

# Uso del aprendizaje basado en preguntas en geometría

## Inquiry-based learning approach to undergraduate geometry

MANUEL JESÚS GAGO VARGAS

*Universidad de Sevilla*

*Departamento de Álgebra*

Correo: [gago@us.es](mailto:gago@us.es)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2941-2610>

DOI: <http://dx.doi.org/10.12795/9788447231003.125>

Pp.: 2744-2761



Esta obra se distribuye con la licencia Creative Commons  
Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0  
Internacional (CC BY-NC-ND 4.0.)

## Breve descripción del contexto

Comencemos con una descripción general de la materia sobre la que se va realizar el ciclo de mejora. Se trata de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría I, que tiene una duración anual y pertenece al primer curso del grado en Matemáticas, aunque es transversal con los dobles grados de Estadística y Matemáticas, Física y Matemática, e Informática y Matemáticas. No obstante, el grupo sobre el que actuaremos pertenece al grado en Matemáticas.

El ciclo se plantea para 40 horas del segundo cuatrimestre del curso 2018-2019, donde se aprecia, en general, una mayor dificultad para los alumnos. La asignatura plantea numerosos retos:

- Alto nivel de abstracción.
- Encadenamiento de conceptos. La materia es acumulativa y la pérdida de un eslabón supone una gran dificultad para continuar.
- Necesidad de formalizar conceptos intuitivos. Es preciso dar el salto de ideas comunes a definiciones precisas.

Una ventaja de esta progresión en los conceptos es el seguimiento que permite realizar del aprendizaje de los alumnos. Las tareas a desarrollar en cada tema suponen una oportunidad de asentar los conocimientos adquiridos en los anteriores.

La metodología IBL se ha usado tradicionalmente en cursos de Matemáticas basados en demostraciones (Rasmussen, Marrongelle, Kwon y Hodge, 2017), que no suelen ser propios de primer año. Suponen un nivel de dominio de conceptos que no es habitual en los alumnos de esta etapa. No obstante, la asignatura que tratamos combina tareas de procedimientos propias de un primer curso con una introducción a la idea de formalización y prueba que los alumnos encontrarán en los años sucesivos. El reto es establecer una secuencia de actividades que permita a los estudiantes una mayor participación en su aprendizaje.



## Diseño previo del CIMA

Durante el curso 2016-2017 se realizaron dos ciclos de mejora en el aula sobre la asignatura. El primero consistía en una técnica basada en un juego que permitió una mayor participación de los alumnos, así como una evaluación de sus conocimientos de definiciones. El segundo ciclo se basó en la generación de mapas de contenidos para algunos temas, donde se partía de conocimientos intuitivos para llegar a conceptos bien definidos y la necesidad de prueba de algunos teoremas. Se combinaba con un trabajo en grupo para resolver algunas de las cuestiones planteadas. Las conclusiones principales de ambos ciclos fueron:

1. El conocimiento intuitivo y previo que tienen los alumnos sobre un problema es una fuente muy rica para generar preguntas, en consonancia con (Bain, 2007).
2. La orientación del tema a partir de cuestiones que se quieren responder permite un enlace natural con las inquietudes de los alumnos.
3. El trabajo para cada grupo debe estar muy especificado, aunque hay que eliminar las acotaciones temporales demasiado estrictas.
4. La hoja de trabajo orientada a una pregunta concreta permite medir bastante bien lo que han aprendido los alumnos. Hace aflorar los problemas latentes que deben ser corregidos.

En el nuevo ciclo se van a usar los mapas de contenidos como herramienta guía para cada uno de los temas.

Los contenidos de la asignatura están muy definidos y durante los últimos cursos se han eliminado cuestiones más secundarias que distraían de los objetivos finales. En un curso de Matemáticas, lo más sensato es establecer como meta la prueba de ciertos teoremas fundamentales.



En el caso del segundo cuatrimestre, donde se aplicarán los ciclos de mejora en el aula, encontramos los siguientes:

- 1) Teorema espectral de las matrices hermitianas.
- 2) Clasificación de los movimientos en el plano y el espacio.

Sin entrar en detalles técnicos, el primer objetivo permite comparar objetos y el segundo permite formalizar un contenido geométrico intuitivo, como es el de simetría.

El ciclo de mejora en el aula se divide por áreas temáticas, cuya secuencia se expone en la figura 1, «Mapa de contenidos global».

Pretende dar una idea general de cada uno de los módulos a desarrollar.

El esquema metodológico parte siempre de las ideas intuitivas que tienen los alumnos sobre ciertas preguntas clave que se plantean inicialmente. El objetivo no es rebatir, sino afinar esos conceptos iniciales.

Cada definición, resultado o procedimiento debe ir motivado por una cuestión previa, que oriente hacia el objetivo final. Como resultado deseado se espera que los alumnos creen un esquema de relaciones entre los conceptos o, al menos, que no vean las ideas como cuestiones independientes entre sí y que hay una línea motivadora. Los objetivos se pueden resumir en los siguientes puntos:

1. Promover que los estudiantes compartan sus ideas.
2. Ayudarlos a involucrarse en las ideas de otros.
3. Mejorar la capacidad de profundización en su propio pensamiento.
4. Construir y extender nuevas ideas.

El modelo metodológico de partida es el clásico de transmisión de conocimientos, que sigue teniendo su peso en el ciclo de mejora en el aula, debido a la novedad de los temas y a la necesidad de formalización de los conceptos. No obstante, el objetivo es tender a un modelo basado en la reelaboración de las ideas de los estudiantes, a partir de conceptos intuitivos (De Alba y Porlán, 2017). Se plantean unas preguntas iniciales y el proceso de enseñanza gira alrededor de las mismas. Todos los procedimientos y teoremas van enfocados a dar alguna respuesta a las cuestiones iniciales. Como es lógico, no siempre los alumnos serán capaces de elaborar por su cuenta los resultados y aquí interviene el profesor como guía colaborador.

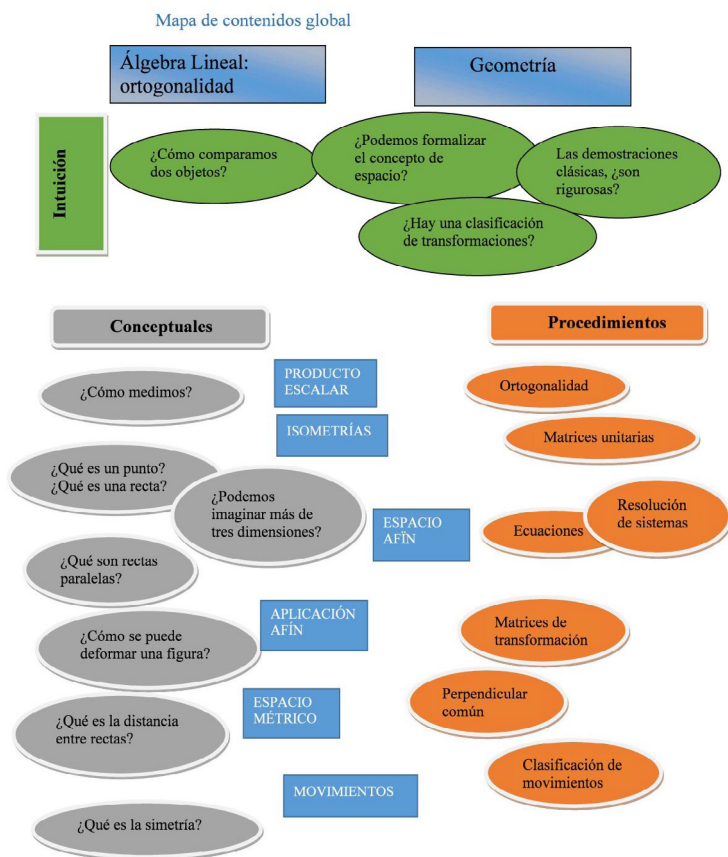


Figura 1. Mapa de contenidos global

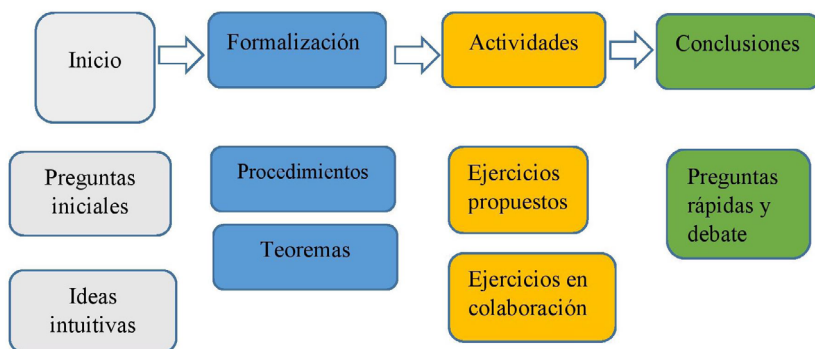


Figura 2. Modelo metodológico

Las diferentes técnicas que describimos a continuación se orientan siempre dentro de este esquema.

Con los objetivos anteriores, se describen las técnicas a emplear en cada uno de los módulos de contenido, con las actividades que se describen a continuación.

### *Mapa de contenidos detallado*

Como punto de partida, se crea un mapa de contenidos con más detalle de cada tema. La idea es plantear cada concepto a partir de una pregunta que el alumno pueda responder de forma aproximada. El objetivo es formalizar esa idea en una definición a través de un debate entre iguales. Se muestra un ejemplo de las preguntas y la secuencia de conceptos en la figura 3, «Mapa de contenidos detallado».

### *Ideas intuitivas*

Se plantean una serie de preguntas iniciales que relacionen ideas que tienen los alumnos con los conceptos que se quieren definir. Como ayuda, se creará un cuestionario que los alumnos deben responder según sus ideas. Estas preguntas iniciales se irán respondiendo en las diferentes sesiones y marcan el desarrollo del tema.

## Ejercicios propuestos

Cada concepto del temario está, en general, enlazado con otro anterior y suele tener una técnica numérica asociada. De manera semanal se entrega a los alumnos unos ejercicios propuestos que deben resolver para ser corregidos y devueltos. Esto permite hacer un seguimiento individual de cada alumno y detectar los errores más comunes. De igual forma, mejora la capacidad de expresión de los alumnos y cambia su actitud ante la resolución de un problema, pues no debe quedarse en una mera concatenación de cálculos, sino que se deben explicar los pasos realizados. La corrección de estos ejercicios permite analizar la evolución del aprendizaje de los alumnos. En cierta forma juegan el papel de cuestionarios iniciales y finales.

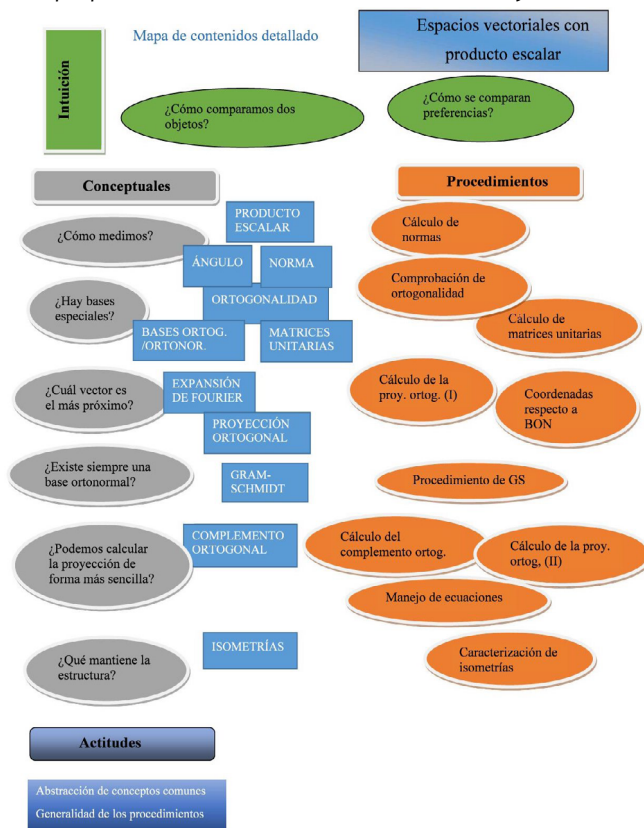


Figura 3. Mapa de contenidos detallado

## Ejercicios en colaboración

Algunos de los ejemplos presentados en clase serán elaborados por los alumnos, en grupos de trabajo (máximo de cuatro alumnos) y asistidos por el profesor. Serán sesiones de 45 minutos, donde se intercambien modos de trabajo y se expongan las soluciones como objetivo final. Además, en la plataforma de enseñanza virtual aparecerán los desarrollos de todos los problemas resueltos en clase.

## Preguntas rápidas

La metodología anterior cubre la parte más cercana a los procedimientos, pero hay un aspecto más ligado a cuestiones teóricas en donde los alumnos suelen fallar. Para ello, se dedicarán sesiones a la resolución en grupos de preguntas conceptuales de respuesta corta. La técnica empleada se basa en el uso de un sistema de votación y aprendizaje entre pares (Adam, 2009).

El profesor prepara con antelación un conjunto de preguntas con varias opciones de respuesta. Es importante la elección de las mismas, pues deben dirigirse a los conceptos fundamentales del tema.

Cada pregunta y sus respuestas se muestran en la pantalla. Se han combinado técnicas manuales (papel con votaciones) y el uso de la plataforma Kahoot. A partir de grupos de dos alumnos formados previamente, se deja que trabajen una respuesta más meditada durante cinco minutos y se vuelve a hacer una votación.

Este método permite tratar unas cuatro preguntas en una sesión de una hora y es preferible hacerla al final del tema. De nuevo, las respuestas correctas y desarrolladas se suben a la plataforma de enseñanza virtual. Un ejemplo se muestra en el anexo II.



## *Papel del último minuto*

Una técnica muy extendida y de fácil elaboración es la del papel del último minuto (Svinicki y McKeachie, 2011). Al final de algunas clases se dedicarán cinco minutos a que los alumnos escriban el concepto más importante, en su opinión, que han visto en la sesión. Estos papeles se recogen y sirven para evaluar si el profesor ha transmitido de forma correcta las ideas que pretendía.

## *Otras consideraciones*

Aunque no forma parte del desarrollo de las actividades en clase, es muy recomendable el uso de un diario de clase personal, donde se anotan las actividades hechas en clase y los resultados obtenidos.

## *Evaluación*

Dado que la asignatura es anual, una primera comparativa se hará entre los resultados del primer cuatrimestre y los del segundo, dentro del grupo. Por otro lado, la evaluación final es común a todos los grupos de la asignatura, y no en todos ellos se realizan estas actividades. Así, se puede comparar la efectividad de la metodología tras compararlos entre sí.

## **Aplicación del CIMA**

### *Mapas de contenido e ideas intuitivas*

Se han completado los mapas de contenidos de todos los temas, con una guía de preguntas para cada apartado. Por ejemplo, algunas de las preguntas iniciales son



Teoremas espectrales. ¿Existe la raíz cuadrada de una matriz? ¿Se pueden clasificar las isometrías? ¿Es posible aproximar una matriz por otra?

Espacio afín. ¿Qué es un punto? ¿Qué es una recta? ¿Qué modelo seguimos para demostrar teoremas? ¿Qué es el espacio? ¿Qué es el paralelismo? ¿Qué objetos geométricos conoce?

Aplicaciones afines. ¿Qué hace la lupa en un editor de texto o en un mapa? ¿Qué otras transformaciones conocemos? ¿Se conserva el paralelismo? ¿Qué permanece fijo?

Espacio afín euclídeo. ¿Qué es la distancia entre puntos? ¿Cómo medimos? ¿Qué es un ángulo? ¿Podemos medirlo?

Movimientos. ¿Qué transformaciones conocemos que conserven la distancia (caminar, mirarse en un espejo)? ¿Se pueden clasificar? ¿Cómo sabemos que son todos?

Por una parte, se ha construido la batería de cuestiones de cada tema, sobre la que se trabajará en años posteriores, mediante la inclusión de nuevas preguntas o estudiando nuevos puntos de partida. Por otra, la percepción de los estudiantes ha variado desde una escasa participación inicial a un intercambio de ideas más ágil al final. La medida es la dedicación en tiempo. Al comienzo del ciclo, el tiempo total en un tema dedicado a las preguntas de cada sección no sobrepasaba los diez minutos, mientras que al final del curso una sola pregunta podía dar lugar a una discusión de quince minutos.



## *Ejercicios propuestos*

Esta ha sido una actividad muy valorada por los alumnos. En media, cada alumno ha entregado un 80 % de los problemas propuestos. Además, una parte de las clases se ha usado para comentar de forma personal los fallos en las resoluciones o compartir los métodos usados. La evolución de los resultados ha sido buena, aunque queda pendiente su efectividad en la evaluación final.

## *Ejercicios en colaboración*

Una vez a la semana se han propuesto ejercicios para resolver en clase, con asistencia del profesor. No se ha conseguido, en general, un clima de colaboración entre los alumnos debido a la tipología de los problemas propuestos. Al estar orientados al uso de procedimientos y cálculos, la interacción se ha limitado a comparación de cálculos, pero sin mucho intercambio de ideas. Una de las críticas que suelen hacer los alumnos con estas metodologías es que al final no tienen unos buenos apuntes o no se ha resuelto un ejercicio completamente. En ese sentido, se mantienen en la enseñanza virtual unas notas completas del curso, así como las soluciones detalladas de los ejercicios resueltos en clase.

## *Preguntas rápidas*

Se ha generado un conjunto de preguntas que se usará para próximos cursos y es probable que se integren en la plataforma de enseñanza virtual, dentro del apartado de banco de preguntas. La acogida ha sido buena, de forma independiente a la técnica usada (votación, Kahoot) y aquí sí se ha tenido una mayor interacción entre los alumnos. En mi opinión, los alumnos notaban que no estaban siendo evaluados. La respuesta consistía en un uso directo de algún resultado y las discrepancias entre las opciones



daba lugar a una discusión interesante, pues las respuestas ofrecidas diferían, en muchas ocasiones, en un matiz, como podían ser las hipótesis de aplicación de un teorema. Se ha animado en todo momento a elegir una opción e incluso una respuesta incorrecta servía para construir un contraejemplo.

Como ejemplos de preguntas se muestran las siguientes:

1. Sea  $f: A^n(\mathbb{R}) \rightarrow A^n(\mathbb{R})$  una aplicación afín.
  - a) Si  $n$  es par, entonces  $f$  tiene algún punto fijo.
  - b) Si  $n$  es impar, entonces  $f$  tiene algún punto fijo.
  - c) Una aplicación afín siempre tiene un punto fijo.
  - d) Para cualquier  $n$ , hay aplicaciones afines sin puntos fijos.
2. Sea  $f: E \rightarrow E$  una aplicación afín, no afinidad, y  $X = P + W$  un subespacio afín.
  - a)  $\dim X = \dim f(X)$ .
  - b)  $\dim X \leq \dim f(X)$ .
  - c)  $\dim X < \dim f(X)$ .
  - d)  $\dim X \geq \dim f(X)$ .
3. Sea  $f: E \rightarrow E$  una aplicación afín que transforma rectas en rectas.
  - a) Esta propiedad solamente la tienen las afinidades.
  - b) Esta propiedad implica que  $f$  tiene algún punto fijo.
  - c) Esta propiedad la tienen todas las aplicaciones afines.
  - d) Esta propiedad solamente la verifican las traslaciones.
4. Sea  $f: E \rightarrow E$  una aplicación afín que transforma un sistema de referencia en otro sistema de referencia.
  - a) Esta propiedad solamente la tienen las afinidades.
  - b) Esta propiedad implica que  $f$  tiene algún punto fijo.



- c) Esta propiedad la tienen todas las aplicaciones afines.
- d) Esta propiedad solamente la verifican las traslaciones.

### *Papel del último minuto*

Se ha usado en cinco sesiones. Ha resultado de utilidad para el profesor y complementaria a los ejercicios corregidos.

Para obtener las opiniones de los alumnos, se les pasó una encuesta con el siguiente formato.

A lo largo del curso se han empleado diferentes técnicas para facilitar el aprendizaje. Puntúe de 0 (no relevante) a 5 (muy relevante) las diferentes acciones.

Notas de clase detalladas en la plataforma de Enseñanza Virtual.

Soluciones de ejercicios en la plataforma de Enseñanza Virtual.

Papel del último minuto.

Cuestiones de varias opciones al final del tema.

Ejercicios propuestos y corrección.

Preguntas iniciales sobre conceptos intuitivos.

La valoración se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1. Encuesta sobre actividades

Técnica	Valoración
Notas de clase	5,0
Soluciones de ejercicios	5,0
Papel del último minuto	3,0

Cuestiones de varias opciones	4,5
Ejercicios propuestos	4,8
Preguntas iniciales	4,2
Ejercicios en colaboración	4,9

## Evaluación del CIMA

Una primera conclusión satisfactoria del ciclo es la generación de material que se puede utilizar en cursos posteriores.

Entre las cuestiones a tratar para el futuro se pueden citar:

- Mejora en la implicación de los estudiantes cuando se trata de responder con sus ideas a las preguntas iniciales. Probablemente haya que complementar la implicación de los alumnos con una actividad experimental que rompa esa barrera mental respecto a que lo que pueden aportar es de interés. Por ejemplo, el uso de una herramienta de geometría dinámica como Geogebra permite esa transición, pues el estudiante pasa de una conjetura (idea propia) a un teorema (al cambiar los datos se sigue verificando).
- La corrección de los ejercicios propuestos es una tarea que consume bastante tiempo. Por ello, se puede usar con un número limitado de alumnos por clase, que ha sido posible este año. En este sentido debo agradecer el apoyo del departamento para lograr que los grupos fueran de un tamaño inferior a cuarenta alumnos.
- Uso de dinámicas de grupo para incrementar la colaboración en los ejercicios propuestos en clase. Una forma es mediante la división de la tarea en dos bloques. En el primero hay que decidir qué método es el más aconsejable a la hora de resolverla, desde el punto de vista de eficiencia o claridad. Aquí es posible plantear una

discusión dentro del grupo de trabajo y es lo que denomino *estrategia* de resolución. La parte efectiva de la resolución numérica, con los detalles de cálculo, es ya una parte individual, y es lo que llamo *táctica*. Aquí es donde entra la colaboración directa con el profesor.

- Ampliación del conjunto de preguntas rápidas para tener más variedad. Además, es posible incluir una valoración de los alumnos de las preguntas propuestas para determinar las que, en su opinión, les han dado una mayor profundización.
- Incremento del uso del papel de último minuto para centrar las ideas en los alumnos.
- Creación de una plantilla que liste los errores más comunes cometidos por los estudiantes en la resolución de los problemas entregados y que permita una toma de datos de su evolución.

Para determinar la efectividad del ciclo de mejora en el aula, usamos los resultados de las evaluaciones dentro del grupo (grupo propio) y se comparan con los datos globales de todos los grupos de la asignatura (todos). En el segundo cuatrimestre se han realizado dos pruebas, y la metodología se ha empleado en la segunda.

Tabla 2. Resultados de la evaluación

Prueba	Grupo	% aprobados
Primera	Propio	33,0 %
Primera	Todos	37,6 %
Segunda	Propio	44,0 %
Segunda	Todos	33,1 %

Se observa una mejora dentro del grupo y con respecto a los restantes. Sin embargo, la tasa de rendimiento sigue siendo baja.

La mejoría se ha detectado en un mayor cuidado en la resolución de problemas que siguen un procedimiento. Desde mi punto de vista, los avances se deben, fundamentalmente, a la corrección de los problemas propuestos, que ha obligado a los alumnos a escribir metódicamente la resolución. En otros grupos no se ha realizado esta actividad. Los ejercicios en colaboración han contribuido a compartir métodos y a elegir, de entre varias opciones, la forma más económica.

El uso de ideas intuitivas al comienzo de cada tema ha servido para mantener el interés de los estudiantes por las respuestas a esas preguntas. Aunque no se mide directamente en la evaluación, sí se ha comprobado con el nivel de asistencia a clase: el 90 % de los alumnos matriculados ha asistido de manera habitual.

El objetivo del ciclo de mejora ha sido el empleo de la metodología de aprendizaje basado en preguntas a través de diferentes técnicas, su puesta en funcionamiento y realizar una aproximación a las más eficaces.

No se aprecia necesidad de cambio en los contenidos de la asignatura, pues reflejan un curso estándar para un primer año de universidad en estas materias. Sí es recomendable insistir constantemente en los objetivos finales, pues es fácil que los detalles nublen la visión global. Considero muy interesante en este tipo de asignaturas el tener una historia que contar, que se traduce en la resolución de un problema a través de teoremas.

En la metodología se observan varios puntos de fortaleza, como el fomento de la colaboración entre compañeros o la generación de ideas a partir de conceptos propios. No obstante, precisa de un seguimiento muy cercano de los alumnos y una participación alta de los estudiantes,





que no siempre es bien recibida, pues obliga a no quedarse rezagados con la asignatura.

Las técnicas empleadas, como los ejercicios en colaboración, entrega de problemas y preguntas finales, pueden ser aprovechadas para un diseño de evaluación continua, y es lo que se tiene previsto para el próximo curso.

**Palabras clave:** Álgebra Lineal y Geometría I, grado en Matemáticas, docencia universitaria, experimentación docente universitaria, Inquiry-based Learning.

**Keywords:** Linear Algebra and Geometry, Mathematics, Experimental University Teaching, Inquiry-based Learning.

## Referencias bibliográficas

- Adam, L., (2009), Using Peer Instruction and I-Clickers to Enhance Student Participation in Calculus, *PRIMUS*, 19(3), 219-231.
- Bain, K., (2007), *Lo que hacen los mejores profesores de la universidad*, España: Publicacions de la Universitat de València.
- De Alba Fernández, N. y Porlán Ariza, R., (2017), La metodología de enseñanza, en R. Porlán Ariza (coord.), *Enseñanza Universitaria: cómo mejorarla*. Madrid: Morata.
- Rasmussen, C., Marrongelle, K., Nam Kwon, O. y Hodge, A. (2017), Four Goals for Instructors Using Inquiry-Based Learning, *Notices of the American Mathematical Society*, 64(11), 1308-1311.
- Svinicki, M. y McKeachie, (2011), W.J., *McKeachie's Teaching Tips*, USA: Wadsworth, Cengage Learning.

