_parte_Actividad7_graficos1y2.pdf> y los Gráficos 3 y 4, en <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo3/Primera_parte_Actividad7_graficos3y4.pdf>.

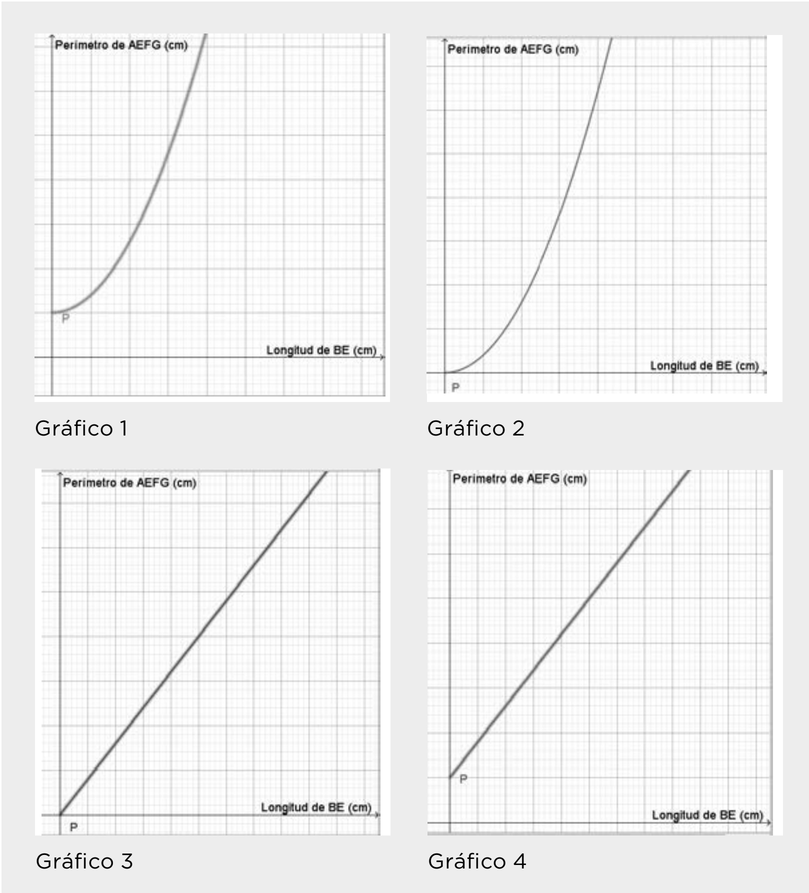


Figura 4

argumenten por qué se lo podría elegir y/o descartar. Esta misma dinámica se puede sostener en el momento de análisis colectivo, en el que se sugerimos focalizar en los argumentos que generen en el trabajo en pequeños grupos, para ayudar a formularlos y precisarlos.

Para resolver esta tarea es probable que los alumnos y las alumnas:

- Se apoyen en la construcción realizada en la Actividad 5 y asocien rápidamente una función para el tercer gráfico y otra para el cuarto. Los argumentos estarían ligados a que esos gráficos son iguales al que estuvieron trabajando anteriormente.
- Consideren que P*(x)* varía uniformemente y que A(*x*), no; y generalicen lo analizado en la Actividad 5 para elegir el segundo par de gráficos como posibles para P(*x*) y el primer par, para A(*x*). En este caso, se espera que emprendan un trabajo en torno a las diferencias entre cada par de gráficos y precisen que ninguna de las funciones puede pasar por el punto (0, 0).

- Elaboren un gráfico, a partir de los datos que se tienen, con el objetivo de comparar "su" gráfico con alguno de los que se ofrecen.
- Con la intención de ubicar puntos a partir de la información que tienen en la tabla, intervengan los gráficos que se ofrecen, proponiendo una escala para cada uno de los ejes. En este caso, es esperable que el o la docente ayude a recuperar algunos asuntos respecto de las graduaciones de los ejes: que van de menor a mayor; que una vez que se elige una unidad, no se puede proponer otra sobre el mismo eje, etc. Una vez seleccionadas las escalas, pueden ubicar puntos de cada una de las funciones.
- Se apoyen en los argumentos que se abordaron en la Actividad 5 al momento de producir nuevos puntos del gráfico de la función a partir de tener ubicado un punto; es decir, que recuperen las formas en que se visualiza la variación uniforme si se consideran, por ejemplo, tres puntos del gráfico de la función.

Todos estos argumentos, en particular este último, deben formar parte del *análisis colectivo de este ítem*, con el propósito de avanzar en la caracterización gráfica de la variación uniforme, de identificar características en el gráfico de aquellas que no lo son y de relacionar estas ideas con las nociones de curvo y recto. Es decir, avanzar en la idea de que si el gráfico de una función es curvo, seguro no se trata de la representación de una variación uniforme, y si es recto, seguro que sí. También se puede analizar por qué los gráficos no pueden pasar por (0, 0). Será necesario que el profesor o profesora esté sensible a las expresiones que utilicen los y las estudiantes para expresar estas ideas; a veces, en sus dichos, no está tan claro cómo están mirando algo del gráfico, en dónde lo ven, con qué elementos del problema lo relacionan. Por ejemplo: "Porque este va parejo" o "Este crece un montón" son frases que suelen intentar atrapar características de lo que ven en el gráfico. Sería importante que estas explicaciones sean sostenidas por el o la docente, con la intención de ayudar a que las precisen, marquen y expliquen sobre el gráfico o que expliciten si es pertinente o no sobre la situación y por qué.

A partir de lo desplegado en las actividades anteriores, se puede proponer un nuevo *momento de síntesis*, que converja en la elaboración colectiva de una definición de funciones de variación uniforme. Por ejemplo, se pude pedir a los chicos y las chicas que revisiten cada una de las actividades y que para cada una de ellas escriban: frases que tengan registradas en sus carpetas que refieran a que el fenómeno es de variación uniforme (por ejemplo, "la bomba desagota 150 litros por minuto"), las fórmulas que se produjeron y las características de los gráficos, entre otras. Un trabajo similar se propuso con los primeros cuatro problemas; se trata ahora de retomar lo analizado en aquel momento y engordarlo, incorporando las nuevas reflexiones en torno a una función decreciente, a sus fórmulas, a la representación gráfica de las funciones de variación uniforme.

Una vez que se expliciten varias frases, fórmulas y algunas características de los gráficos se puede elaborar colectivamente una definición de función de variación uniforme que recoja y generalice ciertos elementos de los identificados por las y los estudiantes:

- las funciones de las actividades anteriores cumplen con que: para cada aumento fijo de la variable independiente, la variable dependiente también varía (aumentando o disminuyendo) una cantidad fija;
- por ese tipo de aumento de las variables, el gráfico de las funciones es una línea recta;
- en lo gráfico la variación uniforme se puede ver con escalones que tienen la misma longitud horizontal y vertical; y
- puede haber varias fórmulas para cada función de variación uniforme. Una de ellas tiene la forma $f(x) = a \cdot x + b$.

ACTIVIDAD 8

Esta actividad retoma algunas de las cuestiones que se vienen analizando (relación entre los puntos del gráfico de la función y la situación; dominio e imagen de la función) y avanza en el estudio de la relación entre diferentes fórmulas que explicitan la función y su representación gráfica utilizando el *software* GeoGebra.

En este problema vamos a trabajar a partir del rectángulo ABCD de la actividad anterior, pero ahora, agrandando solo uno de los lados.

a) Si se mantiene la longitud del lado AD y se agranda 1 cm el lado AB del rectángulo ABCD, queda un nuevo rectángulo AEFD, como se muestra en la Figura 5. Calculá su área.

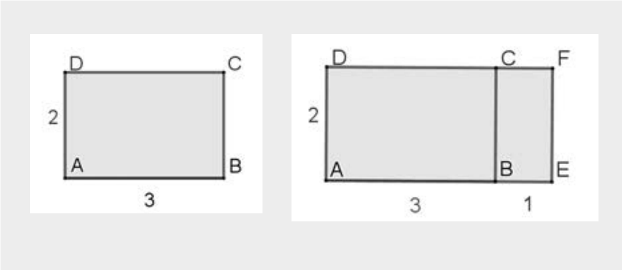


Figura 5

b) Completá la tabla:

Cantidad que se alarga la base BE (cm)	1	7	$\frac{55}{3}$	2,25			
Área del rectángulo AEFD (cm²)					58	$\frac{54}{7}$	4

En esta actividad, al igual que en el problema anterior, se presenta una tabla en la que no se ofrece información sobre la situación, sino que hay que completarla recurriendo al cálculo del área de un rectángulo. Pero se diferencia en que los datos no presentan ninguna regularidad para caracterizar intervalos de igual longitud.

Los valores que están en la tabla habilitan a que se identifique que la variable independiente puede tomar, por ejemplo, valores racionales no enteros. También, se invita a analizar que el valor del área no puede ser menor que 6 cm^2. Será interesante discutir con el grupo que, si bien se pueden realizar cálculos para cualquier medida de BE, el contexto impone ciertas condiciones que hacen que, por ejemplo, no exista una medida de BE para el área 4 cm^2. Las reflexiones que se generen en esta parte de la actividad serán un buen soporte para el trabajo que se propone en los ítems siguientes.

c) *Si llamamos A(x) al área total del rectángulo AEFD y x a la longitud de BE, ¿cuál o cuáles de las fórmulas siguientes sirven para calcular esa área?:*
   i) $A(x) = 2 + 3 + x$,
   ii) $A(x) = 6 + x \cdot 2$,
   iii) $A(x) = x \cdot 3 + 6$,
   iv) $A(x) = (3 + x) \cdot 2$,
   v) $A(x) = (x - 7) \cdot 2 + 20$.

Para el análisis de las primeras cuatro fórmulas que se presentan, los y las estudiantes se pueden apoyar en el contexto del problema, en el proceso de cálculo que desplegaron en los primeros ítems. La quinta fórmula es válida; sin embargo, es posible que la descarten, ya que es difícil que la asocien a un proceso de cálculo de área. Sugerimos que la validación de las fórmulas elegidas no se realice luego del momento de trabajo del alumnado con este ítem c); sino luego del trabajo con la consigna e), puesto que en los próximos dos ítems se estudiará la equivalencia de expresiones vía gráficos (que en el GeoGebra se realizan a partir de fórmulas), analizando si pueden corresponder o no a la situación y los datos numéricos conocidos.

d) *Abrir un archivo GeoGebra*[46] *y ubicar dos puntos que representen los dos primeros pares de valores de la tabla que completaron en el ítem a). Para eso, en la barra de entrada escriban: "P = (1, 8)" y "Q = (7, 20)".*[47] *Agregar en el mismo archivo otros dos puntos que representen los pares (extensión de la base, área de AEFD) para otros rectángulos.*

46. El GeoGebra también puede descargarse en dispositivos móviles desde Play Store.

47. Advertimos que cada componente debe separarse con coma y no con punto y coma.

e) Escribir en la barra de entrada del GeoGebra la o las fórmulas que hayas elegido. En cada caso, se obtiene el gráfico de la función que corresponde a esa fórmula. También escribí las que consideres que no son fórmulas que modelicen a A(x). ¿Cómo usarías lo que ves en la pantalla para corroborar tus respuestas del ítem c)?

En el ítem d,) los alumnos y las alumnas pueden representar otros puntos con la información que aparece en la tabla. Es importante señalar que al abrir el programa el sistema de ejes cartesianos trae predeterminada la escala que se muestra. Es probable que al poner los puntos, los y las estudiantes no los visualicen. La herramienta del *zoom* colaborará para poder ver todos los puntos que se ponen.

Antes de comenzar a trabajar con el último ítem, proponemos que el o la docente invite a realizar afirmaciones sobre las características que va a tener el gráfico de la función, y que anote en el pizarrón las anticipaciones que los y las estudiantes vayan realizando. Como los puntos ubicados se visualizan alineados, algunas afirmaciones que podrían surgir son: que está formado por puntos alineados con los que se graficaron (una mirada discreta de la situación), que es una recta (una mirada continua de la situación) o que es una "recta" que comienza en un punto y termina en otro (caracterizando o no los puntos extremos). Este listado servirá como base para las discusiones colectivas que se generen a partir del siguiente ítem.

El profesor o la profesora podría preguntarles si piensan que se trata de una función que varía uniformemente e incitarlos a que traten de caracterizar esta variación. Para abordar esto es posible apoyarse en diferentes registros, con diferentes ideas. Por ejemplo, a partir de:

- la información que ofrece la tabla, pueden estudiar las variaciones de intervalos que tengan la misma longitud (esta sería una validación necesaria pero no suficiente);
- la "forma" de la fórmula, identificando la variación por unidad en la pendiente que seguramente, en el aula, se mencione como "el número que multiplica a la *x*"; y
- la información que aporta el contexto, para identificar que por cada cm que se agrega a la base, el área aumenta 3 cm^2.

Una vez más se trata de identificar y caracterizar la variación uniforme a partir de diferentes formas de representar la función. Con este análisis colectivo, se podría concluir que el gráfico de esta función será una recta, un segmento o un conjunto de puntos alineados.

Como ya hemos anticipado, el ítem e) apunta a que los y las estudiantes elaboren herramientas para poder comprender que si una fórmula modeliza la situación, el gráfico que le corresponde debe pasar por los puntos que se generan a partir, precisamente, de esa situación y que, si el gráfico que se obtiene a partir de una fórmula no pasa por alguno de esos puntos, la fórmula no modeliza la situación. Como los puntos marcados en d) son puntos del gráfico de la función *A(x)*, deben pertenecer a la recta que se visualiza en la pantalla. Si eso no se ve representado, es porque la fórmula elegida no corresponde a la función que se está estudiando.

Este trabajo permitirá abordar la equivalencia de expresiones vía la igualdad de los gráficos de las funciones que se obtienen a partir de las fórmulas. Observando la "coincidencia" de los gráficos de las funciones, se puede asegurar que la expresión: $(x - 7) \cdot 2 + 20$ (probablemente poco elegida por los alumnos y las alumnas como fórmula de la función) es equivalente $2x + 6$ y $(3 + x) \cdot 2$. Una vez que esto sea objeto de reflexión colectiva, se puede proponer que se valide algebraicamente la equivalencia de todas estas expresiones; es decir, se transforme la escritura de una en otra apoyándose, por ejemplo, en la propiedad distributiva o en la idea de que $(x - 7) \cdot 2$ es equivalente a "sumar dos veces $(x - 7)$".

Otro asunto importante es el análisis de las diferencias entre el gráfico de la función que se visualiza en la vista gráfica del GeoGebra y el gráfico de la función que modeliza la situación. La visualización de la recta puede generarles sorpresa a quienes hayan anticipado que los valores de x tienen que ser mayores que 0. A partir de este desconcierto se puede invitarlos/las a que elaboren argumentos sobre el porqué de estas diferencias entre lo que se esperaba y lo que el GeoGebra dibujó. Una vez analizadas estas diferencias, el o la docente puede proponer una manera de ingresar las funciones en GeoGebra, que permite "controlar" el dominio de la función, justamente: "Función (fórmula, inicio, final)". De este modo, desde el programa también se puede controlar la coherencia entre el gráfico de la función que modeliza la situación y la fórmula que la representa. Luego del trabajo con este ítem, se espera que las y los estudiantes tengan herramientas/argumentos para comprender que las fórmulas se pueden observar con diferentes dominios; si modeliza una situación, es necesario contemplar el dominio para no generar inconsistencias entre los registros.

ENCUENTRO Y ECUACIONES

La siguiente serie de actividades tiene como objetivo el estudio de $f(t) = g(t)$, donde f y g son funciones lineales. Por lo general, lo llamaremos *estudio de situaciones de encuentro*. Las consignas proponen trabajar sostenidamente con distintos registros de representación (gráfico, fórmula, numérico), para producir o aproximar una respuesta y/o para controlar su validez.

A propósito del estudio de situaciones de encuentro, las actividades abordan cómo promover inicialmente, y con sentido, el planteo y resolución de ecuaciones provenientes de este tipo de problemas (igualdad de dos funciones lineales). Se desarrollan argumentos que se apoyan en el contexto del problema y se explicita la necesidad de entramar con otros discursos que justifican técnicas de resolución de ecuaciones y que focalizan en la conservación del conjunto solución.

ACTIVIDAD 1

En esta actividad proponemos comparar gráficamente los valores de dos funciones, variando el tipo de pregunta que puede abordarse. Planteamos el uso de la fórmula para el control de lo hallado.

Primera parte

En un complejo de piscinas se llenan dos piletas diferentes: A y B. Cada una se llena con una bomba que tira un caudal constante de agua. Se sabe que la bomba de la pileta B descarga 1.500 litros en una hora. En el siguiente gráfico (Figura 6) están representadas las funciones A(t) y B(t), definidas como la cantidad de agua en litros que hay en cada pileta a través del tiempo (t), medido en horas, desde que comienzan a llenarse.

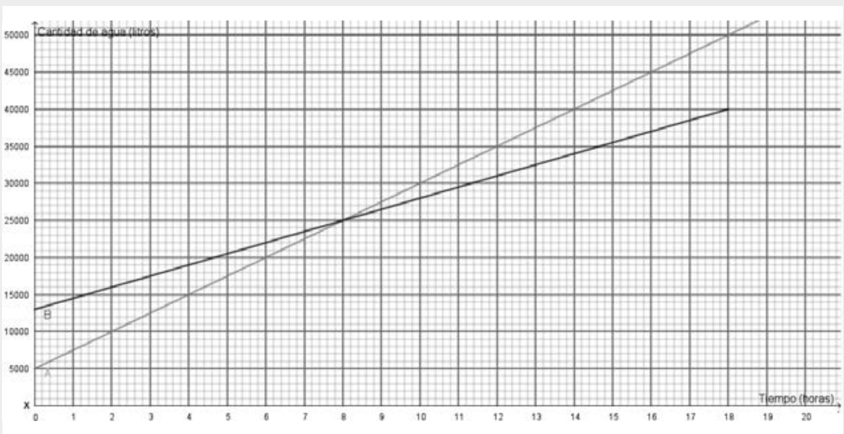


Figura 6

a) La capacidad máxima de la pileta B es 40.000 litros. ¿En qué momento la pileta B alcanza esa cantidad? ¿Y en qué momento tiene la pileta A esa cantidad?
b) Den dos ejemplos de momentos en los que la pileta B tiene mayor cantidad de agua que la pileta A. ¿Cuánta agua más tiene la pileta B en cada uno de esos momentos? Expliquen cómo lo miran en el gráfico.

Los ítems a) y b) contemplan que es la primera vez que se están considerando dos funciones para compararlas. Entendemos que esto no debería traer muchas dificultades y sugerimos, en la discusión colectiva, hacer hincapié en aquellos argumentos que explicitan cómo los y las estudiantes miran en el gráfico esas relaciones. La pregunta b) puede dar lugar a variadas respuestas. El análisis de los distintos valores propuestos podría poner en escena que la distancia entre los valores de y (o los segmentos verticales que unen ambos puntos) va achicándose. Sería interesante, en este caso, identificar esta cuestión que se profundizará en el próximo problema.

A la vez, el abordaje de estas preguntas será un apoyo para pensar y formular lo que caracteriza a un punto de intersección de los gráficos de las dos funciones. Pues puede colaborar para entender la diferencia entre dos casos: cuando coincide el valor de una de las dos variables (independiente o dependiente) siendo la otra distinta y cuando ambas variables coinciden.

Segunda parte

c) ¿En algún momento, ambas piletas tienen la misma cantidad de agua? En caso afirmativo, indiquen ese instante y la cantidad de agua que tienen ambas piletas. Si consideran que no, expliquen cómo lo saben.

d) Calculen las fórmulas de A(t) y B(t) y úsenlas para comprobar la respuesta que dieron en c).

Se espera que al resolver el ítem c) identifiquen el punto buscado gráficamente y que puedan usar distintas expresiones para nombrarlo. Algunas de ellas pueden no favorecer la explicitación de ciertas conexiones relevantes al buscar una intersección (por ejemplo, "es donde se cruzan las rectas"). Será preciso indagar con preguntas para conseguir que se exprese claramente qué cumple cada función en ese punto, tanto en términos del contexto como de los valores de la variable independiente y de la dependiente.

Algunos alumnos y algunas alumnas, quizás desconfiando de la mirada del gráfico, pueden usar los "escalones" que les provee la pendiente, u otros equivalentes, para llegar al tiempo $t = 8$, de manera de constatar si ambas cantidades de agua coinciden. En este caso, se asemeja a la propuesta del ítem siguiente y será importante vincular ambas formas de control.

El ítem d) apunta a la identificación de qué condiciones deben cumplir las variables considerando ambas fórmulas. Será entonces relevante el análisis de las respuestas propuestas en términos de qué debe pasar al usar las fórmulas: se busca que al reemplazar en cada fórmula por el mismo valor de t, la cantidad de agua obtenida coincida. Y si al reemplazar en ambas fórmulas por un valor de t (un tiempo determinado), los resultados no coinciden, no se habrá encontrado el punto intersección. De esta manera, el uso de la fórmula se constituye en una herramienta de control.

Considerando el avance en el estudio del encuentro y teniendo como intención un trabajo que profundice y robustezca el aprendizaje sobre las ecuaciones y su resolución, proponemos que el docente recupere estas ideas y pueda escribirlas en el pizarrón de distintas maneras. Por ejemplo:

"Buscamos que para el mismo tiempo t, ambas fórmulas den la misma cantidad de agua.

En $t = 8$ se cumple que $A(8) = 25.000$ y que $B(8) = 25.000$. Usando las fórmulas se obtienen dos cuentas que parecen distintas, pero que dan lo mismo:

$$\overbrace{\underbrace{5.000 + 2.500 \bullet 8}_{25.000}}^{A(8)} = \overbrace{\underbrace{13.000 + 1.500 \bullet 8}_{25.000}}^{B(8)}$$

Dan lo mismo para el valor $t = 8$, y vimos que dan distinto en otros casos".

A partir de recuperar algún valor concreto de los discutidos en la primera parte de la actividad, se podría identificar también que (tomando $t = 4$):

$$A(4) \neq B(4) \quad 5.000 + 2.500 \cdot 4 < 13.000 + 1.500 \cdot 4$$

Dependiendo del conocimiento del alumnado sobre ecuaciones, el o la docente en este momento podría introducir la idea de que en el problema se buscó un valor de t que hiciera que $A(t) = B(t)$; es decir, se estudió para qué valor de t se cumple: $5.000 + 2.500 \cdot t = 13.000 + 1.500 \cdot t$. En este caso, es posible que algunos y algunas estudiantes lo reconozcan como la escritura de una ecuación. Si esto sucediera, en la clase podrían discutirse dos asuntos: las maneras de resolver esa ecuación y la forma de corroborar la solución hallada. Sugerimos, por su importancia, que en este momento se sostenga la corroboración como foco de la discusión colectiva; pues permitirá resignificar lo que se busca al plantear y resolver una ecuación.

ACTIVIDAD 2

Esta actividad profundiza sobre relaciones entre el contexto y las funciones involucradas. Estas permiten argumentar y dar sentido a algunos pasos de la resolución de ecuaciones que provienen del planteo de un encuentro. También propone la búsqueda de un encuentro que no se puede hallar de manera precisa a partir del gráfico y promueve una indagación exploratoria en la que los y las estudiantes puedan usar diversas ideas disponibles, aunque no necesariamente lleguen a la solución exacta. El o la docente puede abordar, entonces, explicaciones para las formas tradicionales de resolución de ecuaciones en vínculo con todas las relaciones elaboradas.

Al mismo tiempo que las piscinas anteriores, se comienza a llenar otra: la pileta C, que inicialmente está vacía, con una bomba que tira un caudal constante de agua de 3.100 litros por hora. En el siguiente gráfico (Figura 7), se representa C(t): cantidad de agua en litros en función del tiempo transcurrido desde que comienza a llenarse.

a) Consideren el llenado de las piletas B y C e identifiquen, si es posible, cual tiene más agua después de 1 hora de comenzar el llenado y cuánta más agua tiene. También cuántos litros contiene a las 4 horas de comenzar el llenado.

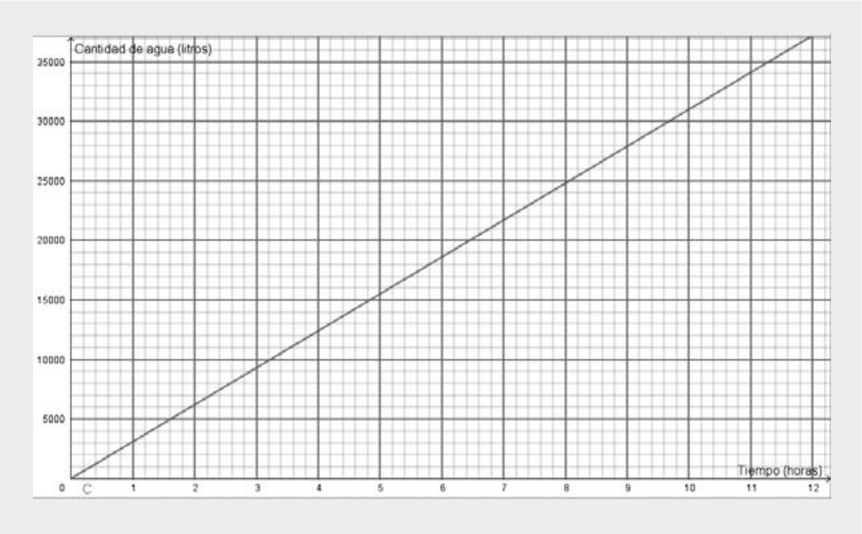


Figura 7

b) Analicen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen por qué:

i) La pileta B siempre tiene más agua que la pileta C.

ii) Por cada hora de llenado, la cantidad de agua de la pileta C aumenta más de lo que aumenta el agua en la pileta B.

iii) La diferencia entre la cantidad de agua de las piletas B y C se va achicando 1.600 litros por cada hora que pasa.

La consigna a) tiene la intención de que comiencen a considerar en simultáneo las funciones $B(t)$ y $C(t)$. En particular, deberán contemplar las diferencias entre ambas para valores dados, con el propósito de empezar a concebir que inicialmente tiene más agua B y que la función $C(t)$ crece más rápido que $B(t)$.

Es importante señalar que los y las estudiantes poseen diversas informaciones sobre cada función: sobre $B(t)$ tienen un gráfico dado en la primera parte de la Actividad 2 y la fórmula, mientras que sobre $C(t)$ tienen el gráfico, la velocidad de llenado y la ordenada al origen, brindados en el enunciado.

Hay un espacio para que los alumnos y alumnas decidan con cuáles de todas esas informaciones van a abordar el problema. Podrían realizar un estudio puntual apoyándose en distintas representaciones para hallar valores: ambos gráficos por separado o en un mismo sistema de ejes, fórmula con gráfico o velocidad de la bomba con fórmula. Se sugiere que, en el espacio colectivo, al hablar de una resolución, expliciten de dónde obtuvieron la información buscada.

En algunos casos, podrían aparecer valores aproximados en las respuestas, con o sin explicitación de que no son exactos. Será importante estar atentos e identificar qué información se considera aproximada y por qué, y cuál se puede asegurar que es información exacta.

Sobre el verdadero o falso planteado en el ítem b):

La afirmación i), “La pileta B siempre tiene más agua que la pileta C”, es falsa. Se trata de que los y las estudiantes puedan argumentar que aunque al comienzo la pileta B contiene más agua que C, luego C posee una cantidad superior. Podrían comparar numéricamente para distintos valores (como ya dijimos, apoyándose en distintas representaciones), graficar ambas funciones en un mismo gráfico o apoyarse en el contexto para afirmar que si bien la cantidad de agua de las dos piletas va aumentando, la C se llena mucho más rápido, por lo que se va acercando a lo que tiene la pileta B hasta que en algún momento la supera.

La siguiente, “Por cada hora de llenado, la cantidad de agua de la pileta C aumenta más de lo que aumenta el agua en la pileta B”, es verdadera. Esta afirmación busca que todos y todas consideren y comparen las velocidades de llenado antes de la discusión colectiva. Quizás algunos/as se apoyen en el cálculo numérico, mientras otros/as tomen la información de las bombas. En este caso, sería un buen momento para vincular ambas estrategias y recuperar la característica de la pendiente de la función lineal.

La tercera y última afirmación, “La diferencia entre la cantidad de agua de la pileta B y la C se va achicando 1.600 litros cada hora que pasa”, es verdadera. Si por cada hora que transcurre $B(t)$ aumenta 1.500 litros y $C(t)$ incrementa 3.100 litros, entonces, por cada hora, $C(t)$ descuenta 1.600 litros a la diferencia. Esta idea servirá de apoyo para dar sentido a las resoluciones de ecuaciones que provienen del planteo de un encuentro. También, algunos y algunas estudiantes pueden calcular algunas diferencias puntuales para estudiar esta relación que se propone.

c) *¿En un mismo momento las piletas B y C tienen la misma cantidad de agua? Si consideran que sí, hallen aproximadamente ese momento y la cantidad de agua que tienen ambas piletas. Comprueben usando las fórmulas de $B(t)$ y de $C(t)$. Si consideran que no, expliquen por qué.*

Como ya dijimos, se esperan diversas formas de abordar esta pregunta. La solución es t = 8,125 horas (u 8 horas 7 min 30 seg) y la cantidad de agua de ambas piletas es 25.187,5 litros. Esto permite anticipar que muchas respuestas pueden ser aproximadas. Por ejemplo, las y las estudiantes pueden:

- hallar la solución graficando ambas funciones en un mismo sistema de ejes para buscar el punto donde se cruzan. En este caso llegarán a una aproximación;
- encontrar distintos valores numéricos, comparando los de ambas funciones y buscando “encerrar” el buscado. El armado de una tabla de valores es una forma de representación que colabora en esta tarea. Si los y las estudiantes no usan tablas, el o la docente podrá proponer que la usen para organizar los datos;
- hacer distintas cuentas vinculadas al contexto. Aquí podrían hacer cuentas incorrectas que usaran los valores destacados del contexto, como por ejemplo 13.000/3.100. Una opción correcta es considerar lo estudiado en la afirmación iii): como por cada hora la pileta C descuenta 1.600 litros a

la diferencia, es necesario buscar qué cantidad de veces 1.600 equivale a 13.000. Entonces, resolviendo 13.000/1.600, se obtiene el tiempo buscado $t = 13.000/1.600$ y la cantidad de agua 25.187,5 litros.

En varios casos, podrán recurrir al uso de las fórmulas para corroborar si las respuestas halladas son correctas o aproximadas. También es posible que si la corroboración no les da, combinen con otra estrategia.

Una discusión colectiva de esta pregunta seguramente ponga en escena la variedad de maneras en que abordaron la actividad. Será importante para darle sentido al punto de encuentro considerar diferentes estrategias y analizarlas, discutiendo, por ejemplo, si lograron aproximar o dar de manera exacta la respuesta y en qué informaciones se apoyaron. Surgirá seguramente que, aunque lograron acercarse a la respuesta, es difícil hallarla con precisión. Aunque no salga de los alumnos y las alumnas, las condiciones estarían dadas para que el o la docente pudiera proponer una explicación que conduzca al planteo de la ecuación, a partir de recuperar que *se busca un valor de t que, reemplazado en ambas fórmulas, dé el mismo resultado para la cantidad de agua. Es decir, para el mismo t:*

$$\overbrace{13.000 + 1.500 \cdot t}^{B(t)} = \overbrace{3.100 \cdot t}^{C(t)}$$

Para explicar la forma de resolución, se sugiere ir recuperando relaciones que se establecieron con apoyo en el contexto. Por ejemplo:

$B(t) = C(t)$,
$13.000 + 1.500 \cdot t = 3.100 \cdot t$,
$13.000 + 1.500 \cdot t = 1.500 \cdot t + 1.600 \cdot t$.

Escribiéndolo así, se hace visible 1.600 t, es la cantidad de litros que descuenta C en t horas.

Entonces, para que sean iguales $C(t)$ y $B(t)$, C tiene que descontar los 13.000 litros iniciales de B y eso se logra en un tiempo t que verifique: $13.000 = 1.600\ t$, y de aquí se puede calcular $t = 13.000/1.600$. Es decir: $t = 8{,}125$ y $B\ (8{,}125) = C\ (8{,}125) = 3100 \cdot 8{,}125 = 25.187{,}5$ litros.

El planteo inicial de la ecuación involucra un signo igual entre dos funciones lineales que los y las estudiantes pueden reconocer como distintas. Esto puede provocar dudas y preguntas; por ejemplo, pueden mencionar: “las fórmulas no son iguales”, “no dan la misma distancia para cualquier valor del tiempo”, “para algún momento dan iguales” y “casi nunca son iguales”. Será importante prestar atención a las frases que surjan en el aula, ya que, para los y las estudiantes, este “igual” suele estar vinculado al resultado de un cálculo, significado construido en sus experiencias numéricas en la escuela primaria. En las ecuaciones, el signo igual involucra el estudio de los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad. Una misma escritura, el signo igual, tiene diferentes significados que los alumnos y las alumnas tendrán que ir aprendiendo.[48]

Hasta aquí se desarrollaron argumentos y justificaciones para el planteo y la resolución de una ecuación que se apoyan en un significado en el contexto trabajado. Para ir dotando de más sentidos, será importante contemplar otros discursos que justifican la técnica y que tienen vínculo con las formas de resolución que despliegan los y las estudiantes cuando ya han tenido un contacto con ecuaciones. Estos otros discursos pondrán el énfasis en la conservación del conjunto solución y en la comprensión de por qué ciertas transformaciones permiten cambiar una ecuación por otras sin que se modifique el conjunto de solución y para las cuales la tarea de resolución se vuelve más sencilla.

Por ejemplo, apoyándonos en la ecuación anterior y centrándonos en el primer paso:

$$13.000 + 1.500 \cdot t = 3.100 \cdot t,$$
$$13.000 + 1.500 \cdot t = 1.500 \cdot t + 1.600 \cdot t.$$

Se buscan los valores de t que al ser reemplazados en ambos miembros den el mismo número. Como el término $1.500 \cdot t$ aparece a ambos lados del igual, aporta el mismo valor a ambos miembros y por eso puede suprimirse de cada lado del igual. Por esta razón, es equivalente a resolver: $13.000 = 1.600 \cdot t$.

El valor que sea solución de esta ecuación, es decir, el valor que haga verdadera la igualdad, es solución de las ecuaciones planteadas en los renglones anteriores. .

La transformación del término $3.100 \cdot t$ en $(1.500 \cdot t) + (1.600 \cdot t)$, para que en ambos lados del igual aparezca el mismo término, es una estrategia útil para avanzar en la resolución.

Se pueden vincular y emplear estos argumentos para justificar formas de resolver que se apoyan en “sumar o restar lo mismo en ambos miembros” o “pasar restando lo que está sumando en un lado del igual”.

Estos diferentes discursos que justifican y ponen palabras a las estrategias que permiten resolver ecuaciones, como ya se mencionó, cargan de mayor sentido a las técnicas. Se vuelve entonces necesario que el o la docente decida cómo entramarlos en sus clases, cómo sostenerlos y promoverlos a lo largo del tiempo y para diversas actividades.

ACTIVIDAD 3

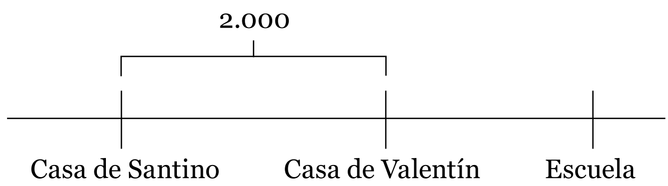
Las Actividades 3 y 4 se proponen para que los y las estudiantes revisiten ideas y formas de trabajo desplegadas hasta aquí, al interactuar con una situación

48. Como ya hemos mencionado en la primera parte de este capítulo, otro significado del signo igual es el que expresa la equivalencia entre expresiones algebraicas: ambas expresiones son iguales para todo valor de la variable.

de encuentro entre dos chicos. Este contexto ofrece nuevos sentidos, ideas y palabras a las relaciones que ya se establecieron a propósito de los diferentes registros de representación.

La casa de Santino y la de Valentín están sobre la misma calle en la que está la escuela.

La casa de Santino está a 5.000 metros de la escuela y a 2.000 metros de la de Valentín, como muestra el esquema.



El lunes pasado, en el mismo instante, los chicos partieron de sus casas en bicicleta hacia la escuela. Se sabe que Santino iba a una velocidad de 150 metros por minuto durante todo el recorrido y que la fórmula $V(t) = 85x + 2.000$ *calcula la distancia (en metros) de Valentín a la casa de Santino en función del tiempo "x", medido en minutos.*

- *a) ¿A qué distancia de la casa de Santino está cada uno de los chicos a los 6 minutos de partir?*
- *b) Calculen cuánto se achica la distancia entre los chicos por cada minuto que pasa.*
- *c) Encuentren la fórmula que calcula* la distancia (en metros) de Santino a su casa a medida que transcurre el tiempo (en minutos).

El primer ítem se propone para que las y los estudiantes se involucren con la situación, con la información que se ofrece sobre ella y con algunas relaciones que permite establecer. Se puede acompañar el análisis colectivo de la respuesta con una lectura del esquema e ir completándolo con nueva información (por ejemplo, las distancias que separan las casas de los chicos de la escuela). Con el mismo objetivo, se pueden proponer nuevas preguntas, tales como: ¿en qué momento de su recorrido Santino pasó por la puerta de la casa de Valentín?, ¿a qué distancia de la casa de Santino estaban cada uno de los chicos a los 11 minutos de partir? y ¿cuánto tiempo tardaron en llegar a la escuela?

El ítem b) tiene como propósito que las y los estudiantes expliciten la velocidad con la que se desplaza Valentín, ya sea leyéndola en la fórmula o calculándola a partir de la información obtenida en el ítem a). Proponemos también que, al igual que en actividades anteriores, se caracterice lo que Santino (el chico que va más rápido) le "descuenta" de distancia a Valentín por minuto. Toda esta información, junto con la fórmula que se pide en el ítem c), es punto de apoyo importante para analizar las ecuaciones que se plantean a continuación.

d) Ana, compañera de escuela de Santi y Valen, intenta responder a la pregunta: "¿Se encuentran los chicos en el trayecto hacia la escuela? ¿En qué momento de todo el recorrido?".
Para eso, planteó lo siguiente:
$150x = 85x + 2.000$,
$100x + 50x = 85x + 2.000$.
¿Creen que le servirá para encontrar el momento en que se encuentran los chicos? Si creen que sí, hallen el momento en el que se encuentran los chicos finalizando el procedimiento de Ana. Si creen que no, modifiquen el segundo renglón de la resolución de Ana y finalicen el procedimiento.

El ítem d) tiene la intención de que los y las estudiantes continúen con el proceso de identificar las ideas que hay detrás de las ecuaciones: del signo igual que se plantea, de las formas de leer y transformar las expresiones con el objetivo de encontrar el valor de la variable que la resuelve. Para avanzar en este proceso, luego de que resuelvan grupalmente la tarea, será importante que, en el momento colectivo, se agreguen palabras al primer y segundo renglón de la estrategia presentada. Por ejemplo, proponemos que en el pizarrón se escriban frases que refieran a que: "las expresiones/formulas no son iguales", "pueden ser iguales, dar lo mismo, al reemplazar algún valor de x", "se busca un valor de x de manera que, al reemplazarlo en cada una de las fórmulas, estas den la misma distancia".

Respecto del segundo renglón, los y las estudiantes pueden tomar diferentes posiciones sobre la descomposición del $150x$. Puede haber quienes consideren que es incorrecto el planteo, ya que no aparece la misma expresión en ambos miembros de la ecuación; quienes lo consideren correcto, aludiendo a la equivalencia con la expresión $150x$, o quienes sostengan que es válido porque podría continuarse descomponiendo, por ejemplo, el $100x$ como $85x + 15x$. La discusión colectiva puede girar en torno a que, si bien hay diferentes formas de transformar la expresión $150x$ (o de transformar a $2.000 + 85x$) en otras equivalentes, la descomposición que se realice tiene que permitir analizar qué hay de igual y qué de distinto entre las fórmulas de ambas funciones para poder compararlas. En este caso, la distancia recorrida por Santino se puede expresar de muchas maneras equivalentes, pero, en vistas de resolver la ecuación, hay algunas descomposiciones más convenientes que otras. Por ejemplo, la descomposición $150x = 85x + 65x$ permite visualizar "lo que Santino le descuenta por minuto a Valentín, 65 metros" y "la distancia por minuto que recorren en simultáneo, 85 metros". Se podría concluir que por diferentes caminos se puede llegar a la ecuación $65x = 2.000$, argumentando, por ejemplo, que como $65x$ está en ambos miembros se puede no considerar para resolver la ecuación (lo que es equivalente a pasar restando el $90x$ o restar $90x$ a ambos lados). Tomando estas ideas se puede, entonces, reflexionar respecto de la conveniencia o "economía" de diferentes transformaciones de una expresión.

ACTIVIDAD 4

a) *Abran el archivo <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo3/Encuentro_Actividad4.ggb>. En él se ingresó la fórmula $S(x) = 150x$ que, según la Actividad 3, representa la distancia de Santino a su casa en tanto transcurren los minutos. Ingresen la fórmula $V(x)$. ¿Cómo ven en el gráfico:*

- *i)* *el instante y lugar en el que se encuentran los chicos?*
- *ii)* *el instante en el que Valentín partió de su casa?*
- *iii)* *el instante en el que Santino arribó a la escuela?*

b) *Modifiquen la velocidad con la que viaja Valentín para que los chicos no se encuentren en su recorrido hacia la escuela. Expliquen cómo se dan cuenta de que los chicos no se van a encontrar.*

El ítem a) se propone para recuperar ciertas relaciones sobre la situación estudiada en la Actividad 3, pero esta vez a partir del análisis de los gráficos cartesianos. Es probable que el o la docente ayude a recordar, por un lado, una forma de escribir las fórmulas en la barra de entrada y, por otro, que dependiendo cómo se ingrese la fórmula, el GeoGebra no distingue el dominio de las funciones; es decir, puede no haber concordancia entre el dominio de las funciones $S(x)$ y $V(x)$ de la Actividad 3 y el de las funciones cuyos gráficos son las rectas que se visualizan sobre la pantalla.[49] Sin embargo, las gráficas que se visualizan permiten responder las preguntas del ítem. Se puede también profundizar la lectura de información del gráfico a partir de intentar responder en este registro las preguntas realizadas en la Actividad 3.

Para abordar el ítem b), las y los estudiantes pueden apoyarse en relaciones que ofrece el contexto para responder, por ejemplo "como Valentín parte de más adelante, si va a más velocidad que Santino, este no lo va a alcanzar", o pueden controlar que Valentín llegue a la escuela a los, por ejemplo, 33 minutos (antes que Santino). Si hubiera estudiantes que intentaran estudiar la situación a partir de la interacción con el archivo GeoGebra del ítem a), el profesor o la profesora podría alentar la exploración con el programa para que explicitaran lo que esperan que se modifique del gráfico y/o de la fórmula de $V(x)$. Si bien los ítems c) y d) proponen un trabajo con estos otros registros, si surgieran en el ítem b), sería una buena oportunidad para aprovechar la diversidad de argumentos que surgieran en este momento.

A partir de las diferentes velocidades que los grupos de estudiantes elijan compartir en el momento de análisis colectivo de las producciones, se pueden estudiar tres situaciones para comparar las relaciones entre las velocidades de los chicos: la velocidad de Valentín puede ser mayor, igual o menor que la

49. Si el o la docente lo viera oportuno, podría recordar la forma de ingresar en GeoGebra una función con un dominio particular, como se propone en la Actividad 7 del primer apartado de este capítulo, "La modelización de situaciones que varían uniformemente".

de Santino para que no se encuentren.[50] Se propone que la discusión colectiva se focalice en la explicitación e identificación de cada uno de los tres casos.

c) Verifiquen, usando el archivo GeoGebra del ítem a), que con la nueva velocidad los chicos no se encuentran en su recorrido hacia la escuela. Expliquen cómo se ve esto en el gráfico.

d) Ana eligió la fórmula V(x) = 285x + 2.000 y planteó una ecuación para verificar que no se encuentran antes de la escuela: 285x + 2.000 = 150x. ¿Cómo se podría continuar el planteo de Ana?

Los ítems c) y d) ofrecen la posibilidad de analizar el "no encuentro" a partir de argumentos que no solo se sostienen en el contexto de la situación; es decir, se centra en estudiar cómo, a partir de un gráfico y a partir de una ecuación, se pueden explicar los tres casos explicitados en b). Para c) es esperable que haya quienes, sin realizar el nuevo gráfico de *V(x)*, se apoyen en la noción de "escalones" para explicar que los chicos no se encuentran.[51] También pueden graficar *V(x)* ingresando la fórmula de la nueva función.

A partir del análisis colectivo del ítem b), se espera que se hayan identificado velocidades concretas para cada uno de los tres casos posibles para analizar el "no encuentro". Luego de la discusión colectiva del ítem c), puede promoverse una nueva tarea: tomar tres velocidades propuestas en el ítem b) y resolver nuevamente el ítem c) para estudiar los gráficos en cada uno de los tres casos posibles. Esto ofrece la posibilidad de que los y las estudiantes tengan un momento para interactuar con las relaciones que hay detrás de los casos que no contemplaron inicialmente. Para el estudio del caso en el que la velocidad de Santino es menor que la de Valentín, una vez que los alumnos y las alumnas hayan identificado y explicitado que buscan que el punto de intersección esté "por encima del 5.000 (metros)" o "a la derecha de 33,3 minutos aproximadamente" (de manera exacta 33 y 1/3 de minutos o 33 minutos 20 segundos), se puede proponer que grafiquen la recta $y = 5.000$ o $x = 100/3$, con el objetivo de ayudar a hacer visibles las relaciones entre las intersecciones de los gráficos de las funciones y el dominio e imagen de estas. En este espacio deberían aparecer las siguientes ideas acerca del "no encuentro" analizado con el GeoGebra: los gráficos no se intersecan si las velocidades son iguales y, para velocidades distintas, en ocasiones, la intersección de las rectas no cae en el dominio de las funciones consideradas (en términos del contexto se trata de los casos en que el encuentro sucede para una distancia mayor que 5.000 o un tiempo previo a la partida de los chicos).

50. En este último caso, hay un rango de velocidades donde los chicos no se encuentran antes de la escuela, sino que "se encontrarían" después de la escuela. El o la docente puede proponer el estudio de la velocidad mínima y máxima con la que debe viajar Valentín para que se dé este "encuentro luego de la escuela".

51. Ver Actividades 5 y 6 del primer apartado de este capítulo.

Antes de abordar el ítem d), se les puede pedir que anticipen en cuál de los tres casos descriptos en el ítem b) se podría ubicar la propuesta de Ana. Una vez que se tome una postura colectiva, sugerimos que aborden el siguiente ítem en pequeños grupos.

Para resolver d), se espera que se apoyen en la descomposición de algunos términos con la intención de compararlos. Por ejemplo, con el objetivo de visibilizar $150x$ en ambos miembros de la ecuación se puede pensar al $285x$ como $150x + 135x$, para luego explicitar que se necesita estudiar qué valor de la variable x, del tiempo transcurrido, es solución de la ecuación $135x + 2.000 = 0$. Luego de alguna exploración numérica, los y las estudiantes arribarán a la idea de que la suma de dos términos no puede dar cero si solo se consideran valores positivos para x (el contexto del problema ofrece elementos para este tipo de argumentos). Este tipo de análisis avanza sobre la idea de que no todas las ecuaciones tienen solución. Si hubiera estudiantes que dispusieran de técnicas de despejes y arribaran a un valor de x negativo, sin cuestionarlo como respuesta al problema, se podrían retomar las anticipaciones realizadas antes de iniciar el trabajo con el ítem d) y analizarlas en relación con el valor negativo de x. Esto habilitará que se analice la pertinencia de ese valor como respuesta al problema.

Luego de discutir estas ideas en el ítem d), se puede proponer regresar al ítem b) y, con las fórmulas modificadas, estudiar con ecuaciones las diferentes situaciones de encuentro. Esto tiene como propósito que queden explícitas y resueltas diferentes ecuaciones que modelizan algebraicamente cada uno de los casos. En particular, aquel donde las velocidades son iguales funciona para poner palabras a la igualdad y vincularla al contexto.

Esta clase de actividad abre a otras posibilidades de exploración y generalización, si se invita a los y las estudiantes a modificar las dos funciones –cambiando ambas velocidades o las distancias iniciales–, para estudiar las condiciones de encuentro a partir del contexto, del gráfico y de las ecuaciones.

A continuación de estas dos últimas actividades proponemos que el profesor o la profesora plantee una nueva en la que se mantenga el contexto de la situación y sus variables –distancia a un punto de referencia y en función del tiempo–, y que ambas funciones lineales no tengan ordenada al origen cero (0). Se trata de profundizar el trabajo con el planteo de una ecuación y una forma de resolver que se apoya en la descomposición de las velocidades y en la distancia "inicial". Por ejemplo, si las fórmulas de las funciones fueran $f(x) = 2{,}4x + 6$ y $g(x) = 1{,}5x + 10$, se podría identificar que $2{,}4x + 6 = 1{,}1x + 10$, y luego, transformando las fórmulas, $1{,}3x + 1{,}1x + 6 = 1{,}1x + 6 + 4$. En este caso, se espera que el o la docente ayude a sus estudiantes a precisar las ideas de que: 4 es la distancia "inicial" (cuando $x = 0$), $1{,}1x + 6$ es lo que avanzaron ambos vehículos en el instante x y $1{,}3x$ es la distancia que necesita ser 4. Este análisis permite concluir que más allá del valor que se le dé a x, se necesita que $1{,}3x$ sea igual a 4; por lo que solo se necesita buscar el conjunto solución de la ecuación $1{,}3x = 4$.

ACTIVIDAD 5

La ruta 5 tiene una distancia de 545 km y se extiende desde Luján (Buenos Aires) hasta Santa Rosa (La Pampa). Un camión salió de Luján con destino a Santa Rosa por la ruta 5 y en el mismo instante un auto salió desde Santa Rosa con destino a Luján por la misma ruta. Se sabe que el camión realizó todo el recorrido a una velocidad de 75 km/h y que el auto mantuvo su velocidad en 110 km/h también durante todo el viaje.

a) ¿A qué distancia de Santa Rosa se encontraba cada uno de los vehículos a las 2 horas de iniciado el recorrido? ¿Y a las 3 horas y media de partir?

b) Se definen las siguientes funciones:
- *A(x) como la función que relaciona* el tiempo transcurrido (en horas) desde que partió el auto con su distancia a Santa Rosa (en km), *y*
- *C(x) como la función que relaciona* el tiempo transcurrido (en horas) desde que partió el auto con su distancia a Santa Rosa (en km).

En el archivo GeoGebra <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo3/Encuentro_Actividad5.ggb> aparece el gráfico de C(x). Grafiquen A(x) y estimen en qué momento y a qué distancia de Santa Rosa se encuentran ambos vehículos.

El primer ítem tiene la intención de que los y las estudiantes comiencen a vincularse con la situación a partir de realizar el cálculo de algunas distancias. Esto permite identificar el proceso de cálculo que está involucrado en cada una de las funciones que se definen en el ítem b) y generar buenas condiciones para abordar la producción de la fórmula que se necesita en el ítem siguiente.

Será interesante que antes de realizar el gráfico de $A(x)$ se los invite a anticipar diferentes características del gráfico y de las relaciones entre los gráficos de ambas funciones, que se esperan visualizar. En el trabajo con GeoGebra aquello que se "observa" suele ser un fuerte apoyo para los argumentos que los y las estudiantes movilizan. El pedido de ciertas anticipaciones respecto de lo que encontrarán en la pantalla genera mejores condiciones para comprometerlos y comprometerlas con la puesta en juego de las relaciones que se quiere que movilicen. En este sentido, se espera que recuperen que, por ejemplo, será una función creciente (la distancia irá aumentando a medida que transcurre el tiempo), que se va a intersecar con el gráfico de $C(x)$ y algunas referencias sobre el dominio de la función.

Una vez realizado el gráfico de $A(x)$ se puede recobrar parte de lo trabajado en la actividad anterior y proponer que ajusten dicha representación teniendo en cuenta el dominio de la función; esto es usando el comando "Función ($A(x)$, 0, 545)". Finalmente, con el objetivo de volver hacia algunas de las anticipaciones realizadas, una vez que ambas funciones estén graficadas, se sugiere trabajar en torno a preguntas sobre la situación que se puedan responder a partir de lo graficado: ¿cómo se ve en el gráfico el instante y lugar del que sale cada vehículo?, ¿en qué lugar del gráfico se informa el momento en que el auto llegó a Santa Rosa? y ¿en qué instante y lugar se cruzan por la ruta aproximadamente?

c) ¿Es cierto que, en las primeras horas del recorrido, por cada hora que pasa los vehículos se acercan 35 km? Si es cierto, justifiquen su respuesta. Si no es cierto, calculen cuántos km se acercan por cada hora que pasa.
d) Planteen una ecuación para encontrar el instante en que el auto y el camión se cruzan en la ruta. ¿En qué km de la ruta lo hacen?

El ítem c) se propone para que se identifique que por cada hora que pasa los vehículos se acercan 110 km + 75 km. En las actividades anteriores, ambas funciones eran crecientes, por lo que esta información se obtenía restando ambas pendientes. El apoyo en la representación gráfica permite visualizar que, como los vehículos van en sentidos opuestos, "ambos aportan al encuentro", por lo que es necesario sumar los módulos de las velocidades. Con estas ideas se puede calcular el tiempo que tardan en encontrarse mediante la ecuación $110x + 75x = 545$ (1), ya que juntos descuentan 185 km por hora a la separación inicial de 545 km. Esta forma de estudiar el problema de encuentro puede ser un fuerte apoyo para dar sentido a las transformaciones que se realicen sobre las ecuaciones que se piden en el ítem d). En este caso, la ecuación que resulta de plantear $A(x) = C(x)$ es $110x = 545 - 75x$ (2).

A diferencia de las ecuaciones trabajadas en las actividades anteriores, la descomposición de uno de los términos de una fórmula para identificar lo que tienen en común puede resultar más costosa o menos intuitiva (en este caso, $110x = 185x - 75x$). Se pueden usar las ideas desplegadas en torno a la ecuación (1), para darle sentido a transformar la ecuación (2) mediante la suma de $75x$ a ambos lados del signo igual: $110x + 75x = 545 - 75x + 75x$, lo que llevaría a estudiar $185x = 545$. Este cambio en la ecuación no modifica el conjunto solución.

La interacción entre las relaciones matemáticas que sostienen estos argumentos de transformación y aquellos que los y las estudiantes tienen disponibles de experiencias anteriores (por ejemplo, lo que está restando pasa sumando) fortalecen los sentidos que se produzcan sobre el objeto ecuación, su conjunto solución y las formas de trabajar con ellos.

BIBLIOGRAFÍA

Brunand, María Nieves; Borsani, Valeria y Cabalcabué, Carla
En prensa *Números y Letras. Lectura y transformación de expresiones numéricas y algebraicas*, en Chemello, Graciela y Agrasar, Mónica (coords.), *Entre docentes 1. Ciclo Básico*, Buenos Aires, UNIPE: Editorial Universitaria.

Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

2002 *Actualización de Programas de Nivel Medio. Programa de Matemática. Primer Año. 2002,* Buenos Aires, Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: <https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf1/m1.pdf.> [consulta: 16 de octubre de 2019].

Sadovsky, Patricia

2005 *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos,* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Sadovsky, Patricia y Espinosa, Ana

En prensa *Pensar con otros, imaginar el aula, producir sentidos. Una experiencia de trabajo colaborativo entre profesores de matemática,* Buenos Aires, UNIPE: Editorial Universitaria.

CAPÍTULO 4

La coordinación entre diferentes registros de representación de la función cuadrática: una propuesta para fortalecer el trabajo algebraico

Juan Pablo Luna y Rodolfo Murúa

INTRODUCCIÓN

En este cuarto y último capítulo presentaremos algunas actividades –y su análisis– enmarcadas en una propuesta para la enseñanza de función cuadrática, que nos permitirán reflexionar acerca de la fertilidad de esta zona de la currícula para potenciar un trabajo algebraico apoyado en relaciones funcionales.

Pretendemos, con este material, retomar algunas reflexiones de los Capítulos 2 y 3 sobre la relación entre las distintas formas de representar las funciones (tablas, gráficos, enunciados en forma coloquial y fórmulas). En este caso, nos ocuparemos de analizar las potencialidades que ofrece el estudio de la función cuadrática en los primeros años del ciclo orientado para realizar un trabajo con expresiones algebraicas en estrecho vínculo con las otras representaciones de las funciones, especialmente, su gráfica en el plano cartesiano. En particular, en el Capítulo 3, se abordó una propuesta de actividades con la intención de comenzar a generar cierta relación con las expresiones algebraicas a partir del estudio de la variación uniforme propia de las funciones lineales. Aquí, pretendemos retomar esa relación y continuarla con un trabajo apoyado en el vínculo entre los elementos característicos de las funciones cuadráticas (tipo de variación no lineal, presencia de un extremo, de valores simétricos, etc.) y las diferentes formas que adquieren las fórmulas de este tipo de funciones.

Una posible entrada al estudio de la función cuadrática, que promueva la discusión y caracterización del tipo de gráfico que las representa, es a través de situaciones geométricas donde es posible definir a la función entre dos de las magnitudes presentes. La exploración de esa situación y la búsqueda de algunos valores de las variables involucradas permiten empezar a caracterizar un tipo de variación que se diferencia del modelo lineal conocido hasta ese momento de la escolaridad. Si bien este acercamiento al estudio de las funciones cuadráticas lo vemos potente, no será abordado en estas páginas.[52]

En esta oportunidad, y con el objetivo de incorporar las fórmulas desde el comienzo, iniciaremos el estudio del tipo de variación cuadrática con actividades en las que la función a estudiar estará dada a través de su fórmula escrita en forma canónica. Si bien las diferentes escrituras de las fórmulas de una función cuadrática dan la posibilidad de entablar vínculos con ciertas características de su representación gráfica, elegimos la forma canónica como vía de entrada porque esta posibilita un potente trabajo de "lectura"[53] de información. Es decir, a partir de la estructura de la expresión se podrá analizar tanto el término cuadrático como el término constante para obtener ciertos datos de la función que serán utilizados para describir la curva.

La propuesta de este capítulo, tal como sucedió en los anteriores, no es compartir una secuencia de enseñanza, aunque sí contiene –en cada uno de los apartados– un conjunto de actividades que permiten construir relaciones en forma progresiva.

Las actividades del primer apartado, titulado "Análisis de fórmulas escritas en tipo canónica y caracterización de la parábola", permitirán caracterizar el tipo de curvatura mediante la diferenciación de otras gráficas a partir del análisis de los valores de la función organizados en una tabla. Las del segundo, "Lectura de información de la fórmula tipo canónica y su relación con el gráfico", amplían aquel trabajo, siempre desde el estudio de la escritura de la fórmula tipo canónica, reconociendo: pares de valores con igual imagen, si tiene máximo o mínimo, las coordenadas del extremo y la identificación del conjunto imagen de la función.

El tercer apartado, "Estudio de la función cuadrática a partir de otras formas de escribir la fórmula", busca vincular las relaciones ya construidas sobre la expresión del tipo canónica con nuevas expresiones, promoviendo un intenso trabajo sobre la noción de equivalencia.

En el siguiente, "Primeros abordajes del estudio de la fórmula desarrollada de la función cuadrática", planteamos una serie de actividades para trabajar en torno a la búsqueda de valores de x con igual imagen en diferentes tipos de

52. Una propuesta de este tipo se puede encontrar en: ILLUZI, Alejandra *et al.*, "Capítulo 2. Introducción a la función cuadrática a partir de problemas en contextos geométricos", en íd., *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado*, Buenos Aires, Ministerio de Educación del GCBA, 2014, pp. 29-44. Disponible en: <https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf> [consulta: 10 de octubre de 2019].

53. Adoptaremos los términos *leer* o *lectura* para referirnos a un modo particular de trabajo sobre las fórmulas para poder obtener cierta información de las mismas. Sería un término propuesto en el aula y acordado con los y las estudiantes. En este capítulo, podremos recorrer distintas actividades que nos permitirá darle más cuerpo a esta idea.

fórmulas, lo que da origen al desarrollo de técnicas de transformación de las expresiones, principalmente el "factor común".

Por último, en "Construcción de la fórmula de Bhaskara a partir de la fórmula canónica de la función cuadrática", se potencia el trabajo de transformación de la expresión desarrollada (también llamada "polinómica") a la canónica. En este recorrido se da origen a una forma artesanal de determinar las raíces de una cuadrática, lo que permite, por un lado, apoyarse en muchas relaciones funcionales como herramienta de control de las técnicas de transformación y de despeje. Por otro lado, aporta un modo de construir la fórmula de Bhaskara o "resolvente", la cual podría brindar a los y las estudiantes un mayor sentido que el de su mera aplicación mecánica.

ANÁLISIS DE FÓRMULAS ESCRITAS EN FORMA CANÓNICA Y CARACTERIZACIÓN DE LA PARÁBOLA

Antes de adentrarnos en las actividades de este primer bloque, les proponemos analizar uno de los contextos posibles donde se podría utilizar una función cuadrática para modelizar la relación entre dos variables. Nos referimos, más precisamente, a la ganancia que obtiene un determinado negocio en función del precio unitario del producto que vende; para ello, tomaremos como ejemplo el mismo contexto que utilizaremos en la primera actividad de esta propuesta.

Nos parece interesante que, como docentes, podamos analizar el origen de esta modelización a pesar de que en este caso no estamos pensando en involucrar a los y las estudiantes en la construcción del modelo.

Para comenzar con el estudio de esta situación recordemos que la *ganancia* de un negocio es la diferencia entre los ingresos por la venta de sus productos y los egresos. En este caso, vamos a concebir los *egresos* como el costo necesario para obtener el producto vendido (puede ser fabricado, comprado a un mayorista, etc.). Esta manera de modelizar las ganancias de un negocio es una de las tantas formas posibles de hacerlo, dado que, por ejemplo, estamos dejando afuera los gastos fijos (si los hubiere) o gastos de producción de excedentes a las ventas realizadas, y solamente consideramos la diferencia entre los ingresos por las ventas de una cierta cantidad de productos y los gastos que demandó obtener esa misma cantidad de productos.

Continuando con la descripción del modelo, tomaremos que la cantidad de productos vendidos está en estrecha relación con el precio de los productos, de manera que a mayor precio de venta de un producto menor cantidad de unidades se venderán. Este es otro rasgo particular de la modelización, porque si bien en general el mercado de la oferta y la demanda se comporta de esta forma, no es siempre así.

Esta relación la expresaremos por medio de una función lineal decreciente. Por ejemplo, en un negocio de fabricación y venta de bombillas, podríamos establecer la siguiente relación:

Precio de venta de cada bombilla en pesos (*p*)	Cantidad de bombillas vendidas por mes (*Cb*)
60	700
80	600
100	500
120	400
140	300

Entonces, la fórmula de esta función es:

$Cb(p) = -5 \cdot p + 1.000.$

Ahora, los ingresos mensuales los calcularemos como la cantidad de bombillas vendidas en un mes (*Cb*) por el precio de venta de cada bombilla (*p*).

Por otro lado, el costo de producción mensual lo vamos a determinar como el costo por unidad (*c*) –que lo fijaremos en $80– por la cantidad de bombillas vendidas en un mes.

Por lo tanto, la ganancia mensual (*G*) queda determinada por la siguiente fórmula:

$G(p)$ = ingresos mensuales – costo de producción mensual.

Esto es:

$G(p) = p \cdot Cb - c \cdot Cb.$

Recordemos que:

$Cb(p) = -5 \cdot p + 1.000,$

y que el costo, $c = 80$. Por lo que al reemplazar queda:

$G(p) = p \cdot (-5 \cdot p + 1.000) - 80\,(-5 \cdot p + 1.000),$

y al transformarla obtenemos la forma desarrollada:

$G(p) = -5 \cdot p^2 + 1.400 \cdot p - 80.000,$

que en forma canónica sería:

$G(p) = 18.000 - 5 \cdot (p - 140)^2.$

De esta manera pudimos modelizar la relación pretendida, construyendo una fórmula de una función cuadrática –escrita en forma canónica– que será utilizada en nuestra primera actividad.

Hemos elegido comenzar esta propuesta con un problema contextualizado. Esta decisión se sustenta en la posibilidad de que los y las estudiantes puedan encontrar en este contexto palabras e ideas sobre las cuales sostener sus explicaciones. Pensamos que el mismo puede ofrecer frases que enmarcan conceptos matemáticos (como por ejemplo: máximo, mínimo, aumenta o disminuye), que serán objeto de estudio a través de las sucesivas actividades.

ACTIVIDAD 1

Para esta primera actividad, proponemos un modo de presentación en el aula de la escuela secundaria que permita un acercamiento paulatino a las distintas tareas.[54] De esta manera, creemos que sería interesante que, en primer lugar, se entregue a los y las estudiantes el enunciado del problema con los dos primeros ítems. Así, luego de un primer momento de trabajo en pequeños grupos, sugerimos dar lugar a una discusión colectiva, con la intención de compartir las producciones y asegurarnos la comprensión del uso de la fórmula. Luego, se podrían presentar los ítems en forma secuenciada (de dos o tres) y de este modo poder sostener las discusiones pretendidas en cada momento del trabajo. A continuación, proponemos el enunciado del problema y más detalles sobre un posible modo de gestionarlo en el aula.

En una fábrica se elaboran, entre otras cosas, bombillas. Los dueños de la fábrica, para decidir qué precio cobrarán por cada bombilla, han tenido que considerar los costos necesarios para la fabricación de cada una y la relación entre el precio del producto y la cantidad de ventas que podrían realizar. Es así como elaboraron una fórmula que les permite calcular la ganancia mensual por la venta de las bombillas, dependiendo del precio por unidad que ellos fijen:

$$G(p) = 18.000 - 5 \cdot (p - 140)^2.$$

a) Si el precio que fijaran los dueños fuera de $114 por cada bombilla, ¿cuánto ganarían?
b) ¿Qué precio podrían cobrar cada bombilla si quisieran obtener una ganancia mayor que la obtenida con un precio de $114 por bombilla?

Estos dos ítems serán las primeras tareas propuestas a los y las estudiantes. Con ellos se pretende que identifiquen cuáles son las variables representadas en la fórmula (y con qué letras), que reemplacen, operen y empiecen a confrontar los valores obtenidos con la intuitiva idea de que “a mayor precio, siempre se obtendrá mayor ganancia”.

54. Si el o la docente lo cree necesario, al estar la actividad planteada en un contexto, puede elegir un dominio adecuado para la función. En nuestro caso, no lo hemos hecho porque el objetivo central es discutir el tipo de variación entre estas dos magnitudes y no el alcance de aplicación del modelo.

Es necesario garantizar que los alumnos y las alumnas rápidamente puedan operar de forma correcta sobre esta expresión, por lo que será importante hacer acá un alto en su trabajo y realizar un primer análisis colectivo. En esta instancia, se pueden compartir los resultados obtenidos y el o la docente puede proponer la construcción en el pizarrón de una tabla (que relacione el precio de cada bombilla y la ganancia mensual), donde se vuelquen los valores obtenidos por los distintos grupos.

Para resolver el ítem b), algunos grupos de estudiantes podrían recurrir a la proporcionalidad directa. En este caso, el profesor o la profesora podrá aprovechar el espacio colectivo para trabajar en torno a este asunto, utilizando los valores propuestos y volcados en la tabla. El análisis de estos valores debería evidenciar que la forma en que varía la ganancia en función del precio de las bombillas no es proporcional ni lineal, y que no siempre que aumenta el precio aumenta la ganancia.

Para tener una tabla "potente", donde el o la docente pueda sostener estas reflexiones, es preciso garantizar que la misma contenga diferentes valores. En este sentido, si durante el trabajo en pequeños grupos los y las estudiantes prueban con números cercanos al 114 o números "redondos", como el 200, será necesario solicitarles que calculen ganancias para otros precios, con la intención de asegurarse llegar al espacio colectivo con un abanico de valores de ganancia.

Luego se podría continuar con los siguientes ítems:

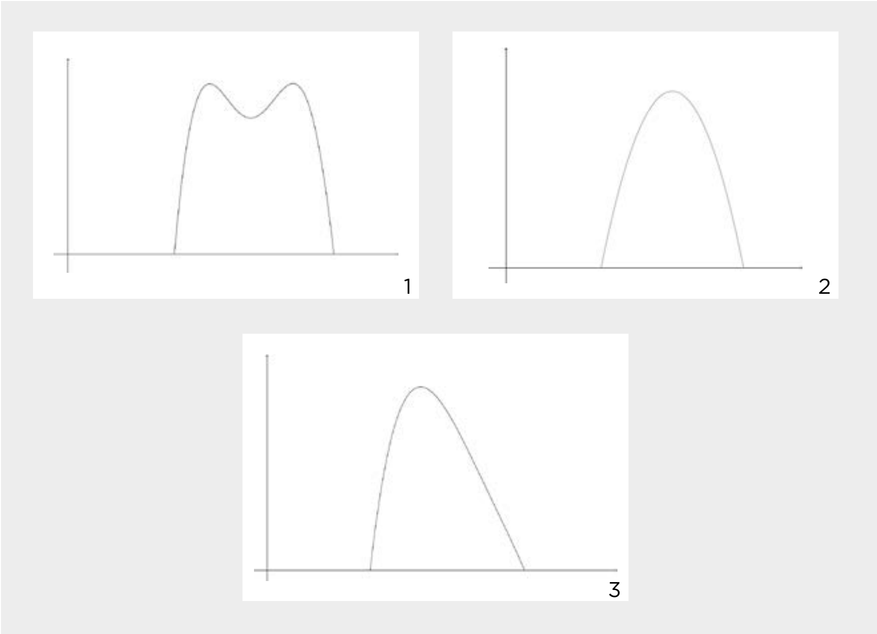
c) *¿Habrá otro valor de precio por bombilla con el cual se pueda obtener una ganancia mensual de $14.620?*
d) *¿Es posible obtener una ganancia de $16.875? ¿Para qué valor/es de precio por bombilla? ¿Es posible obtener una ganancia de $20.000? ¿Para qué valor/es de precio por bombilla?*

Al resolver el ítem c), es posible que las diferentes experiencias que hasta acá hayan tenido los y las estudiantes con las ecuaciones cuadráticas potencien diferentes maneras de resolución. Si bien el despeje de la ecuación podría ser una de las maneras, creemos que esta consigna podría ser abordada por estudiantes que aún no dispongan de esta técnica. Por ejemplo, operando con la ecuación de ambos lados, resulta $(p - 140)^2 = 676$. Luego se podría determinar qué otro valor del precio podría hacer que el resultado de $(p - 140)^2$ fuera 676. Es decir, los chicos y las chicas ya saben que con $p = 114$, el paréntesis da -26, entonces habrá que buscar otro valor de p, donde esa resta dé 26, lo que garantizará que al cuadrado también dará 676. Notemos que en el ítem a), se pidió calcular la ganancia para un $p = 114$ (que lleva a obtener el valor -26, en la resta), y no el 166 (que lleva a obtener el valor 26 en la resta). De esta manera creemos que es más factible, que en esta parte se propongan buscar el valor positivo.

En el ítem d), se pretende que vuelvan a poner en juego la manipulación de la fórmula para el cálculo de preimágenes, ahora con un valor donde se desconocen los dos valores de p que la satisfacen. Será interesante proponer, al llegar al espacio colectivo, una reflexión sobre la operatoria realizada, la certeza de que habrá dos valores de p que generan una ganancia de \$16.875 y que es imposible obtener una de \$20.000. Esto último puede argumentarse desde la fórmula, ya que si a 18.000 se le restan siempre valores positivos (o cero cuando $p = 114$), nunca se podrá aumentar la ganancia más de ese valor.

Por último, se puede presentar el siguiente ítem que tiene por objetivo que se resignifiquen las relaciones construidas sobre algunas características de esta función, a partir de la exploración numérica de las consignas anteriores, ahora en la elección de gráficos.

e) Decidan cuál o cuáles de los siguientes gráficos podrían representar la función estudiada: ganancia en función del precio de cada bombilla.



Dependiendo de la experiencia de los y las estudiantes con este tipo de actividades, es probable que sea necesario hacer una presentación del ítem e) donde se expliciten ciertas cuestiones, por ejemplo, que se mencione qué se representa en cada eje, que se aclare que no conocen las escalas con que fueron armados estos gráficos y se acuerde cuál es la tarea que se debe encarar.

Ya en los Capítulos 2 y 3 se presentaron actividades de este tipo, donde el trabajo demanda contemplar ciertas características de las funciones que no se “atrapan” obteniendo pares de valores de la función y su reconocimiento en el punto correspondiente en el plano cartesiano. Es decir, no es posible una observación puntual de la gráfica al no tener las escalas representadas en los gráficos dados; por ende, es necesario tener una mirada más global de la función en estudio que contemple, por ejemplo, la existencia de un solo valor máximo y el reconocimiento de que ese valor máximo se encuentra en el punto medio entre dos valores con igual imagen. Estas son las relaciones que se deben poner en juego en esta primera actividad de elección de gráficos.[55]

ACTIVIDAD 2

Aquí se pretende continuar con la búsqueda de imágenes y preimágenes utilizando la fórmula de una función, pero ahora sin la presencia de un contexto.

Dada la siguiente fórmula $f(x) = 5 + (x - 3)^2$*:*

- *a) Determinen el valor de* $f(x)$ *para* $x = -1$ *y analicen si existen otros valores de x para los cuales se obtenga la misma imagen.*
- *b) Determinen el valor de* $f(5)$ *y, nuevamente, analicen si hay otros valores de x que tengan la misma imagen. ¿Cuántos hay?*
- *c) Analicen, si existen, valores de x que tengan imagen 14. ¿Cuántos hay? ¿Y para que* $f(x) = 4$*? ¿Y para* $f(x) = 5$*, cuántos hay?*

Notemos que la enunciación de las consignas se complejiza respecto de la forma de expresarlas en la actividad anterior; recomendamos que sea adaptada utilizando un vocabulario que sea conocido por los y las estudiantes. En la Actividad 1, esto no era un asunto, ya que la búsqueda de imágenes y preimágenes se podría expresar mencionando la magnitud a calcular (por ejemplo: “¿cuál es la ganancia si las bombillas cuestan 114 pesos?”, “¿se podrá obtener una ganancia mensual de 14.620 pesos?” o “¿cuánto debería costar cada bombilla en ese caso?”).

En los dos primeros ítems, se propone encontrar valores de la función para una x determinada y la búsqueda de otro valor de x que tenga la misma imagen. En a), se presenta la notación $f(x)$, buscando afianzar el reconocimiento de que esa x es el valor para el cual queremos encontrar la imagen. Un trabajo similar favorece el ítem b). Aquí el o la docente podrá hacer hincapié en recordar y explicitar que los valores de x pertenecen al dominio y los $f(x)$ hallados al conjunto imagen de la función, así como también, en algunas cuestiones de notación.

En el ítem c), a diferencia de lo que sucede en los dos primeros, se dan como datos valores de $f(x)$ para luego hallar, si existen, los valores de x que correspondan. Para poder responder a este tipo de preguntas, nuevamente podemos

55. Esta tarea de decidir gráficos posibles para representar una función cuadrática puede potenciar un espacio de discusión y reflexión en el aula de la escuela secundaria. Algunas experiencias de este tipo se identifican y analizan en: BORSANI, Valeria; LAMELA, Cecilia; LUNA, Juan Pablo y SESSA, Carmen, “Discusiones en el aula en torno a una variación cuadrática: la coordinación entre distintos registros de representación”, en *Yupana*, nº 7, pp. 11-31. Disponible en: <http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/Yupana/article/view/4260> [Consulta: 10 de octubre de 2019].

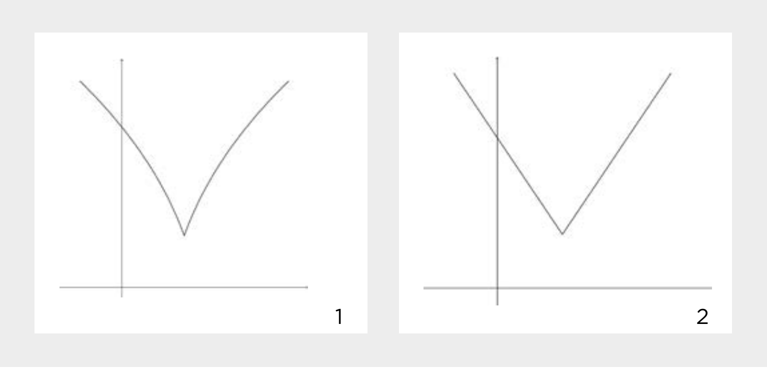
pensar en estudiantes que despejen las ecuaciones que se forman al reemplazar $f(x)$ por los valores pedidos. Otra posibilidad, y es esta a la que apuntamos, es poder analizar que para obtener 14 como resultado, a 5 hay que sumarle 9, por lo que $(x - 3)^2$ debería ser sí o sí ese número. Por ende, la expresión dentro del paréntesis debería valer 3 o –3, con lo que nos lleva a dos y solo dos valores de x posibles, 0 y 6. Análogamente, para $f(x) = 4$, se puede concluir que no podrá dar nunca ese resultado porque a 5 siempre se le estará sumando un valor positivo (o cero). Y para $f(x) = 5$ se podrá concluir que, como $x - 3$ debe ser 0, solo se cumple para $x = 3$. De esta manera, se presentan distintas posibilidades: que haya valores de $f(x)$ para los cuales se encuentran dos preimágenes, que exista un único valor de x (será el caso en que la imagen analizada sea 5) y que no exista x para determinados valores del conjunto imagen.

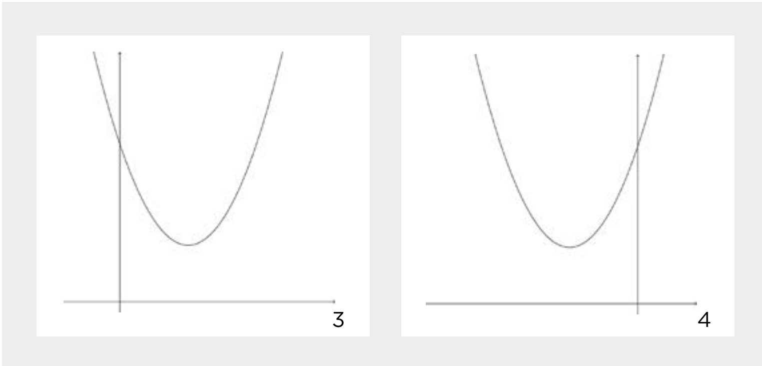
De lo trabajado con los distintos ítems se pretende que los y las estudiantes recuperen las estrategias desarrolladas en el problema anterior para la búsqueda de preimágenes (a través de la exploración e identificación de los valores que dan números opuestos dentro del paréntesis, ya que eso garantiza el mismo resultado al elevarlo al cuadrado) y cierta lectura de información de la fórmula.

Una posible discusión para el momento del trabajo colectivo podría ser preguntar si es posible obtener tres preimágenes para un determinado valor de x, justamente para fortalecer la idea de que, al tener un término cuadrático, se pueden encontrar "a lo sumo" dos preimágenes. Además, una tarea que reforzaría la identificación del conjunto imagen de esta función sería pedirles a los y las estudiantes que determinaran otros valores de $f(x)$ a los que les correspondieran dos, una o ninguna preimagen, e incluso, que definieran todos los valores de $f(x)$ que cumplieran con cada una de esas condiciones.

Nuevamente, como en la Actividad 1, en este trabajo de exploración de la fórmula de la función, los diversos valores se pueden volcar en una tabla que permita sostener las reflexiones necesarias tendientes a abordar la elección de los gráficos del próximo ítem.

e) Decidan cuál o cuáles de los siguientes gráficos pueden representar esta función:





En esta oportunidad, los gráficos propuestos obligan a reflexionar sobre el modo en que decrecen y crecen los valores de y a medida que aumenta la variable x. Ya no es objeto de discusión si la función tiene o no extremo (en este caso mínimo), sino tratar de caracterizar la forma en que varía, pudiendo hacer un vínculo entre la regularidad –que es posible observar en la tabla a partir del análisis numérico– y la interpretación de cómo esta se debería visualizar en la representación gráfica. Más precisamente, veamos en la siguiente tabla, cómo se puede visualizar el modo de variación de esta relación desde lo numérico:

	x	$f(x)$	
+1	–1	21	–7
+1	0	14	–5
+1	1	9	–3
+1	2	6	–1
+1	3	5	+1
	4	6	
	5	9	
	6	14	
	7	21	

Ya se ha analizado en el Capítulo 3 la potencia de este tipo de trabajo sobre la tabla, en donde, además de reconocer pares de valores correspondientes, se estudia la variación entre los valores de x y de y para detectar la variación uniforme. En esta oportunidad, apuntamos a utilizar nuevamente ese tipo de análisis, ahora para decidir el tipo de curvatura de esta función cuadrática.

De esta manera, observando que intervalos iguales de x no se corresponden con intervalos iguales de y, se podría descartar el Gráfico 2, ya que no se comporta como la variación uniforme de las funciones lineales. Entre los Gráficos 1 y 3, es necesario un estudio más fino de esas variaciones, reconociendo que cerca de $x = 3$, las variaciones de y son pequeñas (entre $x = 3$ y $x = 4$, la y aumentó 1), mientras que para valores más alejados (por ejemplo, entre $x = 6$ y $x = 7$) la y aumentó 7. De esta manera, es posible construir un argumento que acompañe la descripción del tipo de curvatura, explicitando que si *a variaciones de* x *de una unidad se le corresponden variaciones de* y *cada vez más chicas al acercarse a* x = *3, entonces la curva debería ser "cada vez menos vertical"*. Y de la misma manera, *al analizar el momento en que crece, si al alejarse de* x = *3, a intervalos iguales a 1 en la* x*, le corresponden intervalos cada vez más grandes de* y*; entonces la curvatura debería "ser cada vez más pronunciada, más parecida a una vertical"*.

Por último, nos interesa mencionar que para decidir entre el Gráfico 3 y el 4 es necesario poner en juego que el valor de x, donde se realiza el valor mínimo de y, es positivo, por lo que el Gráfico 4 no representa la función en estudio.

De esta manera, a partir de las resoluciones de estas dos actividades y otras que complementen este tipo de tareas, es posible mantener con los y las estudiantes un momento de análisis de los problemas realizados hasta acá e identificar aspectos comunes de estas nuevas funciones, como ser:

- tienen un tramo creciente y otro decreciente (o al revés),
- crecen y decrecen de la misma manera, por lo que las gráficas parecen como reflejadas por un espejo;
- poseen un extremo que puede ser un máximo o un mínimo. A este extremo se lo denomina *vértice*;
- no varían de forma uniforme, lo que nos lleva a concluir que las gráficas no tienen tramos rectos;
- las "ramas" de la gráfica van hacia arriba si tienen mínimo y hacia abajo si tienen máximo.

Esto nos permitirá formalizar que a la gráfica de este tipo de funciones que cumplen con las características detalladas se la llama *parábola*.

LECTURA DE INFORMACIÓN DE LA FÓRMULA TIPO CANÓNICA Y SU RELACIÓN CON EL GRÁFICO

En este apartado analizaremos algunas actividades con el objetivo de continuar el proceso de lectura de información de la fórmula. En este sentido, también ampliaremos el tipo de expresiones que serán objeto de estudio, ya que se pondrán en juego fórmulas canónicas o similares. Es decir, aquellas donde aparece la suma de un término cuadrático y uno constante; por ejemplo: $f(x) = 2\,(3x + 1)^2 + 5$. A esta forma de escritura de la fórmula de la función cuadrática la llamaremos *tipo canónica*, puesto que admite un modo de ser analizada parecido al de la fórmula canónica. Nos referimos, más precisamente, a propiciar la lectura de información de cada uno de los términos y su vínculo con la identificación del extremo y el conjunto imagen.

En la primera actividad propuesta, pondremos el foco en la determinación de qué tipo de extremo tendrán las funciones dadas (máximo o mínimo) y cuáles son las coordenadas de ese punto.

ACTIVIDAD 1

a) Dadas las siguientes fórmulas de funciones, decidan si estas tendrán máximo o mínimo:
$f(x) = (x - 2)^2 - 1$,
$g(x) = -2\,(x - 3)^2 + 4$,
$h(x) = 1 - (3x + 2)^2$,
$i(x) = 4 - (2x - 6)^2$.

b) Determinen las coordenadas del extremo de cada una de las funciones.

Es posible que para los y las estudiantes las cuatro fórmulas puedan parecer muy distintas, por lo que será necesario hacer un análisis de sus similitudes y diferencias. En este sentido, se podría comenzar solamente con la fórmula de f (cuya forma corresponde a las ya estudiadas anteriormente) y que en pequeños grupos la analicen y respondan las consignas de los apartados a) y b). Luego, compartir lo analizado por cada grupo y generar un momento de trabajo colectivo en el que se identifiquen los rasgos generales que permitieron realizar el análisis, como por ejemplo:

- la presencia de un término constante y otro cuadrático donde se aloja la variable independiente;
- el término cuadrático permite generalizar los posibles resultados que se obtienen al realizar las operaciones presentes en el paréntesis con distintos valores de x: siempre dará positivo o cero;
- el término independiente, como está restando, nos informa que esos posibles resultados se verán afectados al obtener los valores de las imágenes, alcanzando ahora el valor –1 como el más chico posible.

Consideramos que esta posible descripción de la fórmula es muy potente para poder hablar en forma general de los resultados que de ella se obtienen, y así caracterizar algunos aspectos de la función.

Luego, trabajando en el espacio colectivo, el o la docente podría pedirles a los y las estudiantes, si es que no fue un recurso usado hasta el momento, realizar un esquema del posible gráfico de la función f, haciendo hincapié en que se respeten las características descriptas anteriormente. La idea de esquema promueve la utilización de una forma de representación de la función que jerarquiza algunos de sus rasgos o elementos. En este caso, como se pide reconocer el mínimo, un gráfico posible podría ser el de la Figura 1.

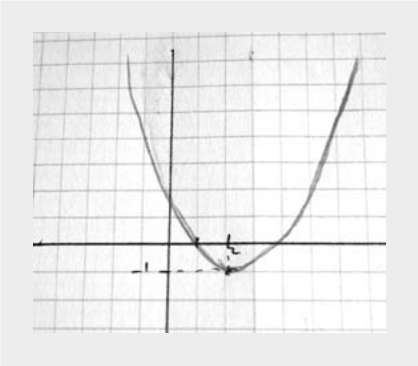


Figura 1. Imagen de una posible representación de la parábola de la función *f*.

Creemos que propiciar el uso de estos esquemas permite a los y las estudiantes dominar una forma de representar las funciones –con un gráfico aproximado– en la que pueden hacer visibles o rescatar solamente aquellos rasgos necesarios o relevantes de cada función, según sea la tarea requerida en cada problema. Vemos el valor de la utilización de estos esquemas por dos motivos: por un lado, por su potencia comunicacional –en el sentido de que es útil para transmitir cierta información rápidamente–; por el otro, por su riqueza como soporte de las ideas en el proceso de producción y resolución de problemas. A lo largo de todo el capítulo, estos esquemas se van complejizando; pues se irán agregando otras características relevantes del gráfico de este tipo de funciones.

Volviendo al análisis de la actividad, creemos que luego de este trabajo colectivo, los alumnos y las alumnas estarán en mejores condiciones para encarar la tarea pedida sobre las otras fórmulas, tendrán mayor comprensión de ellas. Se los y las invitará a que reconozcan, en las demás expresiones, esas características comunes que permiten leer información de cada una de ellas.

De esta manera, al analizar las funciones g e i, ya en pequeños grupos, podrían reconocer que ambas tienen máximo en el punto (3; 4). Posiblemente, utilicen la herramienta del esquema del gráfico para comunicar su respuesta (y, en su defecto, el o la docente podría proponerlo) y se plantee así la discusión sobre si los esquemas de los gráficos de estas dos funciones son iguales o no, y si eso garantiza que estas funciones sean iguales o no. Pero las fórmulas son muy diferentes, tanto en la escritura como en el modo en que se analizan. Con esto último nos referimos a que mientras que para la función i un análisis posible es decir “a 4 siempre se le restan valores positivos (o cero), porque el paréntesis está elevado al cuadrado, por lo que 4 es el valor máximo”, para la función g el análisis sería: “para cualquier valor de x, el resultado del paréntesis es positivo (o cero) por estar elevado al cuadrado. A multiplicarse por –4, el primer término siempre será negativo (o cero); luego, al sumarle 4 es posible concluir que ese valor es el máximo que puede tomar la función".

Esta forma muy diferente de expresar el "comportamiento" de cada fórmula abona a la idea de diferenciarlas, aunque los esquemas que se construyen de cada una podrían conducir a pensar que se representa por medio de la misma gráfica. Nos parece interesante abordar estas discusiones en el aula, incluyendo tanto la condición que deben cumplir dos fórmulas para que den exactamente las mismas gráficas como la distancia entre la representación gráfica de la función y el esquema que usamos para observar solo algunos de sus elementos y características. Por todo esto, creemos que es oportuno que el o la docente promueva esa reflexión en el espacio colectivo de trabajo, proponiendo la tarea de decidir si son o no la misma función. Podría decir: "estas dos funciones tienen el mismo vértice y en los dos casos es mínimo, ¿cómo podemos saber si son exactamente las mismas funciones?, ¿coincidirán en todos los puntos? Por ejemplo, ¿tendrán la misma ordenada al origen?".

Por último, y a modo de corroboración, si se dispone de un proyector, el profesor o la profesora podría mostrar la gráfica de cada función realizada en GeoGebra para ver la aproximación del trazo realizado a mano y el gráfico realizado por el *software*. En esta oportunidad se espera visualizar que ambas representaciones coinciden en las coordenadas del vértice y en su condición de ser máximo o mínimo.

ACTIVIDAD 2[56]

A continuación, proponemos una actividad que nos interesa analizar en caso de disponer del programa GeoGebra en el aula (también podría ser la aplicación para dispositivos móviles, como un teléfono celular).[57]

A diferencia de la actividad anterior, donde se propuso utilizar el programa para verificar si el gráfico trazado a mano tenía relación con el realizado por el *software*, aquí se pondrá en juego una de las potencialidades más importantes de esta herramienta: el movimiento.

Este problema está pensado en dos partes. Se espera que, al finalizar la primera, se realice una discusión colectiva que permita llegar a ciertos acuerdos, descriptos más adelante, junto con los y las estudiantes.

56. Este problema fue extraído de FIORITI, Gema y SESSA, Carmen (coords.), *Transformación de una propuesta de enseñanza de funciones cuadráticas por la incorporación de la computadora al trabajo matemático de los estudiantes (Grupo de los Lunes)*, Buenos Aires, UNIPE: Editorial Universitaria, en prensa.

57. Si no se dispone del *software*, el lector o la lectora podría adaptar el problema o cambiarlo por otro que creyese pertinente para trabajar el rol de los parámetros en la forma canónica de la función cuadrática.

Ingresen en la barra de entrada los números: 1, 2 y 3. Renombren b y c por h y k, respectivamente.[58] *A continuación, escriban la fórmula:*
$f(x) = a(x - h)^2 + k$.

a) Modifiquen los valores de a, h y/o k, de manera que la función tenga un valor máximo igual a 3.6.[59]
Una vez que lleguen a una función que crean que tiene un máximo en y = 3.6 expliquen por qué el gráfico que se obtuvo cumple lo pedido. Para armar esta explicación pueden hacer construcciones auxiliares en la ventana gráfica utilizando herramientas del programa.
Apoyándose en la fórmula, escriban una explicación de por qué la función que cada grupo obtuvo cumple lo pedido.

A pesar de haber trabajado en la actividad anterior con la lectura de las fórmulas de algunas funciones cuadráticas escritas en la forma "tipo canónica", nuestra experiencia nos permite suponer que los y las estudiantes no relacionarán este problema con el precedente. Quizás, al trabajar en un entorno informático, están más enfocados y/o enfocadas en utilizar el programa y en explorar las distintas opciones y herramientas que se pueden aplicar.

Una primera decisión para abordar la actividad consiste en elegir qué parámetro mover. Quizás hasta determinar que el valor de k cambia la "altura" del extremo, las primeras exploraciones sean azarosas o intuitivas. Luego se podrá identificar que es necesario cambiar el valor de a para que la función tenga un máximo, dado que todas las que se generan con el valor inicial $a = 1$ tienen mínimo.

Una vez encontrada una función que cumpla lo pedido, los alumnos y las alumnas tendrán que brindar explicaciones utilizando el programa GeoGebra y luego, desde la lectura de la fórmula. Con respecto a las primeras, basándonos en nuestra propia exploración del programa y en experiencias de puesta en aula de este mismo problema, podemos anticipar las siguientes:

- Se puede hacer *zoom* hasta que aparezca en el eje y el valor 3.6 y visualizar que el gráfico no lo supera. Esta explicación está basada puramente en lo visual. Como este argumento podría traer algunas imprecisiones, el o la docente puede intervenir preguntando, por ejemplo: "¿Cómo estás seguro de que el máximo está en 3.6 y no en 3.61? ¿No habrá otra herramienta que te permita verificar con mayor exactitud que 3.6 es el valor máximo?

58. Por *default* el programa le asigna los nombres *a*, *b* y *c* a los parámetros. Hemos optado por cambiarlos para que luego no se presten a confusión con los nombres usuales de los parámetros involucrados en la forma desarrollada.

59. El programa GeoGebra utiliza para escribir los números decimales punto, en vez de coma. Por eso, utilizaremos esa misma notación.

- Otra estrategia puede ser ingresar la recta $y = 3.6$ en la barra de entrada y, luego, utilizar la herramienta “Intersección” (Figura 2).[60] Esta es una buena oportunidad para que el o la docente indague si sus estudiantes pudieron interpretar cómo GeoGebra muestra al punto de intersección en la vista algebraica del programa, ya que separa las coordenadas del punto con una coma, en lugar del punto y coma.

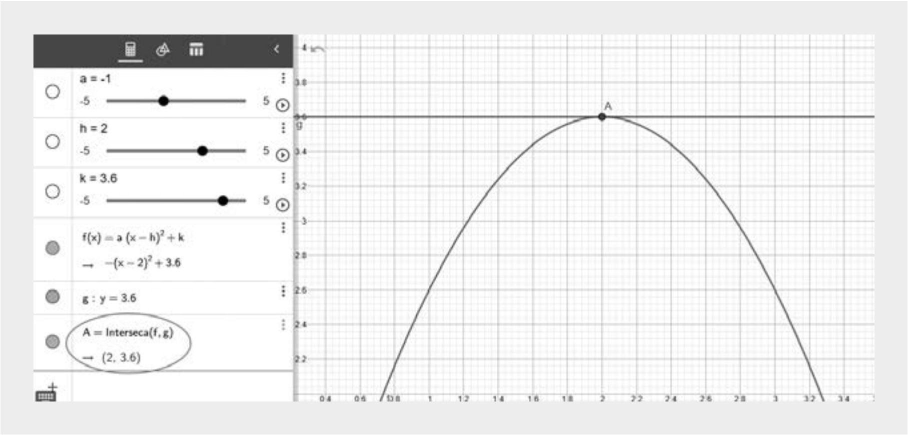


Figura 2. Al usar la herramienta “Intersección”, se puede visualizar el punto de intersección en la vista algebraica.

- Otra opción es directamente utilizar la herramienta “Puntos especiales”, como se indica en la Figura 3. Aquí los y las estudiantes tendrán que primero identificar qué información es pertinente (Figura 4) y, luego, interpretar cómo el programa escribe al extremo (punto C). La diferencia con respecto a la estrategia anterior es que aquí no se pone en juego ningún conocimiento matemático, mientras que en la propuesta precedente se tuvo que identificar primero que el extremo se puede encontrar como el punto intersección entre una recta horizontal y la parábola, y luego cómo trazar esta recta. Además, se utilizaron conocimientos de lectura de gráficos. Es por esto que una posible intervención docente podría ser: “¿Se te ocurre otra forma de corroborar que el punto que encontró GeoGebra es el extremo?”.
- En algunas aulas encontramos estudiantes que trazaban una recta con la herramienta “Recta” y que con “Elige y mueve” la ajustaban para que quedara horizontal. Luego hallaban los puntos de intersección con la parábola (Figura 5). A continuación, trataban que hubiera un solo punto de intersección. A medida que la recta se acerca al valor 3.6, los puntos

60. Este gráfico se puede visualizar en: <https://sitio.lapampa.edu.ar/repositorio/programas_proyectos/xmasmatematica/materiales/capitulo4.ggb>.

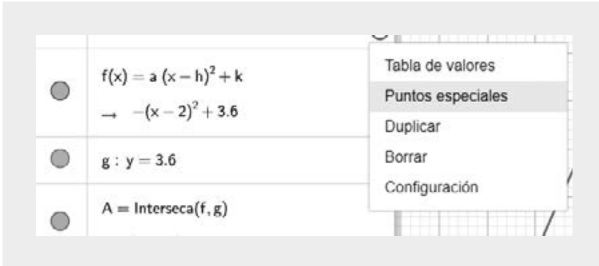


Figura 3. A la derecha de la fórmula, seleccionando los tres puntitos verticales está la opción "Puntos especiales".

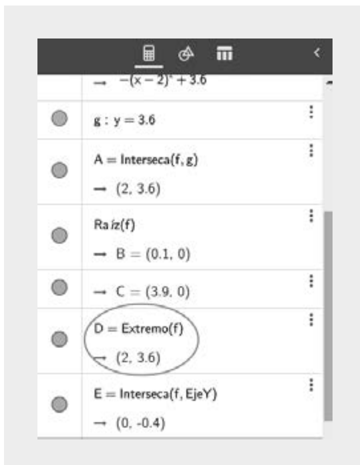


Figura 4. Al utilizar la herramienta "Puntos especiales", el programa brinda las intersecciones con los ejes (las coordenadas en este caso no son exactas) y el extremo.

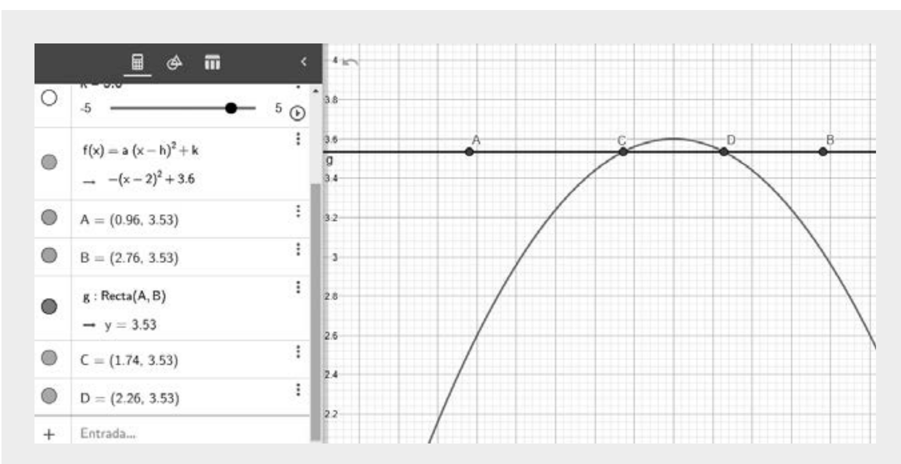


Figura 5. Con la herramienta "Elige y mueve" se puede desplazar la recta e ir identificando los nuevos puntos de intersección.

C y D se aproximan cada vez más. Sin embargo, es muy complejo lograr que el punto de intersección sea único. Más allá de lo costoso que es este procedimiento, nos parece importante rescatarlo porque en él se puso en juego que para que hubiera un extremo, debía haber un solo punto de intersección entre una recta horizontal y el gráfico de la función.

En la discusión colectiva de esta primera parte, además de confrontar las distintas estrategias que hayan surgido, debido a la diversidad de fórmulas que se encuentren, se pretende analizar cuántas funciones hay que cumplen lo pedido y qué característica en común tienen todas ellas.

Uno de los objetivos de esta actividad es que los alumnos y las alumnas se familiaricen con el programa y sus herramientas, pero además nos resulta indispensable que se discuta por qué todas las funciones halladas tienen un máximo en el valor 3.6. Es decir, algunos de los procedimientos discutidos al utilizar el GeoGebra permiten mostrar que las funciones cumplen lo pedido, pero el programa no explica por qué ocurre esto. Aquí es necesario volver a hacer un trabajo sobre la lectura de la fórmula, similar al realizado en las actividades anteriores.

Un buen recurso para este espacio colectivo es ingresar algunas fórmulas encontradas, ver sus respectivos gráficos todos juntos para compararlos y, finalmente, trazar la recta $y = 3.6$ para que se visualice que todos coinciden en su valor máximo (Figura 6).

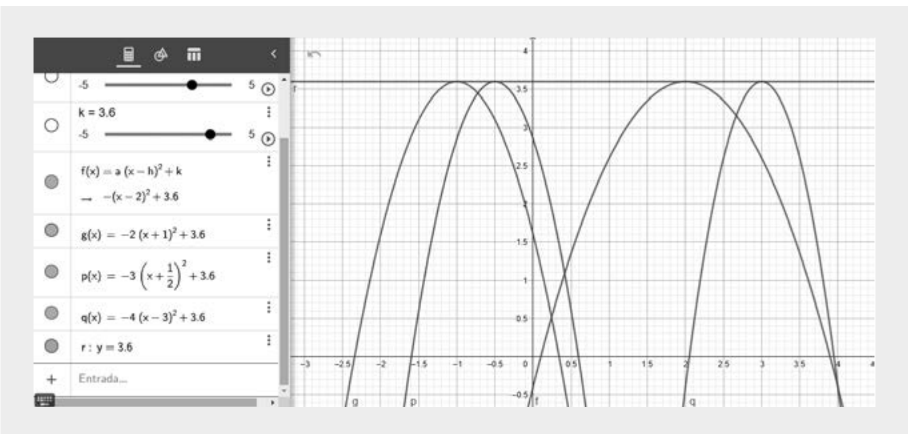


Figura 6. Fórmulas y gráficos de distintas funciones que cumplen lo pedido.

Entonces, antes de trabajar con la segunda parte de esta actividad, se pretende concluir junto con los y las estudiantes que *hay infinitas funciones cuadráticas que tienen un máximo en 3.6, y todas sus fórmulas se escriben como:* $f(x) = a(x - h)^2 + 3.6$*, donde a tiene que ser un valor negativo y h cualquier número real.*

A continuación, se propone dar la siguiente consigna:

Modifiquen los valores de a, h y/o k de manera que la función:

b) tenga un valor máximo igual a −4.1 y se alcance en x = 1.4.
c) tenga un valor mínimo igual a 2.7 y se alcance en x = −5.3.

Nuevamente busquen explicaciones sobre por qué las funciones encontradas cumplen lo pedido, utilizando herramientas del programa. Luego, realicen una validación apoyándose en las fórmulas encontradas.

En esta instancia, a diferencia de lo ocurrido en la actividad anterior, todos los parámetros tienen alguna restricción. Además, ahora se tendrá que identificar que el parámetro h define a la coordenada x del extremo.

Al tener determinado el extremo, es probable que surja como estrategia para explicar que la fórmula cumple lo pedido el trazado de una recta vertical en $x = 1.4$ –para el ítem b)– y luego la utilización de la herramienta “Intersección” como se muestra en la Figura 7.

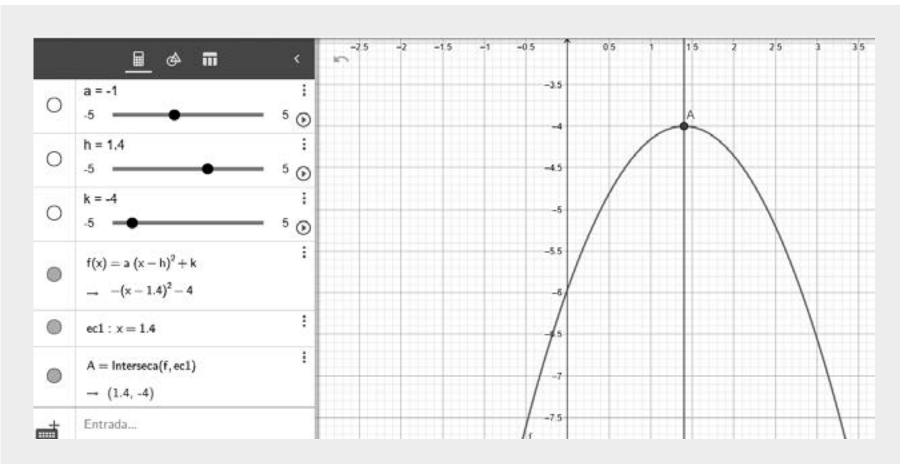


Figura 7. Trazado de una recta vertical $x = 1.4$ y su intersección con el gráfico.

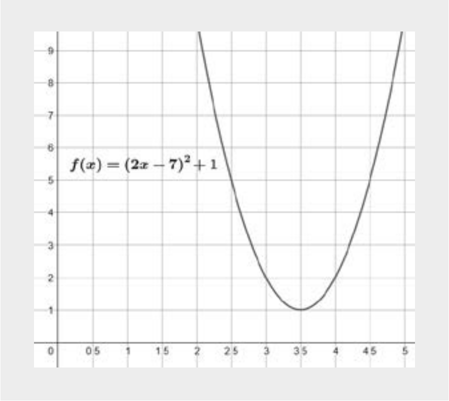
Sin embargo, este procedimiento no está validando que −4.1 es el valor máximo de la función. Se está explicando que la imagen de 1.4 es −4.1 y que es única (sino, no sería función). El o la docente puede hacer notar esto y pedir de qué manera se puede completar este razonamiento. Una forma es trazando luego la recta $y = -4.1$, y ver que su intersección con el gráfico coincide con el punto A de la figura anterior.

Nuevamente en la discusión colectiva, se pueden proyectar varias funciones encontradas en los pequeños grupos, verificar que todas cumplan lo pedido y, después, comparar qué tienen en común y qué de distinto.

A continuación, se presenta una actividad en donde de nuevo se pone en juego la coordinación de los registros algebraico y gráfico, pero este último está dado en papel. En este caso, la intención es discutir algunas de las ventajas y desventajas de cada registro.

ACTIVIDAD 3

Dada la siguiente fórmula con su respectivo gráfico, decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen en cada caso.



Para las explicaciones, según lo crean conveniente, pueden basarse tanto en el gráfico como en la fórmula.

a) *La función no tiene raíces.*
b) $x = 3$ *y* $x = 4$ *tienen la misma imagen.*
c) *El valor* $y = 0.9$ *está en el conjunto imagen.*
d) *La función tiene ordenada al origen y es 50.*
e) *El valor mínimo de la función es* $y = 1$ *y se alcanza en* $x = 3.5$.

Con relación a la conveniencia de cada registro, por ejemplo, para decidir si f tiene o no raíces es más inmediato mirar su gráfico, ya que claramente la parábola no corta (ni toca) nunca al eje x. En la puesta en común el o la docente puede "forzar" que se responda esta misma pregunta analizando la fórmula para discutir, en este caso particular, la ventaja del registro gráfico.

Se espera acordar con los y las estudiantes que si se visualiza que el gráfico "pasa" por los vértices de la cuadrícula, no se va a poner en discusión esta cuestión. Es por esto que quizás se afirme desde el gráfico que $x = 3$ y $x = 4$ tienen la misma imagen, la cual es $y = 2$. Responder el ítem c) desde este registro es más difícil, porque justo ahí el gráfico hace una "pancita". Visualmente pareciera ser que 1 es el valor mínimo, por lo tanto, la frase sería falsa. Aquí el profesor o la profesora puede proponerles a los y las estudiantes que validen esta cuestión desde la fórmula, utilizando las propiedades trabajadas en las actividades anteriores.

Hasta aquí todos los valores involucrados en las afirmaciones podían verse en el registro gráfico con mayor o menor precisión. El ítem d) es el primero donde necesariamente hay que utilizar la fórmula para hallar el valor de $f(0)$. Es más, puede ocurrir que se crea que la parábola nunca corta el eje y porque está "muy alejada del mismo". Quizás esta sea una buena oportunidad para mencionar que cuando uno hace un gráfico en lápiz y papel está decidiendo qué recorte mostrar. En este caso, se optó por mostrar el gráfico para valores de x entre 2 y 5, aproximadamente, tal vez porque teniendo en cuenta la escala elegida no era conveniente incluir la ordenada al origen.

Con respecto al vértice, si anteriormente se discutió en los pequeños grupos que 1 era el valor mínimo de la función, haciendo una lectura de la fórmula, ahora viendo el gráfico se podría afirmar que 3.5 es su coordenada x. El o la docente, nuevamente, puede problematizar esta cuestión preguntando: "*¿Cómo se puede estudiar la fórmula para ver si efectivamente en 3.5* se alcanza el mínimo?". Con este interrogante se espera que los alumnos y las alumnas evalúen en 3.5 o directamente analicen para qué valor de x la expresión $2x - 7$ se anula.

Luego de haber abordado estas tres actividades, es un buen momento para institucionalizar las características de la función cuadrática trabajadas hasta aquí, como ser; de toda función cuya fórmula se puede escribir como $f(x) = a(px - h)^2 + k$ (con $a \neq 0$) se puede afirmar que:

- si $a > 0$ tiene mínimo,
- si a < 0 tiene máximo,
- el valor del extremo vale $y = k$,
- el extremo se alcanza en el valor de x, que anula el argumento del cuadrado, es decir, $px - h$,
- dado un valor de y en el conjunto imagen, siempre hay dos valores de x para ese mismo y, salvo en el extremo, allí el valor de x es único.

Todas estas características se pueden ir mostrando y validando con ejemplos de fórmulas y/o gráficos particulares. También se puede ir haciendo un recorrido de las funciones trabajadas hasta aquí, identificando las características mencionadas con su respectiva justificación. El o la docente podría aprovechar este momento para definir que a este tipo de fórmulas, cuya forma general es $f(x) = a(px - h)^2 + k$ (con $a \neq 0$), las llamaremos *tipo canónicas*.[61]

Como cierre de esta parte se propone la siguiente actividad de síntesis, en la que los y las estudiantes deben poner en juego todo lo trabajado hasta aquí. El o la docente puede aprovechar esta tarea para identificar cuáles de las características mencionadas en la discusión colectiva anterior se lograron

61. El profesor o la profesora puede hacer notar que si p toma el valor 1, se trata de la forma canónica. Es conveniente hacer esta aclaración porque luego esta escritura es la que se va a utilizar para hallar las raíces de una función cuadrática si la expresión está dada en la forma desarrollada.

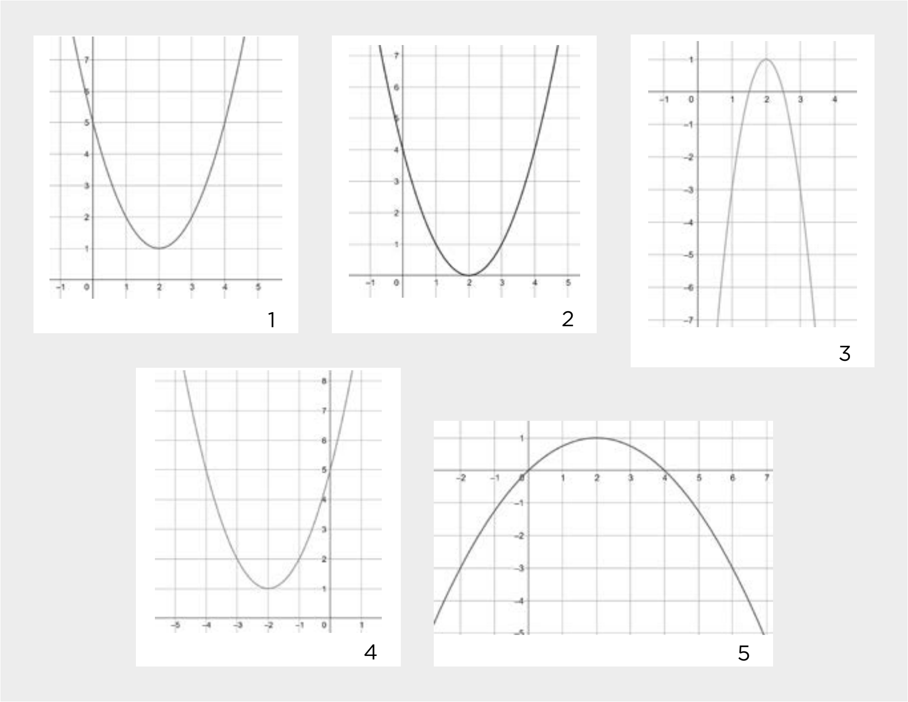
interiorizar y cuáles no. Es por esto que recomendamos trabajar este problema individualmente en una primera instancia y que luego cada estudiante compare sus respuestas con su compañero o compañera de banco.

ACTIVIDAD 4

Se tienen las fórmulas de las funciones f, h y q:

$f(x) = (x + 2)^2 + 1,$ $\qquad h(x) = (x - 2)^2,$ $\qquad q(x) = -(2x - 4)^2 + 1.$

Decidan cuáles de los siguientes gráficos se podrían corresponder con cada una. Expliquen cómo se dieron cuenta.



Durante el momento de trabajo individual, el o la docente puede ir observando, por ejemplo, quiénes optan como una primera estrategia por la lectura de la fórmula para elegir el gráfico (o viceversa) y quiénes necesitan evaluar en valores de x particulares. Ahora bien, la estrategia de la lectura de la expresión no es suficiente para identificar cuál podría ser el gráfico de la función q, ya que solamente se puede asegurar que tiene un máximo en el punto (2; 1); y tanto el Gráfico 3 como el 5 cumplen con esta condición. Por lo tanto, aquí sí es necesario evaluar en algún valor particular. Una posible estrategia podría ser reemplazar en la fórmula q por $x = 0$ o $x = 4$ (raíces del Gráfico 5) y ver si dan cero.

Hasta aquí, en los dos primeros apartados, hemos desarrollado un trabajo con funciones cuadráticas dadas en sus fórmulas canónica o *tipo canónica*. Además de trabajar con la coordinación entre el registro algebraico y el registro gráfico, la intención fue mostrar la potencialidad de esta escritura para leer y obtener cierta información de la fórmula, como por ejemplo, el vértice, el conjunto imagen y valores de x que tengan igual imagen.

ESTUDIO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE OTRAS FORMAS DE ESCRIBIR LA FÓRMULA

Antes de comenzar a trabajar con los y las estudiantes las tareas que se proponen en esta tercera parte, sería necesario realizar otras actividades que reinviertan las ideas hasta acá desarrolladas y, a la vez, aborden otras que aún no fueron elaboradas, como ser el reconocimiento de que los valores de x con igual imagen están a la misma distancia del valor x del vértice (noción de simetría). También, será necesario trabajar con actividades en las cuales se construyan fórmulas a partir de ciertos datos, por ejemplo, armar una fórmula de una función sabiendo que su gráfico es una parábola con vértice en el punto (–1; 2) y además pasa por el (1; 4). Se podría preguntar, luego, cuántas fórmulas diferentes se pueden armar, para poder concluir que *dado el vértice y un punto más, hay una sola fórmula canónica que cumple con todas las condiciones pedidas, ya que ese otro punto determina el parámetro* a *de la expresión*. También se podría mencionar entonces que *el vértice y un punto (con su simétrico) determinan la "abertura" de la parábola*.

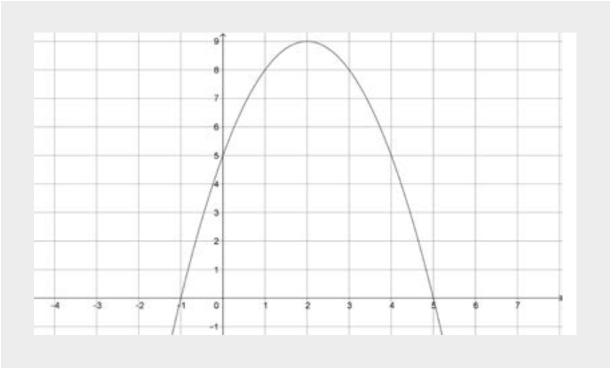
Por otro lado, tanto en esta parte como en la siguiente, las actividades propuestas están dadas sin contextos. A pesar de esto, consideramos que sería interesante intercalar en una secuencia de enseñanza estos dos tipos de actividades (con y sin contextos), para entramar las relaciones que se van construyendo en situaciones donde la función pueda modelizar una situación determinada, como ser de trayectoria o de distancias en función del tiempo.[62]

ACTIVIDAD 1

En esta actividad se pretende recurrir al reconocimiento de una fórmula canónica asociada a una parábola, para a partir de allí abordar nuevas fórmulas con el fin de comenzar a establecer vínculos entre ellas y la información obtenida de la gráfica. Es decir, nuevamente se pretende establecer un ida y vuelta entre estas dos formas de representación de la función cuadrática, pero ahora ampliando el tipo de fórmulas que se presentan.

62. Todas estas cuestiones se atienden en: ILLUZI, Alejandra *et al.*, "Capítulo 3. Estudio de la función cuadrática a partir de su fórmula", *op. cit*, pp. 45-61.

Dado el gráfico de una función cuadrática, decidan cuál o cuáles de las siguientes fórmulas se corresponden con la parábola dada:



$f(x) = 9 - (x - 2)^2$, $g(x) = 9 + (x - 2)^2$, $h(x) = -(x - 4)\,x + 5$,
$i(x) = x(x - 4) + 5$, $j(x) = (5 - x) \cdot (x + 1)$, $k(x) = -x^2 + 4x + 5$,
$l(x) = (x - 5) \cdot (x + 1)$, $m(x) = x^2 - 4x + 13$.

Las dos primeras fórmulas de esta actividad (*f* y *g*) están expresadas en forma canónica, por lo que es esperable que los y las estudiantes no tengan dificultades en analizarlas. Podría surgir de la lectura de las fórmulas que la parábola de la función *g* tiene mínimo, razón por la que quedaría descartada, mientras que la de la función *f* tiene máximo. Sabiendo que con el vértice y un punto más queda determinada una única fórmula canónica, podrán aceptar la *f* como correcta.

Para el resto de las fórmulas dadas,[63] tendrán que empezar a poner en juego nuevas relaciones. Por ejemplo, es esperable que reemplacen en ellas algunos valores identificados en la gráfica. Podrían empezar por sustituir el punto (2; 9) y ver que son varias las fórmulas que verifican la igualdad con esos valores (*h*, *j*, *k* y *m*). Podría ser que continuaran poniendo a prueba las diferentes fórmulas reemplazando por otros puntos. Para esta tarea, es posible que recurran a puntos "relevantes" de la gráfica, como la ordenada al origen o las raíces.

Notemos que al reemplazar la x por 0 en la fórmula de h, se anula el primer término y se obtiene como resultado 5, que es el valor del segundo término. Lo mismo sucederá al reemplazar por $x = 4$. De esta manera, se intenta favorecer el reconocimiento de que esta forma particular de escribir la fórmula de la función permite visualizar los valores de x (los que anulan el primer término), que tienen al número del segundo término como imagen. Será interesante

63. Si el o la docente considera que son muchas fórmulas puede seleccionar aquellas que apuntan a discutir las cuestiones que considere más relevantes.

observar que si hay estudiantes que no empiezan reemplazando por los valores del vértice en todas las fórmulas, y comienzan con la ordenada, entonces no tendrán aún herramientas para descartar la fórmula i, ya que esa función también cumple que el 0 y el 4 son valores de x con imagen 5. Es decir, la función h y la i comparten que los valores de $x = 0$ y $x = 4$ tienen como imagen 5 (como sucede en la parábola), pero solo la función h es correcta.

De manera análoga, al reemplazar por las raíces en la fórmula j o en la l, se obtiene que ambas cumplen con la igualdad. Creemos que esta información que los y las estudiantes van obteniendo al sustituir distintos puntos en las fórmulas, les permitirá pensar en la necesidad de que las igualdades se verifiquen con cualquier punto (perteneciente a la gráfica) que se utilice para reemplazar. Es decir que uno o dos puntos que cumplen la igualdad no son suficientes para aceptarla como correcta, pero uno solo que no lo hace alcanza para descartar esa fórmula.

Podría suceder que, al llegar al momento del trabajo colectivo, algunos grupos de estudiantes tengan como posibles a fórmulas que no lo son, justamente por no haber probado con los suficientes puntos como para encontrar alguno que no verifique la igualdad. Esta será una buena oportunidad para que el o la docente recupere la idea de expresiones equivalentes y de que, para estar totalmente seguros de la correspondencia entre una fórmula y una gráfica dada, todos los puntos de la parábola deberían verificar la igualdad de la fórmula (cuestión imposible de realizar en la práctica). Pero sí se puede estudiar que la expresión en cuestión es equivalente a la canónica, que ya se sabe que es correcta, es decir a la fórmula de f.

De esta manera, se pueden pedir las transformaciones de las fórmulas hasta obtener la expresión desarrollada de las mismas y así poder validar que efectivamente f, j, h y k son equivalentes, por lo que tendrán exactamente la misma gráfica.

En esta actividad se reconoce entonces la existencia de diferentes fórmulas que representan a la misma función, y si bien las características de la parábola se fueron describiendo a partir del estudio de la fórmula del tipo canónica, se empieza a reconocer que hay otras formas de escribir esas fórmulas, por lo tanto, también tendrán como gráfico una parábola. De cada una de ellas es posible empezar también a leer información. En particular, de la funciones j y l se pueden leer las raíces, y de h e i se pueden deducir otros pares de valores de x que tienen la misma imagen. Esta lectura de información de las fórmulas es la que pretendemos propiciar y sostener a lo largo de todo el capítulo.

Como cierre de esta tarea, creemos que es posible retomar una particularidad del trabajo realizado para introducir una definición. En esta actividad obtuvimos la expresión desarrollada de cada fórmula, lo que nos permitió reconocer si eran o no equivalentes a la fórmula canónica. También se puede explicitar que *toda fórmula tipo canónica se puede transformar en una desarrollada* y que se utiliza esta forma de expresar la fórmula para definir a una función cuadrática. Por ende, creemos que es un buen momento para que el o la docente defina que: "una función cuadrática f es aquella cuya expresión desarrollada de su fórmula es de la forma $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, donde a debe ser distinto de 0, y b y c pueden ser cualquier número real (incluso 0)". Además, es posible adelantar que, así como la parábola es el gráfico de las funciones cuya fórmula es del tipo canónica, el gráfico de todas las funciones cuadráticas tendrá esa forma.

ACTIVIDAD 2

Aquí se propone estudiar qué datos de la parábola se pueden obtener a partir de la lectura de cada tipo de fórmula, como ser el vértice, ciertos valores de x con igual imagen (en particular las raíces) y la ordenada al origen.

a) Dadas las siguientes fórmulas de funciones estudien si se trata, en algún caso, de la misma función:

$f(x) = -3 + \frac{1}{3}(x-2)^2$, $g(x) = (x+1)\cdot(x-5)$, $h(x) = (x+4)\cdot(x-8)+9$,

$i(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$, $j(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

b) Analicen cuál o cuáles de ellas cumplen con todas o algunas de las siguientes características:
- *i) tiene el vértice en (2; −3),*
- *ii) pasa por los puntos (8; 9) y (−4; 9),*
- *iii) sus raíces son −1 y 5,*
- *iv) la ordenada al origen es* $-\frac{5}{3}$.

Para el apartado a), los y las estudiantes deberán obtener la expresión desarrollada de cada una y así comprobar que, salvo f y j, el resto son todas funciones cuadráticas diferentes.

Para el apartado b), al estudiar estas funciones en busca de determinar si cumplen o no con las características dadas, los y las estudiantes podrán notar que la función f cumple con todas ellas (por ende, la función j también las cumplirá), pero que solo algunas se pueden determinar con la lectura de la fórmula mientras que, en cambio, para otras es necesario reemplazar los valores dados y realizar las cuentas. De esta manera se pueden poner en valor las fórmulas f para leer el vértice de la función y la j para leer la ordenada al origen.

Al analizar las otras funciones, encontrarán que no es tan sencillo determinar el vértice de las mismas y que, por ende, un primer paso puede ser reemplazar en cada fórmula por $x = 2$ para determinar su imagen. En ese caso, encontrarán que en la función i, la imagen del 2 es −3, lo que podría llevar a pensar que entonces cumple lo pedido en el ítem i). Sin embargo, ese punto no resulta ser el vértice de la función, por lo que se necesitará más análisis por parte de los y las estudiantes o, en su defecto, la intervención docente. Por ejemplo, podrían probar con valores de x mayores y menores que 2, y comprobar que a veces las imágenes son mayores que i (2) y otras veces menores, por lo que no podría ser el vértice. O también es posible remitir a que la función j tiene el mismo vértice y la misma ordenada que la f, por ende, no es posible que la función i también cumpla con esas dos características; pues entonces las funciones i y j deberían ser equivalentes.

El estudio de las funciones para ver si portan las características enunciadas en los ítems ii) e iii) podría ser simplemente reemplazando en las fórmulas para ver si cumplen la igualdad o empezando a poner en juego cierto análisis de la escritura de las funciones g y h.

Siguiendo con este análisis es posible que, en el espacio colectivo de trabajo y con un o una docente que ponga el foco en qué información es más fácil de observar en cada una de las formas de escribir la cuadrática, se intente llegar a las siguientes conclusiones:

- la fórmula de la función f es útil para leer las coordenadas del vértice, si ese vértice es máximo o mínimo y el conjunto imagen, es la ya conocida fórmula *canónica*;
- de la fórmula de g es posible leer la información de las raíces, o sea, las preimágenes del 0, a este tipo de fórmula la llamaremos *factorizada*;
- en cambio, de la función h es posible leer la información de las preimágenes de 9, a este tipo de fórmula la denominaremos *cuasifactorizada*;
- la forma *desarrollada*, como la i y la j, es útil para decidir si dos fórmulas son equivalentes o no y para leer la ordenada al origen.

Si el o la docente lo cree necesario, puede acompañar estas conclusiones escribiendo este tipo de fórmulas de manera genérica mediante la utilización de parámetros.

ACTIVIDAD 3

Aquí proponemos una tarea en la que se intenta potenciar la relación entre dos valores de x con igual imagen, en cualquier función cuadrática, y la posibilidad de obtener la coordenada x del vértice apelando a la noción de simetría. Para ello será útil poner en juego los modos de leer información de la fórmula, desarrollados en la actividad anterior.

a) Determinen las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

$f(x) = (x + 1) \cdot (x - 5)$, $g(x) = (x + 4) \cdot (x - 8) + 9$,
$h(x) = 3 - (2x - 5) \cdot (x + 1)$, $i(x) = (x - 3)^2$,
$j(x) = -(x - 3)^2 + 8$, $k(x) = -(x - 3) \cdot x + 4$.

b) Decidan si ese vértice es máximo o mínimo.

Las dos primeras fórmulas que se proponen son las mismas que las funciones g y h trabajadas en la Actividad 2. De esta manera, queremos que esté disponible la información obtenida en su momento y, de alguna manera también, el modo de acceder a ella que se explicitó en las conclusiones. Para poder obtener la respuesta al ítem a), se debe utilizar la idea de que el x del vértice se encuentra en el punto medio de dos valores de x con igual imagen.

Se espera que para la función h, a pesar de tener los términos invertidos (respecto de la forma que ya se ha analizado), no demande mayor dificultad encontrar que 5/2 y –1 son valores de x con igual imagen. De esta manera, se refuerza la idea de la identificación de las características esenciales de la *forma cuasifactorizada* de la fórmula (recordemos que es la que permite obtener dos valores de x con igual imagen): *posee un término con un solo número y otro donde aparece la variable independiente, con un producto, sin importar el orden en que aparezcan esos términos.*

La fórmula de la función i implica un pequeño desafío, puesto que es posible que no se identifique inmediatamente esa expresión como un producto de dos factores iguales. Además, su gráfico tiene la particularidad de que el vértice se encuentra sobre el eje y. Creemos que esta nueva mirada sobre esa escritura permite leer la expresión de otra manera y llevará a abordar la función i de una forma totalmente diferente del estudio que se hizo con las fórmulas de tipo canónica. La explicitación de esa doble posible mirada sobre esta expresión puede ser promovida por el o la docente en el espacio colectivo de trabajo, dotando de más sentidos a esa escritura.

Para estudiar la fórmula de la función k será necesario identificar un par de valores de x con igual imagen cuando uno de los factores es simplemente x, lo que determina que uno de esos x es cero. Por otro lado, también se puede proponer en el espacio colectivo el nuevo desafío de estudiar la expresión $f(x) = x^2$ para determinar el vértice. Nos interesa mencionar que este tipo de trabajo que intentamos sostener desde toda la propuesta, donde se estudian las expresiones algebraicas desde su estructura y las operaciones involucradas, es más potente y enriquecedor cuanto más compleja es la expresión. Es decir, tener una expresión con muchas operaciones y términos acrecienta la posibilidad de interpretación y de búsqueda de información, mientras que, por el contrario, la expresión $f(x) = x^2$, tan desprovista de elementos, complejiza la tarea de lectura de información.

Para el ítem b) se espera que los y las estudiantes recurran a otro dato más para poder decidir si ese vértice es máximo o mínimo. En este sentido, la información ya disponible de los valores de x con igual imagen, que se usó para calcular el x del vértice, podría ser el dato que se utilice para tomar esta decisión dado que es posible comparar la imagen de esos valores de x con la coordenada y del vértice y así determinar si el extremo se trata de un máximo o de un mínimo.

Para cerrar esta actividad nos interesa recurrir nuevamente a la idea de esquema del gráfico cartesiano. Podría ser que, en algunas de las resoluciones de los pequeños grupos, ya haya surgido esta representación como modo de comunicar el razonamiento utilizado para buscar dos x con igual imagen y ubicar en el medio el x del vértice. Si esto no hubiera sido un recurso utilizado por los y las estudiantes, en el espacio de trabajo colectivo podría ser interesante que el o la docente promueva esta representación para sintetizar estos modos de pensar. De esta manera, se fortalece el diálogo entre la fórmula y la gráfica. Este esquema debería explicitar los valores de x con igual imagen determinados en cada función y las coordenadas del vértice hallados. Por último, creemos que, en el caso de disponer de un proyector, el o la docente podría representar esas funciones en GeoGebra, a modo de comprobación.

PRIMEROS ABORDAJES DEL ESTUDIO DE LA FÓRMULA DESARROLLADA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Tanto la fórmula conocida para hallar la coordenada x del vértice ($x_v = -b/2a$) como la de Bhaskara (o resolvente) serán el punto de llegada de este capítulo. Un primer objetivo de este apartado es "preparar el terreno" para arribar a aquellas fórmulas mediante un trabajo previo con las expresiones en forma cuasifactorizada y canónica. Como mencionamos al introducir este capítulo, creemos que, al deducir estas fórmulas gracias a un trabajo previo, los y las estudiantes les otorgarán más sentido.

En relación con lo descripto en el párrafo anterior, en este apartado también abordaremos distintas estrategias para hallar el vértice y los ceros (en caso de que existan) de una función cuadrática si la misma viene presentada en la fórmula desarrollada.

A continuación, presentamos la primera actividad de este bloque, que tiene por intención introducir la técnica del factor común, fundamental para poder arribar al objetivo propuesto.

ACTIVIDAD 1

a) Decidan si las expresiones de las fórmulas de f y g son equivalentes:
$f(x) = x^2 + x$ *y* $g(x) = x(x+1)$.

b) Reescriban la fórmula de la función h de forma tal que se pueda leer que $x = 0$ *y* $x = -4$ *son sus raíces:*
$h(x) = x^2 + 4x$.

c) Reescriban la fórmula de la función j de forma tal que se pueda leer que $x = 0$ *y* $x = -1$ *tienen la misma imagen,* $y = 3$*:*
$j(x) = x^2 - x + 3$.

Como mencionamos anteriormente, el objetivo principal de esta actividad es introducir la técnica de "sacar factor común", la cual luego será fundamental para el trabajo con la escritura de la fórmula desarrollada de la función cuadrática. Si ya se ha realizado un trabajo con esta técnica, este problema se puede utilizar para afianzarla.

Con respecto al ítem a), dependiendo del trabajo previo que se haya realizado con expresiones equivalentes, quizás sea de esperar que ciertos alumnos y alumnas evalúen en algunos valores particulares y justifiquen la equivalencia argumentando que las imágenes para tales valores son iguales. Como ya se viene proponiendo en actividades anteriores, el o la docente podría intervenir diciendo que esto significa que las funciones coinciden en esos valores, pero esto no implica que suceda lo mismo para cualquier valor de x que se elija.

Realizando un trabajo algebraico, es probable que se utilice la propiedad distributiva en la fórmula de g obteniendo finalmente la fórmula de f.

Antes de trabajar con el ítem b), creemos necesario mantener una discusión colectiva sobre la primera consigna, en la que se debata por qué las expresiones dadas son equivalentes. Desde el registro algebraico, como mencionamos con anterioridad, seguramente surja la transformación de la expresión de g en la de f. Esta es una buena oportunidad para mencionar que si se realiza el proceso inverso se denomina *factor común*.

Con el ítem b), se pretende que los y las estudiantes piensen cómo escribir las fórmulas de h y j en la forma factorizada o cuasifactorizada. Quizás sea necesario recordar qué significa leer de una fórmula que dos valores de x tengan la misma imagen.

Con respecto a la función h, puede ocurrir que no consideren la tarea de reescribir su fórmula, sino que planteen directamente la expresión $x(x + 4)$, teniendo en cuenta el dato de los ceros sin pensar en la equivalencia con $x^2 + 4x$. En este caso, es necesario que el o la docente intervenga pidiendo un argumento sobre por qué las dos fórmulas son equivalentes. Si esto mismo ocurre con la función j, es decir, si directamente se plantea la fórmula $x(x + 1) + 3$, sabiendo que $j(0) = j(-1) = 3$, y las explicaciones se dan mediante la propiedad distributiva, se sugiere proponer un nuevo problema donde de manera explícita se pida transformar una fórmula de la forma desarrollada a la expresión cuasifactorizada, para que sea necesario “sacar factor común”.

La próxima actividad tiene la intención de que los y las estudiantes pongan en juego la técnica aprendida en el problema anterior a la hora de tener que hallar el vértice de una función cuadrática cuando su fórmula está presentada en la forma desarrollada.

ACTIVIDAD 2

a) Hallen el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:
$f(x) = x(x + 3) + 4$, $g(x) = x^2 + 10x + 16$, $h(x) = -x^2 + 6x - 14$.

b) Decidan si los vértices hallados en el ítem anterior son máximos o mínimos.

La fórmula de f ya está escrita en la forma cuasifactorizada, por lo tanto, el extremo se puede encontrar utilizando la técnica trabajada en el apartado anterior ("Primeros abordajes del estudio de la fórmula desarrollada de la función cuadrática"). Con respecto a las fórmulas de g y h, los estudiantes tendrán que darse cuenta de que con el tipo de fórmula presentada es sumamente complicado hallar el extremo. Es decir, es necesario considerar lo trabajado en el problema anterior para "sacar factor común" y así transformar tales escrituras en la cuasifactorizada. Por ejemplo, la expresión $x^2 + 10x + 16$ puede pensarse como $x(x+10) + 16$. De aquí se puede deducir que $x = 0$ y $x = -10$ tienen la misma imagen ($y = 16$). Por lo tanto, la coordenada x del extremo es -5 y su imagen es $f(-5) = -9$. Como la imagen de -5 es menor que la imagen de 0 (o de -10), se puede concluir que es un mínimo.

Quizás a la hora de sacar factor común resulte una complicación que el coeficiente principal de la función h sea -1. Si en el momento de trabajo en grupos surgiesen las expresiones $-x(x - 6) - 14$ y $x(-x + 6) + 14$, sería interesante discutir en un espacio de trabajo colectivo que ambas permiten encontrar el extremo de la función.

Como cierre de esta parte se propone la siguiente actividad donde se les presenta a los alumnos y a las alumnas distintas escrituras de las fórmulas de una función cuadrática con la intención de discutir luego cuál es la más conveniente al tener que hallar sus ceros.

ACTIVIDAD 3

Dadas las siguientes fórmulas de funciones cuadráticas:

$f(x) = -(x + 3)^2 + 16,$

$g(x) = 3x(x + 1),$

$h(x) = 2(x + 4)x + 24,$

$j(x) = -x^2 - 6x + 7;$

para cada una de ellas:

a) encuentren dos valores de x que tengan la misma imagen,

b) hallen, si tiene, sus raíces, y

c) hagan un esquema de su posible gráfico.

Tanto en la forma factorizada como en la canónica, es posible hallar las raíces de la función (en este último caso si la misma tiene ceros). Con respecto a las fórmulas de h y j, es posible que los y las estudiantes igualen a cero e intenten resolver la ecuación. En ambos casos, al no conocer todavía la fórmula resolvente, pueden surgir diferentes tipos de errores en los despejes.

Como se viene trabajando que desde la forma factorizada es sencillo hallar las raíces de una función cuadrática, quizás se crea que también lo es desde la cuasifactorizada. En el caso de h, al igualar a 0 y realizar algunas operaciones en ambos lados de la igualdad, se obtiene $x(x + 4) = -12$. Aquí los alumnos y las alumnas pueden creer que es posible encontrar valores de x que verifiquen que ese producto da como resultado –12. Tras muchos intentos y al no encontrar valores que verifiquen la igualdad, podrían sospechar que, probablemente, la función no tiene raíces. En este caso el o la docente puede preguntar: "¿Es suficiente haber probado con varios valores y ver que no se cumple la igualdad para asegurar que h no tiene ceros?". Si se intenta esta misma estrategia con la función j, la ecuación resultante es $x(x + 6) = 7$. Aquí sí es factible (y no muy costoso) encontrar las soluciones probando valores de x hasta que se cumpla la igualdad.

Para deducir que h no tiene raíces, al estar su fórmula presentada en cuasi-factorizada, se puede leer que $x = 0$ y $x = -4$ tienen la misma imagen: $y = 24$. Por lo tanto, su extremo tiene coordenada $x = -2$ y su coordenada y es $h(-2) = 16$. Entonces el punto (–2; 16) es mínimo, porque, por ejemplo, $h(-2)$ es menor que $h(0)$. De aquí se concluye que no tiene raíces.

Creemos conveniente hacer una sola discusión colectiva al final de toda la actividad para que, mediante la coordinación entre el registro gráfico y el algebraico, se analicen y discutan en los pequeños grupos las posibles contradicciones que puedan ir surgiendo. Por ejemplo, puede ocurrir que mediante transformaciones algebraicas se obtengan raíces para la función h y que luego, a la hora de hacer el gráfico mediante la estrategia anteriormente mencionada, se visualice que el gráfico no corta al eje x. También puede ocurrir que en el ítem b) los ceros de f y j no coincidan, pero luego se llegue al mismo gráfico en el ítem c). Cabe destacar que a diferencia de las actividades anteriores en las que se tuvieron que hacer esquemas, aquí los y las estudiantes cuentan con más información para graficar: dos valores de x con la misma imagen, el vértice y las raíces (si la función tiene ceros).

En caso de disponer del GeoGebra, al final del problema los y las estudiantes podrían ingresar las fórmulas dadas para verificar si sus gráficos son similares a los que hace el programa. Además, podrían tanto estudiar con las herramientas del *software* si los valores dados con la misma imagen son correctos como así también hallar los extremos y los ceros de cada función con la herramienta "Puntos especiales".

Como mencionamos al comienzo de este análisis, se espera concluir que *para hallar los ceros de una función cuadrática, si la misma está presentada en su fórmula desarrollada, es conveniente transformarla en su expresión canónica*. En la próxima parte se propone trabajar, entre otras cuestiones, la transformación de expresiones desarrolladas a canónicas, con algunas funciones cuyo coeficiente principal sea distinto a 1 y a –1.

CONSTRUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE BHASKARA A PARTIR DE LA FÓRMULA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En este último aparado del capítulo, proponemos generalizar la técnica para hallar los ceros de cualquier función cuadrática. Además, como venimos anticipando, deduciremos un posible recorrido para reconocer de dónde proviene la fórmula para encontrar la coordenada x vértice de una función cuadrática y la fórmula de Bhaskara. Las demostraciones que proponemos están al alcance de las y los estudiantes, porque se relacionan con todo el trabajo que hemos venido desplegando en las páginas precedentes; pues están basadas en lo visto anteriormente para funciones particulares. Apostamos a que, a partir de aquí, a la hora de tener que hallar los ceros de una función cuadrática (o resolver alguna ecuación cuadrática), los alumnos y las alumnas sean capaces de analizar si es conveniente o no utilizar estas fórmulas. Pero aun cuando decidan aplicarlas, nos resulta interesante que hayan conocido una fundamentación que explique de dónde provienen estas expresiones.

Si bien en la introducción del apartado "Estudio de la función cuadrática a partir de otras formas de escribir la fórmula" ya hemos propuesto trabajar con problemas para determinar la fórmula canónica de una función cuadrática dadas ciertas condiciones, en la próxima actividad retomaremos esta tarea, pero pretendemos poner el foco en el trabajo con el coeficiente principal de una función cuadrática a la hora de tener que escribir una fórmula en la escritura canónica a partir de su forma desarrollada.

ACTIVIDAD 1

Dada la siguiente fórmula de una función cuadrática, escribirla en su forma canónica y, luego, si es posible, hallar sus ceros:

$g(x) = 3x^2 - 6x - 24$.

Por todo el trabajo realizado, es de esperar que nuevamente se escriba la fórmula en la escritura cuasifactorizada, es decir: $g(x) = x(3x - 6) - 24$. Quizás haya estudiantes que deduzcan que el 3 también puede "sacarse" como factor común; en ese caso, la fórmula de g se escribirá como $g(x) = 3x(x - 2) - 24$. De ambas escrituras se puede deducir que $g(0) = g(2)$. Por lo tanto, la coordenada x del vértice se encuentra en $x =1$ y su coordenada y es $g(1) = -27$.

Luego se podría deducir que la fórmula de g escrita en canónica es $g(x) = (x - 1)^2 - 27$. En ese caso, sería muy interesante disponer del GeoGebra para que los alumnos y las alumnas ingresaran ambas expresiones, es decir: $3x^2 - 6x - 24$ y $(x - 1)^2 - 27$ (Figura 8). Luego el docente o la docente podría preguntar: "¿Se trata de la misma función? ¿En qué coinciden? ¿En qué se diferencian?".

También se podría sugerir que utilizaran la opción "Puntos especiales" para que el programa les mostrara las intersecciones de cada gráfico con los ejes cartesianos y los vértices de las parábolas.

En caso de no disponer del GeoGebra, se puede preguntar por cuestiones más puntuales, por ejemplo: "Sabemos que $g(0)$ y $g(2)$ valen -24. ¿Esto ocurre en la nueva escritura de la función g?". Como al evaluar $x = 0$ en la nueva fórmula se obtiene el valor -26, es posible que los y las estudiantes crean que hay que sumarle 2 a la nueva función, esto es: podría plantearse la fórmula

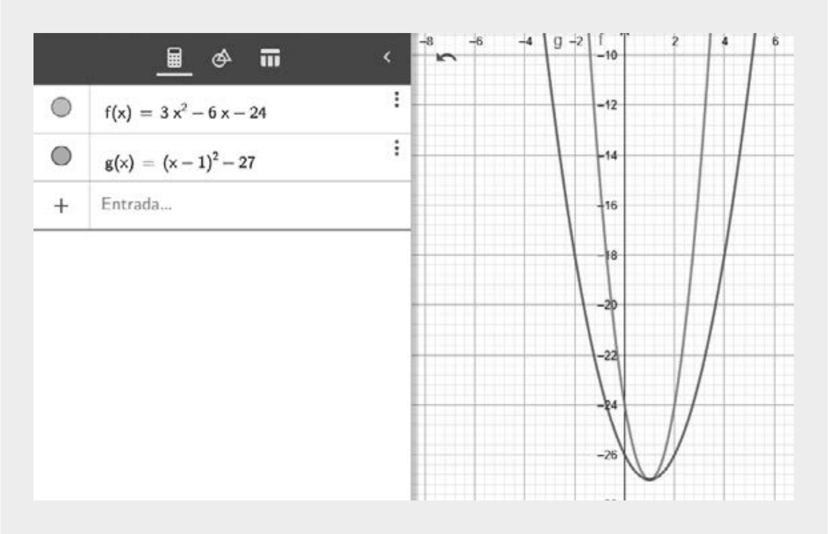


Figura 8. Al ingresar las fórmulas se visualiza que los gráficos de las funciones no coinciden.

$g(x) = (x - 1)^2 - 27 + 2$. Pero en ese caso, obviamente, cambia la coordenada y del vértice.

Para deducir que hay que incluir al coeficiente principal de la forma desarrollada en la canónica se puede sugerir que "desarrollen" su fórmula canónica para ver si coincide con la dada. Al obtenerse $x^2 - 2x - 26$, quizás deduzcan que "falta un 3" delante del término cuadrático. Luego, en el espacio colectivo, se puede discutir por qué ese 3 triplica también al término lineal, pero no al término independiente.

Finalmente, otra alternativa es sugerir que se plantee la fórmula $g(x) = a(x - 1)^2 - 27$ y luego preguntar cómo se podría encontrar el valor de a para que, por ejemplo, se cumpla $g(0) = -24$.

En la discusión colectiva se espera generalizar que *cualquier fórmula desarrollada $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) puede escribirse en la forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde el punto (h, k) es el vértice.* Se puede explicitar en palabras que el coeficiente a es el mismo para ambas escrituras.

En la siguiente actividad, además de poner en juego la cuestión del coeficiente principal trabajada anteriormente, se incluye una función con una sola raíz y otra sin ceros.

ACTIVIDAD 2

a) *Hallen los ceros, si los hubiere, de las siguientes funciones dadas por sus fórmulas:*
$g(x) = -4x^2 + 4x + 24$, $p(x) = 2x^2 - 4x + 5$, $f(x) = 3x^2 + 24x + 48$.

b) Para cada función, hagan un esquema de sus posibles gráficos.

Al reescribir la fórmula de p como $p(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, se espera que las y los estudiantes concluyan que la función no tiene raíces, porque la expresión $2(x - 1)^2$ es positiva (o cero) para todo valor de x; por lo tanto, al sumarle 3, se cumple $p(x) \geq 3$ para todo x.

Con respecto a la función f, al escribir su fórmula en cuasifactorizada, $f(x) = 3x(x + 8) + 48$, y deducir que la coordenada x del vértice es -4, tal vez haya sorpresa respecto a que su imagen sea 0. En ese caso, la expresión canónica resulta $f(x) = 3(x + 4)^2 + 0$. Esta misma expresión puede pensarse también en la forma factorizada, es decir, como $f(x) = 3(x + 4)(x + 4)$. De cualquiera de las dos maneras se puede concluir que la única raíz es $x = -4$.

En cuanto a los esquemas, ya los alumnos y las alumnas tienen las herramientas para realizar gráficos bastante aproximados, incluyendo las raíces, la ordenada al origen (y su simétrico) y el vértice. A pesar de haberse trabajado anteriormente, podría haber duda sobre cómo graficar, con más exactitud que en los esquemas anteriores, una función cuadrática con una sola raíz o sin ceros. En este caso, el o la docente puede recordar que además tienen la información de dos valores de x con la misma imagen.

Creemos que esta discusión colectiva es una buena oportunidad para afirmar que con el vértice y dos puntos cuya coordenada y sea la misma, ya es posible determinar la "abertura" de la parábola.

Con todo lo trabajado en las dos actividades de este último apartado del capítulo, se puede elaborar un trayecto para determinar las raíces (o asegurar que no tienen ceros) de una función cuadrática cuya fórmula está escrita en forma desarrollada o cuasifactorizada.

El recorrido es:

- determinar dos valores de x con igual imagen (si la expresión está en forma desarrollada previamente hay que sacar factor común),
- calcular el x del vértice haciendo el promedio entre ellos,
- averiguar la imagen del x del vértice reemplazando en la fórmula dada,
- armar la fórmula canóica, equivalente a la fórmula de la que partimos, y
- calcular, si existe, la preimagen del cero de esta función resolviendo la ecuación resultante.

De esta manera, los y las estudiantes disponen de un procedimiento para determinar las raíces de una cuadrática que, si bien necesita de muchos pasos, es valioso porque pone en juego muchas ideas y relaciones que han construido en torno a la gráfica y a las fórmulas de estas funciones. En este sentido, creemos que puede brindar muchas herramientas de control en cada uno de los pasos.

Sin embargo, consideramos también que es necesaria la búsqueda de economía ante la tarea de determinar las raíces de estas funciones, por lo que proponemos como cierre una actividad guiada por el o la docente con el doble objetivo de, por un lado, sistematizar estos pasos necesarios para determinar las raíces de la función cuadrática y, por otro, introducir la fórmula de Baskhara.

Un posible modo de realizar esto es partir de una fórmula desarrollada general y recorrer todos los pasos siguiendo la técnica que hemos descripto.

Partimos de una función cuadrática cuya fórmula está escrita como $f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$ y tenemos la tarea de determinar sus raíces. Como todavía no podemos resolver la ecuación $0 = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$, tendremos que trasformar la fórmula dada en otra equivalente escrita en forma canónica (ya que de ella, si los hay, sí es posible hallar los valores de x que cumplen con la igualdad). Con este objetivo necesitaremos conocer el vértice de la función, para lo que tendremos que conocer dos valores de x con igual imagen.

Aquí empieza el siguiente proceso:

1) Cálculo de la preimagen del valor c:

$$c = ax^2 + bx + c,$$
$$c = x(ax + b) + c,$$
$$0 = x(ax + b).$$

De esta última igualdad se deduce que $x = 0$ o $x = \frac{-b}{a}$.

Una vez obtenidos estos dos valores de x, cuya imagen es la misma (en este caso c), podemos remarcar que por el modo en que se realiza este primer paso siempre uno de ellos es el cero. Es decir, sabemos que c es el valor de la ordenada al origen por lo que, si calculamos su preimagen, una de ellas efectivamente debe ser el cero.

2) Determinación del x del vértice haciendo el promedio entre los dos valores de x hallados:

$$x_v = \frac{0 + \left(\frac{-b}{a}\right)}{2} = \frac{-b}{2 \cdot a}.$$

Será interesante remarcar lo general de este procedimiento, por lo que si siempre tomamos las preimágenes de c para hacer el promedio y hallar el x del vértice, nos queda una fórmula para poder determinarlo en forma automática: siempre se cumple que

$$x_v = \frac{-b}{2 \cdot a}.$$

De esta manera llegamos a esta fórmula tan conocida como una generalización del procedimiento, sin que quede impuesta para las y los estudiantes de forma arbitraria.

3) Cálculo de la imagen del x_v, reemplazando ese valor de x en la fórmula original:

$$f(x_v) = a \,.\, (x_v)^2 + b \,.\, (x_v) + c = a \,.\left(\frac{-b}{2 \,.\, a}\right)^2 + b \,.\left(\frac{-b}{2 \,.\, a}\right) + c = a \,.\, \frac{b^2}{4 \,.\, a^2} - \frac{b^2}{2 \,.\, a} + c =$$
$$= \frac{b^2}{4 \,.\, a} - \frac{2b^2}{4 \,.\, a} + c = \frac{-b^2}{4 \,.\, a} + c.$$

Esta última expresión es la que representa a la coordenada y del vértice. Queremos aclarar que no pretendemos que las alumnas y los alumnos la recuerden de memoria, ya que esta coordenada se puede obtener haciendo $f(x_v)$ para cada f en particular.

4) Armado de la fórmula en forma canónica:

$$f(x) = a \,.\, (x - x_v)^2 + (y_v) = a \,.\left(x - \left(\frac{-b}{2 \,.\, a}\right)\right)^2 + \left(\frac{-b^2}{4 \,.\, a} + c\right).$$

5) Por último, cálculo de la preimagen del cero resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, donde la fórmula de f está escrita en la forma canónica:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c.$$

Como estamos suponiendo $a \neq 0$, tenemos que:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Realizando la suma de la expresión de la derecha:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ahora bien, esta última ecuación tiene solución siempre y cuando:

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0.$$

Pues es el resultado de una expresión que está elevada al cuadrado. Notemos que si $b^2 - 4ac$ es negativo, podemos asegurar que la función no tiene raíces. Por el contrario, si $b^2 - 4ac$ es positivo (o cero) se puede realizar el razonamiento que venimos proponiendo para casos particulares, es decir, el argumento que está dentro del cuadrado tiene que cumplir con que:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{o} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}};$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{o} \quad x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Distribuyendo la raíz se obtiene:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Finalmente, llegamos a los dos valores que cumplen la igualdad $f(x) = 0$ cuando f tiene ceros:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como estas soluciones difieren solamente del signo de la raíz se las puede agrupar de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De esta manera se obtiene la fórmula de Bhaskara y se podría presentar a los y las estudiantes como una fórmula que sintetiza todos los pasos que contenía nuestro procedimiento. Es probable que para la exposición del o de la docente de cada uno de estos pasos, sea necesario acompañar esta operatoria con ejemplos tomados de las actividades anteriores. Otra manera posible es hacer, en paralelo, cada paso con una función particular, donde a, b, y c sean números que permitan una mayor visualización de cuáles son variables y cuáles parámetros en la operatoria general.

Finalmente, nos interesa volver a poner la mirada, de forma general, sobre las actividades de este capítulo. La propuesta de problemas que analizamos intenta promover un espacio de producción matemática que permita avanzar en la complejidad del trabajo algebraico de los y las estudiantes.

Las distintas escrituras de la fórmula de una función cuadrática, que se abordaron en los diferentes problemas, y su puesta en relación con las características del gráfico cartesiano permitieron desplegar estrategias de lectura de información de las fórmulas propiciando una coordinación entre ambas representaciones de las funciones.

Además, el estudio de las ecuaciones de segundo grado que se propuso se estructura a partir del trabajo con las funciones cuadráticas. Por ende, las técnicas de transformación de las expresiones y la resolución de esas ecuaciones toman un sentido que no se agota en la aplicación de reglas.

Sostenemos que este abordaje de las funciones cuadráticas se soporta en una idea central de nuestra concepción de enseñanza: mientras se avanza en la comprensión y aprendizaje de los objetos, sus propiedades y relaciones, los y las estudiantes se sumergen en un tipo de actividad que les permite incorporar algunos rasgos esenciales de los modos de producir matemática.

Sobre los autores

VALERIA BORSANI es profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática Universidad de Buenos Aires (UBA). Integra el equipo dedicado a la enseñanza de la matemática para la escuela secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). En ese espacio, es profesora de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria y parte del equipo de investigación colaborativa que, actualmente, está centrado en el trabajo algebraico. Trabajó enseñando matemática en escuelas secundarias y es coautora de textos escolares y de documentos curriculares de matemática.

MARA CEDRÓN es profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UBA). Integra el equipo dedicado a la enseñanza de la matemática para la escuela secundaria en la UNIPE. En ese marco, se desempeña como profesora de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria y conforma el equipo de investigación que dirige Betina Duarte, dedicado a generar conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números reales en la escuela secundaria. Participó antes en investigaciones sobre TIC y trabajó en instituciones de formación docente.

HORACIO ITZCOVICH es profesor de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UBA) y especialista en Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (Universidad Nacional de San Martín, UNSAM). Actualmente se desempeña como profesor e investigador en la UNIPE. Su área de estudio se focaliza en los problemas de enseñanza de la geometría que emergen al incluir programas de geometría dinámica. Trabaja en la formación de docentes de nivel primario y medio. Es autor de artículos de investigación y materiales sobre enseñanza de la matemática, destinados a docentes y alumnos.

CECILIA LAMELA es profesora de Educación Media y Superior en Matemática (UBA). Se desempeña como profesora adjunta en UNIPE, en la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. Su investigación actual estudia la reflexión sobre las propias prácticas en el marco de un trabajo colaborativo entre docentes de matemática. Es docente y coordinadora en el nivel secundario y coautora de libros de texto y de documentos curriculares. Ha sido formadora de docentes en diversas instituciones y participó en varios proyectos de investigación en enseñanza de la matemática.

JUAN PABLO LUNA es profesor de Educación Media y Superior en Matemática (UBA). Se desempeña como docente e investigador en la UNIPE. Profesor auxiliar y jefe de trabajos prácticos en la Especialización en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. Participó del equipo de formadores en la capacitación x + Matemática brindada a profesores de escuela media de la provincia de La Pampa (2018/2019). Integra el Grupo de los Lunes, equipo colaborativo funcionando actualmente en la UNIPE, que elaboró diversos materiales para el aula del secundario. Es coautor de "Figuras dinámicas para el abordaje de la noción de función" (2018).

RODOLFO MURÚA es profesor de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UBA) y Especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesor e investigador en la UNIPE y en la Universidad Nacional General Sarmiento (UNGS). Sus investigaciones se focalizan en la enseñanza de la geometría y las funciones mediante la utilización del programa GeoGebra. Es autor de diversos documentos con propuestas didácticas para docentes y de libros de texto tanto para primaria como para secundaria.

VALERIA RICCI es profesora de Educación Superior en Matemática (Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"). Se desempeña como docente en escuelas secundarias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y como tutora virtual en especializaciones y cursos de formación docente. Actualmente, estudia la incertidumbre en la clase de matemática en el marco del trabajo con gráficos cartesianos. Participa en un colectivo docente de profesores y profesoras de matemática en el cual se elaboran secuencias de enseñanza para la escuela secundaria. Es coautora de documentos curriculares para la enseñanza de la matemática.

SILVIA SEGAL es licenciada en Ciencias Matemáticas. Desde hace muchos años se dedica específicamente a su didáctica, tanto a nivel primario como secundario. Es profesora de la UNIPE y trabaja en la formación de docentes. Es autora de materiales sobre la enseñanza de la matemática, destinados a docentes y alumnos de la escuela primaria y secundaria.

Esta edición, de cantidad ejemplares,
se terminó de imprimir en el mes de mes de año,
en datos imprenta.

Durante el año 2018, un diálogo fecundo entre un grupo de profesores y profesoras de la Universidad Pedagógica Nacional, un grupo de especialistas del Ministerio de Educación de la Provincia de La Pampa y un grupo de profesoras de la Universidad Nacional de La Pampa sentó las bases para el diseño de la propuesta de formación del Programa x + Matemática.

El Programa x + Matemática privilegió el análisis de problemas de enseñanza que dieran sentido al trabajo algebraico en la escuela secundaria, a partir de la selección de algunos núcleos de enseñanza ubicados en distintos momentos de la escolaridad.

Durante el año 2019, muchos profesores y profesoras de la provincia concurrieron a Santa Rosa para recorrer el tramo de formación que se desplegó en este programa. Se estudiaron en su transcurso diferentes propuestas en torno a la aritmética como una posible vía de entrada al álgebra y también situaciones de conteo y de generalización que propician el uso de la letra. En este marco, las funciones lineales, cuadráticas y polinómicas ampliaron el espectro de situaciones en las que el trabajo algebraico hace posible conocer más sobre el conjunto de funciones.

Cada capítulo de este libro fue escrito por docentes y graduados de la UNIPE; en coherencia con esto, los autores y las autoras comparten una mirada de la clase de matemática como un espacio de producción de los y las estudiantes. Esa mirada está presente en todos los capítulos, no solo a partir de los problemas que se exponen como posibles para la clase, sino fundamentalmente sobre la labor docente que se imagina a partir de las resoluciones de los alumnos y las alumnas. El espacio colectivo del aula es entonces el lugar donde la producción más autónoma de los y las estudiantes al resolver los problemas se comparte, se enriquece y avanza con una deliberada intencionalidad docente de que eso ocurra.

Presentamos este libro para que los y las docentes de La Pampa accedan a un material tanto de ampliación como de profundización de los contenidos elegidos por el Programa x + Matemática.